

# PRZYKŁAD INSTRUKCJI, RAPORTU I RAPORTU SKRÓCONEGO

A. Majhofer i R. Nowak z modyfikacjami A. Drabińskiej

## Ćwiczenie nr XXX

### MODUŁ YOUNGA STALI NARZĘDZIOWEJ

Celem ćwiczenia jest sprawdzenie prawa Hooke'a, w tym wypadku proporcjonalności między ugięciem a masą, potęgowej zależności współczynnika proporcjonalności od długości pręta i wyznaczenie oceny modułu Younga pręta w postaci brzeszczotu piłki do metalu.

#### WSTĘP

Ciało poddane działaniu siły ulega deformacji, która oznacza zmiany jego rozmiarów zarówno w kierunku działania siły, jak i w kierunku do niej prostopadłym. Jeśli deformacja jest odwracalna i proporcjonalna do przyłożonej siły, to relację między tymi wielkościami nazywana jest prawem Hooke'a. Dla ciał jednorodnych i izotropowych deformację tę można opisać za pomocą jedynie dwóch współczynników proporcjonalności: modułu Younga  $E$  o wymiarze ciśnienia i bezwymiarowego współczynnika  $\nu$ , zwanego współczynnikiem Poissona. Należy pamiętać, że nie wszystkie ciała o stałej konsystencji stosują się do prawa Hooke'a. Dobrym przykładem takiego ciała, znanym z codziennej praktyki, jest glina.

Prawo Hooke'a, w swej najprostszej postaci, orzeka, że zmiana  $\Delta L$  długości w kierunku działania siły  $F$  jest proporcjonalna do działającej na ciało siły:

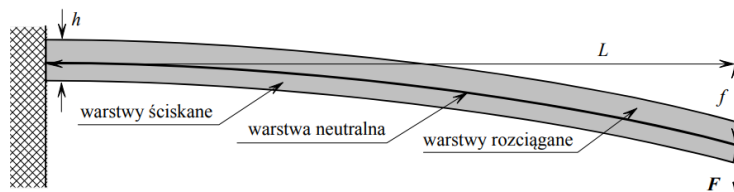
$$\Delta L = \frac{1}{E} \frac{FL}{S},$$

gdzie  $L$  jest długością niezdeformowanego ciała, natomiast  $S$  to pole przekroju poprzecznego, na które działa siła. Przy zmianie długości ciała następują jednocześnie zmiana  $\Delta D$  jego wymiarów poprzecznych względem kierunku działania siły, przy czym wg prawa Hooke'a mamy:

$$\Delta D = -\frac{\nu}{E} \frac{FD}{S} = -\nu \Delta L,$$

gdzie  $D$  jest pierwotną szerokością ciała. Oczywiście prawo Hooke'a, jeśli w ogóle obowiązuje, to obowiązuje jedynie w ograniczonym zakresie wartości siły, różnym dla różnych ciał, a poza tym zakresem prowadzi do trwałej deformacji lub nawet zniszczenia.

Rozważmy zorientowany poziomo pręt zamocowany sztywno jednym końcem do ściany. Na drugi jego koniec działa siła  $F$  prostopadła do jego osi. Siła ta powoduje wygięcie pręta, jak schematycznie ilustruje to Rysunek 1. Intuicja fizyczna podpowiada nam, że warstwy pręta leżące powyżej jego warstwy środkowej będą rozciągnięte, podczas gdy warstwy poniżej będą ściskane. Jeśli siła nie jest nadmierna i nie wychodzimy poza zakres stosowalności prawa Hooke'a, w opisie ugięcia  $f$  pręta musi pojawić się moduł Younga.



Rysunek 1. Rola modułu Younga w zagadnieniu zginaniu pręta

Dokładniejsze rozważenie problemu ugięcia  $f$  pręta wmurowanego poziomo w ścianę, którego drugi koniec obciążono masą  $m$ , prowadzi do następującego wyrażenia [1]

$$f = \frac{4L^3 g}{Edh^3} m,$$

gdzie  $h$  jest grubością pręta, jak na Rysunku 1, natomiast  $d$  jego szerokością,  $L$  długością nieodkształconego pręta, natomiast  $g$  przyspieszeniem ziemskim.

## MODUŁ YOUNGA STALI NARZĘDZIOWEJ - INSTRUKCJA POMIARY

### Masz do dyspozycji:

- dwa brzeszczoty piły do metalu;
- imadło;
- komplet ciężarków, które można zawieszać na metalowym haczyku;
- śrubę mikrometryczną o najmniejszej podziałce 0,01 mm;
- wagę laboratoryjną o najmniejszej podziałce 0,01 g,
- taśmę mierniczą o najmniejszej podziałce 1 mm.

### Wykonanie pomiarów

- a) Zamocuj poziomo w imadle oba brzeszczoty.
- b) Zważ pierwszy ciężarek, zawieś go na dolnym brzeszczocie i zmierz miarką odległość między końcem tego brzeszczotu a brzeszczotem górnym.
- c) Powtórz pomiary, zawieszając na haczyku kolejne dodatkowe ciężarki, każdorazowo ważąc całkowitą masę układu ciężarków; dokładaj ciężarki z umiarem, aby nie doprowadzić do trwałej deformacji brzeszczotu – sprawdzaj, za każdym razem, czy brzeszczot powraca pozycji początkowej.
- d) Zmień długość brzeszczotów w imadle i powtórz pomiary z punktów b) i c).
- e) Wykonaj analogiczne pomiary dla kilku długości brzeszczotu.

Podczas wykonywania pomiarów pamiętaj o szczegółowej dokumentacji, tj. o notowaniu wszystkich informacji mogących mieć znaczenie podczas analizowania uzyskanych wyników.

## RAPORT KOŃCOWY

Przygotuj raport końcowy zgodnie z ogólnymi zasadami. W szczególności, raport powinien zawierać:

- 1) w kilkudzaniowym streszczeniu: bardzo zwięzłą prezentację zagadnienia będącego przedmiotem doświadczenia i najważniejszych jego wyników, to znaczy: wnioski odnośnie do słuszności prawa Hooke'a, sześcienniej zależności współczynnika sprężystości od długości brzeszczotu i ocenę modułu Younga wraz z jej niepewnością;
- 2) we wstępie: sformułowanie zadania wraz z kluczowymi elementami teoretycznymi;
- 3) w części odnoszącej się do pracy eksperymentalnej: informacje o używanych przyrządach i ich dokładnościach, opis metod pomiaru i ich przebiegu oraz surowe wyniki pomiarów – zapisane wraz z nieistotnymi zerami ukazującymi dokładność;
- 4) w części odnoszącej się do analizy danych:
  - a) sprawdzenie słuszności prawa Hooke'a;
  - b) sprawdzenie modelowej zależności współczynnika sprężystości od długości brzeszczotu;
  - c) wyznaczenie oceny modułu Younga;
- 5) w dyskusji i wnioskach końcowych: konkluzje odnośnie do sprawdzenia słuszności prawa Hooke'a i relacji między współczynnikiem sprężystości a długością brzeszczotu i komentarz na temat zgodności uzyskanej oceny modułu Younga z danymi literaturowymi; tu można także przedstawić własne refleksje na temat problemu;
- 6) w spisie literatury: poprawnie zredagowane, wykorzystane w raporcie źródła.

### Literatura

- [1] Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna, część I, Mechanika i akustyka*, PWN, Warszawa, 1972, s. 407.

**Ćwiczenie nr XXX**  
**MODUŁ YOUNGA STALI NARZĘDZIOWEJ**  
**A.R. Hoferwak**

**STRESZCZENIE**

W pracy badano własność sprężystości stali w formie brzeszczotu piłki do metalu. Brzeszczot zamocowany jednym końcem w imadle poddano działaniu sił przyłożonych do drugiego końca. Pomiarów wykonano przy różnych długościach brzeszczotu. Stwierdzono zgodność zależności ugięcia od siły nie tylko z prawem Hooke'a ale także z cytowaną w literaturze modelową zależnością współczynnika sprężystości od trzeciej potęgi długości brzeszczotu. Wyznaczono moduł Younga  $E = (188 \pm 11)$  GPa stali narzędziowej.

**WPROWADZENIE**

Niech materiał, z którego wykonano pręt spełnia prawo Hooke'a. Gdy jeden koniec takiego pręta o długości  $L$  i przekroju prostokątnym o bokach  $d$  oraz  $h$  zostanie zamocowany, a do drugiego przyłożymy siłę  $F$  równoległą do boku o długości  $h$  i prostopadłą do osi pręta, to koniec pręta odchyli się od położenia równowagi o

$$f = \frac{4L^3}{Edh^3} F,$$

gdzie  $E$  jest modułem Younga materiału pręta [1]. Jeśli pręt ten zorientujemy poziomo, a na drugim końcu zawiesimy ciężarek o masie  $m$ , to wyrażenie na ugięcie możemy zapisać jako:

$$f = \frac{4L^3 g}{Edh^3} m, \quad (1)$$

gdzie  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim. Jak widać, zależność między masą  $m$  a ugięciem  $f$  jest proporcjonalna, a współczynnik proporcjonalności

$$k = \frac{4L^3 g}{Edh^3} \quad (2)$$

jest proporcjonalny do trzeciej potęgi długości  $L$  pręta. Obie te własności zostały sprawdzone metodą niewielu prostych pomiarów i ponieważ uzyskano zgodność z danymi, oceniono także moduł Younga materiału pręta.

**UKŁAD DOŚWIADCZALNY I POMIARY**

Pomiary wykonano w układzie przedstawionym na Rysunku 1.



Rysunek 1. Schemat układu pomiarowego

Dwa brzeszczoty piłki do metalu złożono razem i zamocowano w imadle, które pozwoliło zorientować płaszczyzny obu brzeszczotów poziomo, jedną nad drugą. Na dolnym brzeszczocie zawieszano na haczyku ciężarkę, uprzednio ważąc każdorazowo całość obciążenia na wadze WLC 1 o najmniejszej działce odczytu 0,01 g. Ugięcie brzeszczotu mierzono od górnego brzeszczotu, dzięki czemu uniknięto ewentualnego wpływu na wynik pomiaru odkształcenia brzeszczotu

spowodowanego jego własnym ciężarem, choć akurat ten element nie jest tak istotny, gdyż jest łatwy do uwzględnienia w analizie. Pomiar ugięcia  $f$ , długość  $L$  brzeszczotu oraz jego szerokość  $d$  wykonano taśmą mierniczą o najmniejszej działce odczytu 1 mm, grubość  $h$  zaś zmierzono śrubą mikrometryczną o najmniejszej działce odczytu 0,01 mm.

### WYNIKI POMIARÓW I ICH NIEPEWNOŚCI

Wykorzystany w doświadczeniu brzeszczot miał szerokość  $d = 12,5$  mm, przy czym niepewność tej oceny wynosiła  $u_d = 0,58$  mm. Niepewność tę, jak i niepewności wszystkich innych wielkości mierzonych bezpośrednio i jednokrotnie, wyznaczono z dopuszczalnego, maksymalnego błędu  $\Delta$  pomiaru, który, z jednym wyjątkiem wskazanym niżej, przyjęto równym najmniejszej działce odczytu urządzenia, a samą niepewność obliczono ze wzoru:

$$u = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}.$$

Przy pomiarach masy  $m$  uzyskiwano powtarzalność wskazań, dlatego uznano, że efekty statystyczne są zanedbywalne, a dopuszczalny, maksymalny błąd pomiaru przyjęto równym najmniejszej działce, tj. 0,01 g, co dało niepewność standardową  $u_m = 0,0058$  g pomiaru masy. Niepewność  $u_f = 0,58$  mm w pomiarze ugięcia wynikała z najmniejszej działki miarki, czyli 1 mm. Z uwagi na zaokrąglone końce brzeszczotu przyjęto, że dopuszczalny, maksymalny błąd pomiaru jego długości  $L$  nie jest równy najmniejszej działce taśmy mierniczej, tj. 1 mm, lecz wynosi 2 mm, co dało standardową niepewność  $u_L = 1,2$  mm. Pomiar grubości  $h$  brzeszczotu śrubą mikrometryczną wykonano pięciokrotnie, otrzymując wartości:  $h_1 = 0,62$  mm,  $h_2 = 0,61$  mm,  $h_3 = 0,62$  mm,  $h_4 = 0,63$  mm oraz  $h_5 = 0,62$  mm, co daje średnią  $\bar{h} = 0,62$  mm i niepewność

$$u_{\bar{h}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2 + \frac{\Delta_h^2}{3}},$$

gdzie pierwszy składnik, z sumą, to kwadrat statystycznej niepewności średniej arytmetycznej. Samą niepewność średniej otrzymano równą 0,0032 mm, a wartość dopuszczalnego, maksymalnego błędu  $\Delta_h$  pomiaru przyjęto równą 0,01 mm, tj. równą najmniejszej działce śruby mikrometrycznej. Należy zaznaczyć, że mimo cytowanych tu zaokrąglonych, zgodnie z konwencją, wartości niepewności, w obliczeniach wykorzystywano pełną dokładność stosownych wielkości.

Głównym zadaniem części eksperymentalnej była seria pomiarów odchylenia  $f$  dla różnych obciążeń masą  $m$  dla sześciu długości  $L$  brzeszczotu. Uzyskane wyniki przedstawia Tabela 1, a jej zawartość Rysunek 2.

### ANALIZA DANYCH

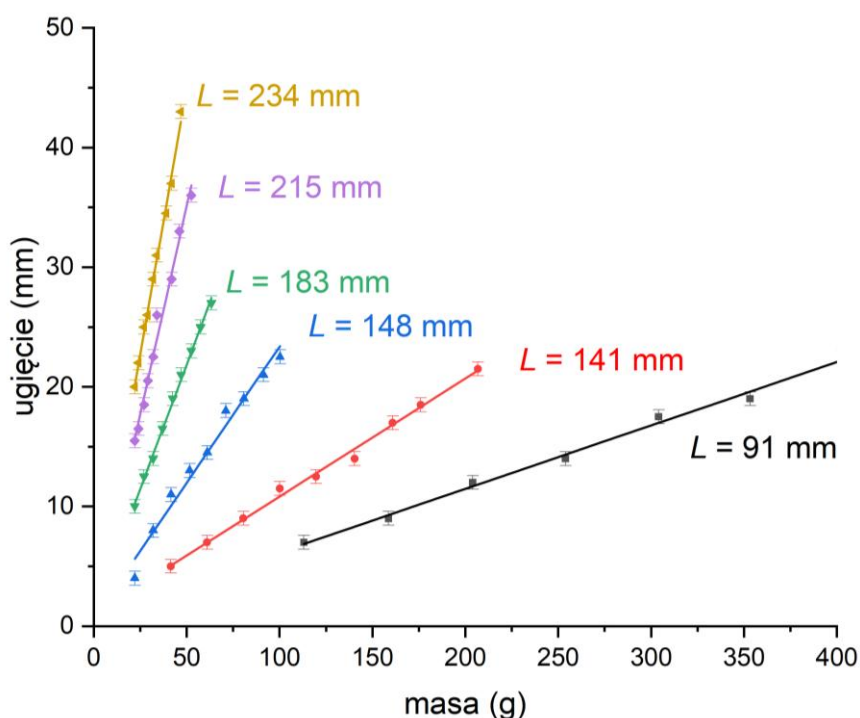
Model (1) ze współczynnikiem sprężystości  $k$  w postaci (2), wskazujący na proporcjonalność między ugięciem  $f$  a masą  $m$ , został poszerzony i do opisu tej zależności wybrano postać z wyrazem wolnym

$$f = Km + b. \quad (3)$$

W ten sposób uzyskano dodatkowy stopień kontroli pomiarów, jako że pomiary ugięcia wykonywano względem górnego, nieugiętego brzeszczotu, a więc ocena parametru  $b$  powinna być zgodna z zerem.

Tabela 1. Wyniki pomiarów ugięcia brzeszczotu

Długość $L$ brzeszczotu [mm]											
91		114		148		183		215		234	
Wartości masy $m$ i ugięcia $f$ dla wskazanej długości $L$ brzeszczotu											
masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]	masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]	masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]	masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]	masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]	masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]
113,11	7,0	41,45	5,0	22,06	4,0	22,06	10,0	22,06	15,5	22,06	20,0
158,69	9,0	61,07	7,0	31,98	8,0	27,07	12,5	24,05	16,5	24,05	22,0
204,00	12,0	80,59	9,0	41,67	11,0	32,00	14,0	27,07	18,5	27,07	25,0
253,92	14,0	100,19	11,5	51,62	13,0	37,00	16,5	29,07	20,5	29,07	26,0
304,04	17,5	119,63	12,5	61,17	14,5	42,57	19,0	31,99	22,5	32,00	29,0
353,21	19,0	140,45	14,0	71,12	18,0	47,00	21,0	34,01	26,0	34,00	31,0
403,14	22,5	160,97	17,0	80,81	19,0	52,51	23,0	41,93	29,0	39,02	34,5
–	–	175,99	18,5	91,37	21,0	57,51	25,0	46,00	33,0	41,93	37,0
–	–	206,78	21,5	100,25	22,5	63,38	27,0	52,51	36,0	46,93	43,0



Rysunek 2. Wyniki pomiarów ugięcia dla różnych długości brzeszczotu wraz z dopasowaniem zależności (3).

Dla każdej z długości  $L$  brzeszczotu metodą najmniejszych kwadratów wyznaczono oceny parametrów  $K$  oraz  $b$ , przyjmując wszystkie identyczne niepewności  $u_f$ , ponieważ wszystkie ugięcia mierzone były tą samą techniką. Rezultat tego dopasowania przedstawia Tabela 2 i proste na Rysunku 2.

Tabela 2. Wyniki dopasowania zależności  $f = Km + b$

$L$ [mm]	$K$ [mm/g]	$b$ [mm]	$\frac{b-0}{u_b}$	$\chi^2$	liczba st. swobody	wartość $p$	$\tilde{u}_f = Ku_m$ [mm]
91	$0,0530 \pm 0,0022$	$0,88 \pm 0,61$	1,44	0,44	5	0,99	0,00013
114	$0,0986 \pm 0,0037$	$0,98 \pm 0,49$	2,00	3,75	7	0,81	0,00057
148	$0,2276 \pm 0,0076$	$0,59 \pm 0,50$	1,18	19,12	7	0,0078	0,00131
185	$0,416 \pm 0,015$	$1,06 \pm 0,64$	1,66	1,87	7	0,97	0,00240
215	$0,697 \pm 0,020$	$0,27 \pm 0,70$	0,39	18,79	7	0,0089	0,00402
234	$0,887 \pm 0,024$	$0,54 \pm 0,82$	0,66	6,26	7	0,51	0,00512

W celu oceny poprawności wyboru zmiennej niezależnej metodą przeniesienia (propagacji) obliczono przyczynkę do niepewności ugięcia  $\tilde{u}_f$  wynikający z niepewności pomiaru masy  $u_m$  pomiaru masy. W Tabeli 2 można zobaczyć, że niepewność  $\tilde{u}_f < u_f$ , więc można uznać, iż masa ciężarków jest znana dokładnie, i można ją wybrać jako zmienną niezależną, a przyjęta wersja dopasowanej zależności modelowej (3) jest zasadna.

Można też uznać, że dla każdej długości brzeszczotu wartości  $\chi^2$  są akceptowalne, gdyż odpowiadające im wartości  $p$  (prawdopodobieństwa błędu pierwszego rodzaju) są większe od 0,003, którą przyjmuje się za akceptowalną np. dla testu  $3\sigma$  i który jesteśmy gotowi przyjąć jako kryterium.

W końcu należy zauważyć, że wszystkie oceny współczynnika  $b$  są zgodne z zerem w ramach co najwyżej dwóch niepewności standardowych. Oznacza to, że w zależności (3) można porzucić wyraz wolny i ponownie przeprowadzić dopasowanie, tym razem zależności z jednym tylko parametrem:

$$f = km, \quad (4)$$

a więc bardziej restrykcyjnej, pozostawiającej mniej swobody na ukrycie błędów pomiarowych, tym samym dostarczającej silniejszego testu słuszności prawa Hooke'a. Wynik tego dopasowania przedstawia Tabela 3.

Tabela 3. Wyniki dopasowania zależności  $f = km$

$L$ [mm]	$k$ [mm/g]	$u_k$ [mm/g]	$\chi^2$	liczba st. swobody	$\hat{\chi}^2$	wartość $p$
91	0,05599	0,00080	5,02	6	0,84	0,54
114	0,1054	0,0015	7,81	8	0,98	0,48
148	0,2359	0,0029	20,50	8	2,56	0,0086
185	0,4386	0,0043	4,56	8	0,57	0,80
215	0,7040	0,0054	18,94	8	2,37	0,015
234	0,9024	0,0057	6,68	8	0,84	0,57

Ponieważ zmiany ocen współczynników nachylenia są na poziomie kilku procent, więc i niepewności  $\tilde{u}_f$  ugięcia indukowane niepewnościami masy pozostają istotnie mniejsze niż niepewności pomiarowe tegoż ugięcia, dlatego też i tym razem można stwierdzić, *post factum*, stosowność wybranej zmiennej niezależnej. Wartości  $\chi^2$  pozostają akceptowalne – wszystkie otrzymane wartości  $p$  są większe od 0,003, którą przyjmuje się za akceptowalną wartość prawdopodobieństwa błędu pierwszego rodzaju np. dla testu  $3\sigma$ . Zauważmy jednak bardzo znaczące zmniejszenie niepewności ocen parametru  $k$ , co jest konsekwencją bardziej restrykcyjnego modelu.

## MODUŁ YOUNGA STALI NARZĘDZIOWEJ - PRZYKŁADOWY RAPORT

Związek (2) wyznacza sześcienną zależność między współczynnikiem proporcjonalności  $k$  w prawie Hooke'a a długością  $L$  brzeszczotu. Aby zweryfikować tę zależność, stosując odpowiednią zamianę zmiennych, została ona sprowadzona do zależności liniowej

$$\ln k = A \ln L + B, \quad (5)$$

gdzie  $A = 3$  oraz  $B = \ln\left(\frac{4g}{Edh^3}\right)$ .

Słuszność wyboru zmiennej niezależnej weryfikujemy porównując niepewności  $\ln k$  wynikające z dopasowania zależności (4)  $u_{\ln k}$  z niepewnościami wynikającymi z przeniesienia niepewności pomiaru długości brzeszczotu  $\tilde{u}_{\ln k} = 3u_{\ln L}$  przy założeniu zgodności prawa Hooke'a tzn. przyjmując  $A = 3$ . Obliczone wartości logarytmów wraz z ich niepewnościami dla każdej z długości brzeszczotu zamieszczono w Tabeli 4.

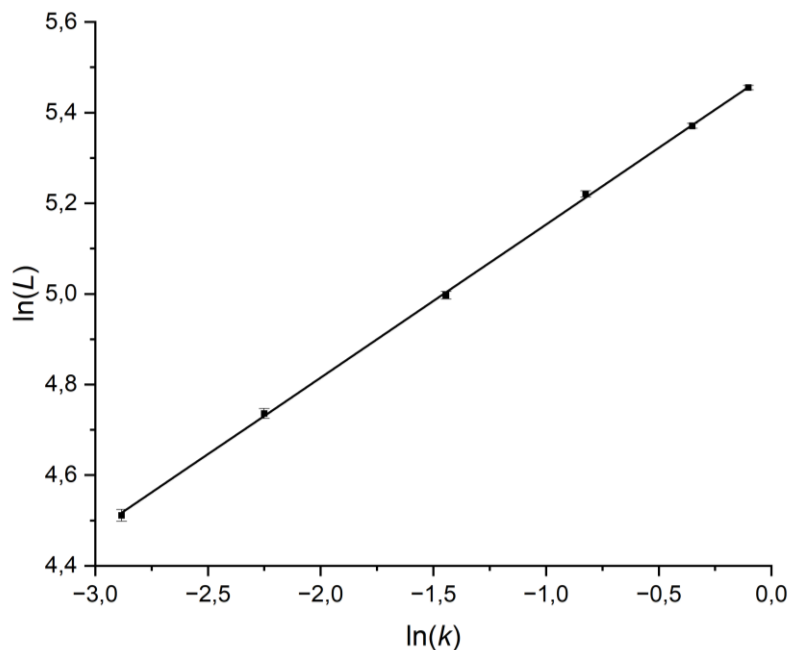
Tabela 4. Zamiana zmiennych z zależności (2) na (4)

$L$ [mm]	$\ln L$	$u_{\ln L} = \frac{u_L}{L}$	$\ln k$	$u_{\ln k} = \frac{u_k}{k}$	$\tilde{u}_{\ln k} = 3u_{\ln L}$
91	4,511	0,013	-2,883	0,014	0,040
114	4,736	0,011	-2,250	0,014	0,032
148	4,9972	0,0081	-1,444	0,012	0,024
185	5,2204	0,0065	-0,8242	0,0098	0,019
215	5,3706	0,0056	-0,3510	0,0077	0,017
234	5,4553	0,0051	-0,1027	0,0063	0,015

Ponieważ dla wszystkich długości  $\tilde{u}_{\ln k} > u_{\ln k}$ , więc zmienną niezależną powinna być  $\ln k$ , a dopasowywaną zależnością

$$\ln L = C \ln k + D, \quad (6)$$

gdzie  $C = \frac{1}{3}$  oraz  $D = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{Edh^3}{4g}\right)$ .



Rysunek 3. Relacja między współczynnikiem sprężystości i długością brzeszczotu wraz z dopasowaną zależnością (6).

Słuszność modelowej zależności (2) sprawdzamy, weryfikując linowy charakter zależności (6) i zgodność uzyskanej oceny parametru  $C$  z wartością  $1/3$ . Weryfikację tę przeprowadzamy prowadząc dopasowanie metodą najmniejszych kwadratów. Wyniki dopasowania przedstawiono na Rysunku 3, a uzyskane wartości oceny parametrów dopasowania wynoszą:

$$C = 0,3379 \pm 0,0035,$$

$$D = 5,4912 \pm 0,0036.$$

Wartość  $\chi^2$  dopasowania wynosi  $\chi^2 = 2,77$ , co odpowiada wartości zredukowanej równej  $\hat{\chi}^2 = 0,69$  oraz wartości  $p = 0,597$ . Ponieważ  $\hat{\chi}^2 < 1$  oraz wartość  $p$  jest dużo większa niż zwykle przyjmowane dopuszczalne wartości błędu pierwszego rodzaju, nie ma podstaw aby uznać, że dopasowany model nie jest zgodny z danymi.

Wykorzystanie wartości  $g = 981,23 \text{ cm/s}^2$ , uznanej za wartość bezbłędną, przyspieszenia ziemskiego w Warszawie [2] pozwala, ze znajomości oceny parametru  $D$ , wyznaczyć ocenę

$$E = \frac{4g}{ah^3} \exp(3D) = (188 \pm 11) \text{ GPa}$$

modułu Younga materiału, z którego wykonano brzeszczot.

### DYSKUSJA WYNIKÓW I WNIOSKI

Pomiary ugięcia brzeszczotu prowadzono poczynając od jego największej długości, stopniowo skracając ją w każdym kroku. Po każdym pomiarze ugięcia sprawdzano, czy po zdjęciu obciążenia brzeszczot wraca do pozycji początkowej i za każdym razem potwierdzano takie zachowanie. Oceny parametru  $b$  we wzorze (3) nie wykazują żadnej systematycznej zmiany wskazującej na deformacje brzeszczotu, a wartości minimalnej, ważonej sumy kwadratów reszt pozwalają na podsumowaniem tej części analizy stwierdzeniem o braku sprzeczności prawa Hooke'a z danymi uzyskanymi z pomiarów ugięć brzeszczotu.

Niewysoka wartość  $\chi^2$  w dopasowaniu zależności między logarytmami długości brzeszczotu i współczynnika sprężystości jednoznacznie wskazuje na potęgową zależność między tym współczynnikiem a długością, natomiast zgodność oceny parametru  $C$  z wartością  $1/3$  na poziomie poniżej półtorojej niepewności standardowej, potwierdza modelową, sześcienną zależność  $k = cL^3$ , ze stałą wartością  $c$ . Wyznaczona w tym podejściu ocena  $E = (188 \pm 11) \text{ GPa}$  modułu Younga zgadza się, w ramach jednej do dwóch niepewności standardowych, ze znaną wartością [3], wynoszącą od 200 GPa do 210 GPa dla stali po obróbce termomechanicznej.

Najwięcej trudności w eksperymencie sprawiał pomiar ugięcia brzeszczotu. Wykonywany był „z ręki” i wymagał wiele uwagi i cierpliwości, aby jednocześnie przykładając miarkę do obu brzeszczotów nie zaburzyć ich wzajemnej odległości. Szczególnie dobitnie widać to dla danych uzyskanych przy długości brzeszczotu  $L = 148 \text{ cm}$  (w pomiarach przy  $L = 215 \text{ cm}$  jest faktycznie jeden punkt, który wiedzie do dużej sumy kwadratów reszt). Można sądzić, że wszelki następny identyczny eksperyment winien uprzednio skoncentrować się na ulepszeniu tej części pomiarów.

### LITERATURA

- [1] Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna, część I, Mechanika i akustyka*, PWN, Warszawa, 1972, s. 407.
- [2] H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1994, s. 529.
- [3] *Encyklopedia fizyki*, tom II, tabele na stronach: 297, 402 i 764, PWN, Warszawa, 1974.



**Ćwiczenie nr XXX**  
**MODUŁ YOUNGA STALI NARZĘDZIOWEJ**  
**A.R. Hoferwak**

**ANALIZA DANYCH**

**A. Sprawdzenie słuszności prawa Hooke’a**

Tabela 1. Wyniki pomiarów ugięcia brzeszczotu

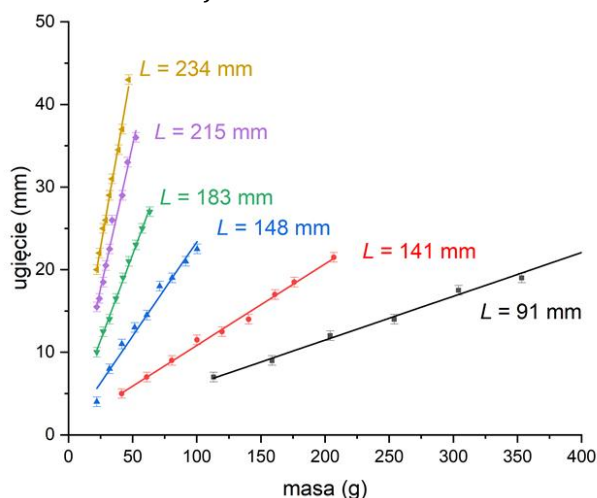
Długość $L$ brzeszczotu [mm]											
91		114		148		183		215		234	
Wartości masy $m$ i ugięcia $f$ dla wskazanej długości $L$ brzeszczotu											
masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]	masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]	masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]	masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]	masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]	masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]
113,11	7,0	41,45	5,0	22,06	4,0	22,06	10,0	22,06	15,5	22,06	20,0
158,69	9,0	61,07	7,0	31,98	8,0	27,07	12,5	24,05	16,5	24,05	22,0
204,00	12,0	80,59	9,0	41,67	11,0	32,00	14,0	27,07	18,5	27,07	25,0
253,92	14,0	100,19	11,5	51,62	13,0	37,00	16,5	29,07	20,5	29,07	26,0
304,04	17,5	119,63	12,5	61,17	14,5	42,57	19,0	31,99	22,5	32,00	29,0
353,21	19,0	140,45	14,0	71,12	18,0	47,00	21,0	34,01	26,0	34,00	31,0
403,14	22,5	160,97	17,0	80,81	19,0	52,51	23,0	41,93	29,0	39,02	34,5
–	–	175,99	18,5	91,37	21,0	57,51	25,0	46,00	33,0	41,93	37,0
–	–	206,78	21,5	100,25	22,5	63,38	27,0	52,51	36,0	46,93	43,0

- Przyjęte niepewności pomiarowe:

$$u_m = 0,0058 \text{ g}, \quad u_f = 0,58 \text{ mm}, \quad u_L = 1,2 \text{ mm}.$$

- Dopasowywana zależność modelowa:

$$f = Km + b. \tag{1}$$



Rysunek 1. Wyniki pomiarów ugięcia dla różnych długości brzeszczotu wraz z dopasowaniem zależności (1)

Tabela 2. Wyniki dopasowania zależności (1)

$L$ [mm]	$K$ [mm/g]	$b$ [mm]	$\frac{b-0}{u_b}$	$\chi^2$	liczba st. swobody	wartość $p$	$\tilde{u}_f = Ku_m$ [mm]
91	$0,0530 \pm 0,0022$	$0,88 \pm 0,61$	1,44	0,44	5	0,99	0,00013
114	$0,0986 \pm 0,0037$	$0,98 \pm 0,49$	2,00	3,75	7	0,81	0,00057
148	$0,2276 \pm 0,0076$	$0,59 \pm 0,50$	1,18	19,12	7	0,0078	0,00131
185	$0,416 \pm 0,015$	$1,06 \pm 0,64$	1,66	1,87	7	0,97	0,00240
215	$0,697 \pm 0,020$	$0,27 \pm 0,70$	0,39	18,79	7	0,0089	0,00402
234	$0,887 \pm 0,024$	$0,54 \pm 0,82$	0,66	6,26	7	0,51	0,00512

- Dla wszystkich długości brzeszczotu  $\tilde{u}_f < u_f$ , więc wybór masy jako zmiennej niezależnej był zasadny.
- Dla każdej długości brzeszczotu wartości  $\chi^2$  są akceptowalne, gdyż odpowiadające im wartości  $p$  (prawdopodobieństwa błędu pierwszego rodzaju) są większe od 0,003, którą przyjmuje się za akceptowalną np. dla testu  $3\sigma$ .
- Wszystkie oceny współczynnika  $b$  są zgodne z zerem w ramach co najwyżej dwóch niepewności standardowych, stąd kolejne dopasowanie zależności postaci

$$f = km. \quad (2)$$

Tabela 3. Wyniki dopasowania zależności (2)

$L$ [mm]	$k$ [mm/g]	$u_k$ [mm/g]	$\chi^2$	liczba st. swobody	$\hat{\chi}^2$	wartość $p$
91	0,05599	0,00080	5,02	6	0,84	0,54
114	0,1054	0,0015	7,81	8	0,98	0,48
148	0,2359	0,0029	20,50	8	2,56	0,0086
185	0,4386	0,0043	4,56	8	0,57	0,80
215	0,7040	0,0054	18,94	8	2,37	0,015
234	0,9024	0,0057	6,68	8	0,84	0,57

- Zmiany ocen współczynników nachylenia są na poziomie kilku procent, więc i niepewności  $\tilde{u}_f$  ugięcia indukowane niepewnościami masy pozostają istotnie mniejsze niż niepewności pomiarowe ugięcia, co dowodzi poprawności wyboru zmiennej niezależnej.
- Wartości  $\chi^2$  pozostają akceptowalne, tzn. wszystkie otrzymane wartości  $p$  są tak jak poprzednio większe od 0,003.

### B. Sprawdzenie modelowej zależności współczynnika sprężystości od długości brzeszczotu

- Sprobadzenie zależności

$$k = \frac{4L^3 g}{Edh^3} \quad (3)$$

do zależności liniowej:

$$\ln k = A \ln L + B, \quad (4)$$

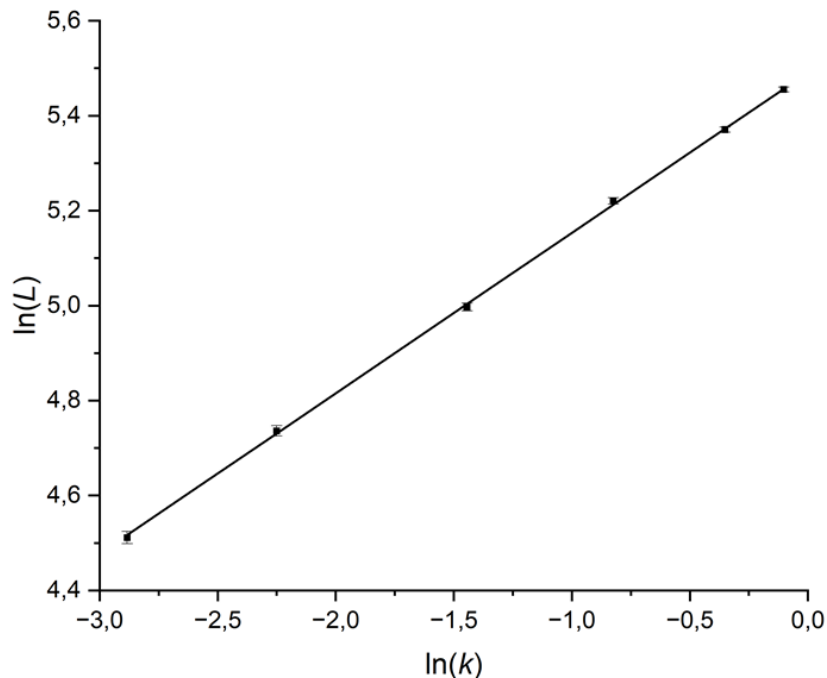
gdzie  $A = 3$  oraz  $B = \ln\left(\frac{4g}{Edh^3}\right)$

Tabela 4. Zamiana zmiennych z zależności (3) na (4)

$L$ [mm]	$\ln L$	$u_{\ln L} = \frac{u_L}{L}$	$\ln k$	$u_{\ln k} = \frac{u_k}{k}$	$\tilde{u}_{\ln k} = 3u_{\ln L}$
91	4,511	0,013	-2,883	0,014	0,040
114	4,736	0,011	-2,250	0,014	0,032
148	4,9972	0,0081	-1,444	0,012	0,024
185	5,2204	0,0065	-0,8242	0,0098	0,019
215	5,3706	0,0056	-0,3510	0,0077	0,017
234	5,4553	0,0051	-0,1027	0,0063	0,015

- $\tilde{u}_{\ln k} > u_{\ln k}$ , więc zmienną niezależną powinna być  $\ln k$ , a dopasowywaną zależnością  $\ln L = C \ln k + D$ , (5)

gdzie  $C = \frac{1}{3}$  oraz  $D = \frac{1}{3} \ln \left( \frac{Edh^3}{4g} \right)$ .



Rysunek 2. Zależność  $\ln L$  ( $\ln k$ ) oraz dopasowanie zależności (5)

- Wynik dopasowania zależności (5):

$$C = 0,3379 \pm 0,0035$$

$$D = 5,4912 \pm 0,0036$$

$$\chi^2 = 2,77$$

$$\hat{\chi}^2 = 0,69$$

$$\text{wartość } p = 0,597.$$

- $\hat{\chi}^2 \ll 1$  oraz wartość  $p$  jest dużo większa niż zwykle przyjmowane dopuszczalne wartości błędu pierwszego rodzaju, więc nie ma podstaw aby uznać, że dopasowany model nie jest zgodny z danymi.

**C. Wyznaczenie oceny modułu Younga**

Tabela 5. Wyniki pomiaru grubości  $h$  oraz szerokości  $d$  brzeszczotu oraz wyznaczona średnia wartość grubości  $\bar{h}$  wraz z jej niepewnością  $u_{\bar{h}}$ , dokładność pomiaru  $h$  przyjęto  $\Delta_h = 0,01$  mm.

$h$ [mm]	$\bar{h}$ [mm]	$s_{\bar{h}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2}$ [mm]	$u_{\bar{h}} = \sqrt{s_{\bar{h}}^2 + \frac{1}{3} \Delta_h^2}$ [mm]	$d$ [mm]	$u_d$ [mm]
0,62 0,61 0,62 0,63 0,62	0,620	0,0032	0,007	12,5	0,58

- Wartość przyjętego przyspieszenia ziemskiego w Warszawie [1]:

$$g = 981,23 \text{ cm/s}^2$$

- Obliczona wartość modułu Younga:

$$E = \frac{4g}{dh^3} \exp(3D) = (188 \pm 11) \text{ GPa.}$$

**DYSKUSJA WYNIKÓW I WNIOSKI**

- Oceny parametru  $b$  we wzorze (1) nie wykazują żadnej systematycznej zmiany wskazującej na deformacje brzeszczotu, a wartości  $\chi^2$  pozwalają na wnioskowanie o braku sprzeczności prawa Hooke’a z danymi uzyskanymi z pomiarów ugięć brzeszczotu.
- Niewysoka wartość  $\chi^2$  w dopasowaniu zależności (5) jednoznacznie wskazuje na potęgową zależność między tym współczynnikiem a długością, natomiast zgodność oceny parametru  $C$  z wartością  $1/3$  na poziomie poniżej półtorojej niepewności standardowej, potwierdza modelową, sześcienną zależność  $k = cL^3$ , ze stałą wartością  $c$ . Wyznaczona w tym podejściu ocena  $E = (188 \pm 11) \text{ GPa}$  modułu Younga zgadza się, w ramach jednej do dwóch niepewności standardowych, ze znaną wartością [2], wynoszącą od 200 GPa do 210 GPa dla stali po obróbce termomechanicznej.
- Najwięcej trudności w eksperymencie sprawiał pomiar ugięcia brzeszczotu. Wykonywany był „z ręki” i wymagał wiele uwagi i cierpliwości, aby jednocześnie przykładając miarkę do obu brzeszczotów nie zaburzyć ich wzajemnej odległości. Szczególnie dobitnie widać to dla danych uzyskanych przy długości brzeszczotu  $L = 148$  cm (w pomiarach przy  $L = 215$  cm jest faktycznie jeden punkt, który wiedzie do dużej sumy kwadratów reszt). Można sądzić, że wszelki następny identyczny eksperyment winien uprzednio skoncentrować się na ulepszeniu tej części pomiarów.

LITERATURA:

[1] H. Szydłowski, Pracownia fizyczna, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1994, s. 529.  
 [2] Encyklopedia fizyki, tom II, tabele na stronach: 297, 402 i 764, PWN, Warszawa, 1974.