

ZADANIE 06

WYZNACZENIE OGNISKOWEJ SOCZEWKI I UKŁADU SOCZEWEK

I. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z podstawowymi prawami optyki geometrycznej, zjawiskiem załamania światła w materiałach oraz tworzeniem obrazów rzeczywistych i urojonych przez układy soczewek. W doświadczeniu wyznacza się ogniskową soczewki skupiającej trzema metodami: metodą bezpośrednią z równania soczewki, metodą powiększeń obrazu oraz metodą Bessela oraz ogniskową zastępczą układu dwóch soczewek.

II. Wprowadzenie

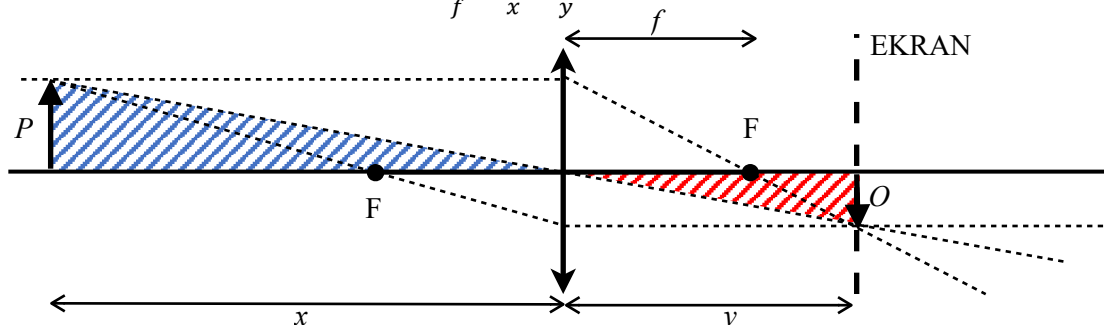
Soczewką optyczną nazywamy ciało przezroczyste ograniczone dwiema powierzchniami załamującymi (kulistymi, cylindrycznymi lub płaskimi), z których przynajmniej jedna jest zakrzywiona. Ze względu na kształt i właściwości skupiające soczewki dzielimy na skupiające oraz rozpraszające. Podstawową wielkością charakteryzującą soczewkę jest jej ogniskowa f , czyli odległość ogniska F od środka optycznego soczewki. Ognisko soczewki to punkt przestrzeni, w którym po przejściu przez soczewkę zbiegają się promienie światła które biegły równoległe do jej osi optycznej. Odwrotność ogniskowej określa zdolność skupiającą soczewki

$$D = \frac{1}{f}.$$

Jednostką zdolności skupiającej w układzie SI jest dioptria [$D = \text{m}^{-1}$]. Dla soczewek skupiających $D > 0$, natomiast dla rozpraszających $D < 0$.

Dla cienkiej soczewki relację pomiędzy odległością przedmiotu od soczewki (x), odległością ostro odwzorowanego obrazu od soczewki (y) a ogniskową (f) opisuje podstawowe równanie soczewkowe:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. \quad (1)$$



Rysunek 1, schemat pokazujący położenie przedmiotu (P), soczewki o ogniskowej f oraz obrazu przedmiotu O . Ognisko soczewki oznaczono jako F . Liniami przerywanymi zaznaczono bieg promieni światła. Odległości między soczewką a przedmiotem i obrazem (odpowiednio x i y) wiąże z długością ogniskowej f wzór (1).

Powiększeniem poprzecznym obrazu p nazywamy stosunek wysokości obrazu O do wysokości przedmiotu P . Z podobieństwa trójkątów (rys. 1) na drodze promieni optycznych wynika:

$$p = \frac{O}{P} = \frac{y}{x}.$$

Podstawiając zależność $y = x \frac{O}{P}$ do równania soczewkowego (1), otrzymujemy wyrażenie na ogniskową wyznaczaną metodą powiększeń:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{P}{O} \right). \quad (2)$$

Charakter powstałego obrazu zależy od położenia przedmiotu x względem ogniska F . W szczególności dla:

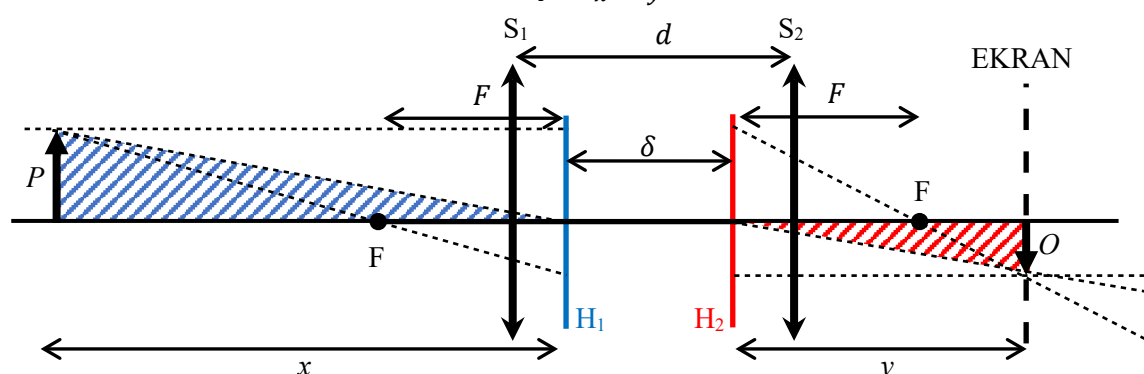
- $x > 2f$ powstaje obraz **rzeczywisty, odwrócony i pomniejszony**.
- $x = 2f$ powstaje obraz **rzeczywisty, odwrócony i tej samej wielkości**, a odległość obrazu wynosi $y = 2f$.
- $f < x < 2f$ powstaje obraz **rzeczywisty, odwrócony i powiększony**. Jest to zakres wykorzystywany m.in. w projektorach czy mikroskopach.
- $x = f$ obraz powstaje w nieskończoności ($y \rightarrow \infty$) – wiązka światła po przejściu przez soczewkę staje się równoległa (przypadek afokalny dla pojedynczego elementu).
- $x < f$ powstaje obraz **pozorny, prosty (nieodwrócony) i powiększony** ($y < 0$). Soczewka działa wtedy jako lupa.

O ile w przypadku pojedynczej cienkiej soczewki przyjmujemy, że załamanie promienia następuje w jej geometrycznym środku, gdy układ składa się z dwóch oddalonych soczewek zachowuje się on jak tzw. gruby układ optyczny. Zgodnie z opisem optyki gaussowskiej, działającym w przybliżeniu przyosiowym, złożony układ załamujący można wymiarowo zastąpić dwiema wymagowanymi płaszczyznami głównymi (przedmiotową H_1 i obrazową H_2), prostopadłymi do osi optycznej, a całe załamanie światła wewnątrz układu można matematycznie traktować tak, jakby zachodziło natychmiastowo pomiędzy tymi dwoma płaszczyznami. Płaszczyzny główne to płaszczyzny sprzężone o powiększeniu poprzecznym równym $+1$, tzn. promień wpadający do układu na wysokości h na pierwszej płaszczyźnie głównej H_1 „wychodzi” z drugiej płaszczyzny głównej H_2 na tej samej wysokości h .

Gdy:

- odległość przedmiotu (x) określimy jako odległość od pierwszej płaszczyzny głównej H_1 do przedmiotu,
 - odległość obrazu (y) jako odległość od drugiej płaszczyzny głównej H_2 do obrazu, zaś
 - ogniskową przedmiotową (F) jako odległość od pierwszej płaszczyzny głównej H_1 do ogniska od strony przedmiotu lub od drugiej płaszczyzny głównej H_2 do ogniska od strony obrazu,
- to dla źródła punktowego w przybliżeniu paraosiowym, równanie soczewki przyjmuje dokładnie taką samą, prostą postać jak dla cienkiej soczewki:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. \quad (3)$$



Rysunek 2, schemat ukazujący położenie przedmiotu (P), układu dwóch soczewek skupiających (S_1 i S_2) o wypadkowej ogniskowej F oraz obrazu przedmiotu O . Ognisko soczewki oznaczono jako F , płaszczyzny główne jako H_1 i H_2 . Odległość między soczewkami oznaczono jako d , natomiast płaszczyzn głównych jako δ . Liniami przerywanymi zaznaczono bieg promieni światła w opisie optyki gaussowskiej. Odległości między płaszczyznami głównymi a przedmiotem i obrazem (odpowiednio x i y) wiąże z długością wypadkowej ogniskowej F wzór (3).

Warto przy tym zauważyć, że np. w przypadku układu składającego się z dwóch cienkich soczewek, odległość między płaszczyznami głównymi (δ) nie jest równa fizycznej odległości między soczewkami d a samo wyznaczanie dokładnego położenia płaszczyzn głównych H_1 i H_2 w praktyce eksperymentalnej bywa kłopotliwe.

Opis układu dwóch cienkich soczewek znacząco się upraszcza, gdy wypadkową ogniskową F wyrazi się bezpośrednio przez znane ogniskowe poszczególnych soczewek (f_1 oraz f_2) oraz fizyczną odległość między nimi (d). Zgodnie z optyką Gaussowską, uwzględnienie skończonego dystansu d , jaki przebywa promień światła pomiędzy kolejnymi załamaniami, prowadzi do równania Gullstranda:

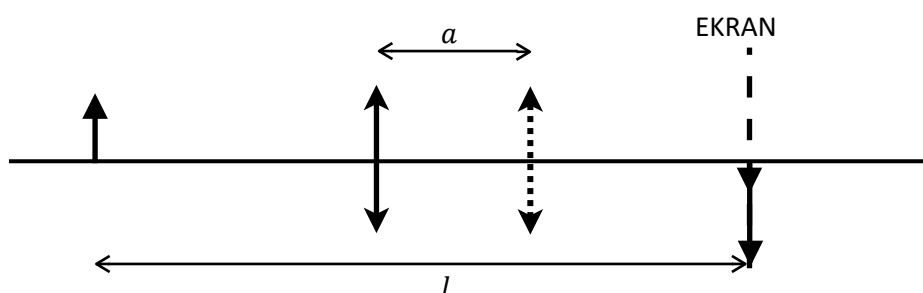
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}. \quad (4)$$

Wprowadzona we wzorze poprawka $-d/(f_1 f_2)$ odzwierciedla spadek wypadkowej zdolności skupiającej układu wraz ze wzrostem odstępów między soczewkami d . Gdy dwie soczewki stykają się ze sobą ($d = 0$), ich zdolności skupiające po prostu się dodają ($D = D_1 + D_2 \Leftrightarrow 1/F = 1/f_1 + 1/f_2$), jednak gdy odsuniemy soczewki od siebie promień światła po przejściu przez pierwszą soczewkę ulega załamaniu i zaczyna zbiegać się (lub rozbiegać). Pokonując dystans d w przestrzeni między soczewkami, promień trafia w drugą soczewkę na innej wysokości niż trafił w pierwszą. Człon $-d/(f_1 f_2)$ uwzględnia właśnie ten „dystans swobodnego przebiegu” promienia, który zmienia kąt i wysokość wiązki światła przed drugim załamaniem.

Wyznaczona ze wzoru (4) ogniskowa układu dwóch soczewek $F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d}$ tłumaczy zachowanie wielu przyrządów optycznych. Na przykład gdy odległość między soczewkami zrówna się z sumą ich ogniskowych ($d = f_1 + f_2$) $F \rightarrow \infty$, tzn. układ staje się afokalny. Wiązka światła równoległego wpadająca do układu opuszcza go również jako wiązka równoległa co jest wykorzystywane w lunetach czy teleskopach. Teleobiektywy fotograficzne pozwalają uzyskać bardzo długą ogniskową F przy zachowaniu fizycznie krótkiej obudowy obiektywu, stosując zestaw soczewki skupiającej ($f_1 > 0$) i rozpraszającej ($f_2 < 0$) oddalonych od siebie o d .

Metoda Bessela

Metoda Bessela wyznaczenia ogniskowej soczewki polega na uniezależnieniu pomiaru od bezpośredniego wyznaczania środka optycznego soczewki. Jeżeli odległość między przedmiotem a ekranem jest stała i wynosi l , wówczas $x + y = l$.



Rysunek 3, schemat układu do pomiaru ogniskowej soczewki metodą Bessela. Odległość od siebie o a strzałki oznaczają położenie soczewek dla ostrych obrazów.

Równanie soczewkowe przyjmie wówczas postać

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} = \frac{l}{x(l-x)}.$$

Otrzymujemy więc równanie kwadratowe

$$x^2 - lx + fl = 0,$$

które dla warunku $\Delta = l^2 - 4fl > 0 \Leftrightarrow l > 4f$ daje nam dwa rozwiązania

$$x_{1,2} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4fl}}{2}.$$

Niech a oznacza odległość pomiędzy tymi dwoma położeniami soczewki. Wówczas

$$a = x_2 - x_1 = \frac{l + \sqrt{l^2 - 4fl}}{2} - \frac{l - \sqrt{l^2 - 4fl}}{2} = \sqrt{l^2 - 4fl}.$$

Stąd możemy wyznaczyć ogniskową soczewki

$$f = \frac{l^2 - a^2}{4l}. \quad (5)$$

Jeżeli więc stała odległość między przedmiotem a ekranem wynosi l i spełnia warunek $l > 4f$, to istnieją dokładnie dwa położenia soczewki, dla których na ekranie powstaje ostry obraz przedmiotu: jedno położenie daje obraz powiększony, a drugie pomniejszony. Na podstawie pomiaru odległości przedmiotu od ekranu (obrazu) oraz odległości przesunięcia soczewki pomiędzy tymi dwoma położeniami ze wzoru (5) można wyznaczyć ogniskową soczewki.

Metoda Bessela umożliwia również wyznaczenie rzeczywistej wysokości przedmiotu P na podstawie pomiaru wysokości obrazu powiększonego O_1 oraz obrazu pomniejszonego O_2 :

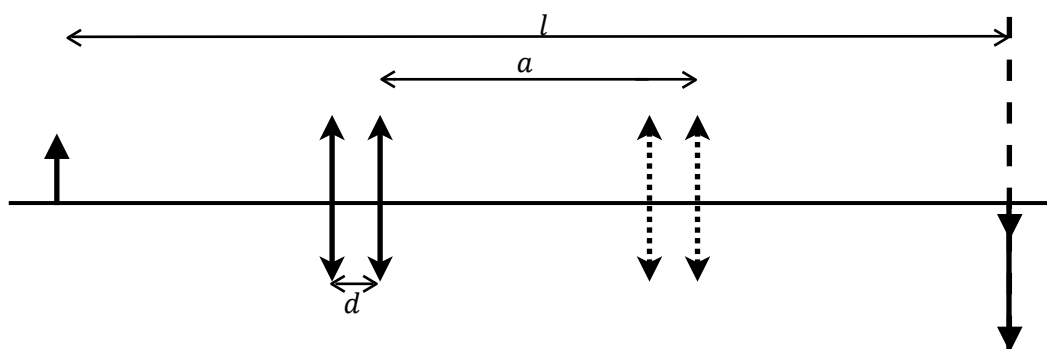
$$P = \sqrt{O_1 O_2} \quad (6)$$

Wtedy powiększenia obrazu w obu położeniach wynoszą odpowiednio: $p_1 = O_1/P = \sqrt{O_1/O_2}$ oraz $p_2 = O_2/P = \sqrt{O_2/O_1}$.

Gdy metodę Bessela stosujemy do układu dwóch soczewek o stałym wzajemnym odstępzie d , przesuujemy cały układ jako jedną sztywną całość o odległość a na ławie optycznej. W takim przypadku odległości x oraz y mierzone są nie od pojedynczego środka soczewki, lecz od odpowiednich płaszczyzn głównych (H_1 i H_2). Całkowita odległość między przedmiotem a ekranem przyjmuje postać:

$$l = x + y + \delta,$$

gdzie δ jest odległością między płaszczyznami głównymi H_1 i H_2 . Ponieważ płaszczyzny główne są do siebie równoległe i przesuują się wraz z całym układem o ten sam dystans a , efektywny dystans optyczny dostępny dla obrazowania wynosi $l - \delta$. Dla układu dwóch cienkich soczewek, przy niedużych odstępach d , wielkość δ jest bardzo bliska wartości d w porównaniu do odległości obrazowania, więc $l - \delta \approx l - d$.



Rysunek 4, schemat układu do wyznaczenia ogniskowej układu dwóch soczewek z wykorzystaniem metody Bessela.

Uwzględniając tę korektę, wzór (5) na wypadkową ogniskową układu F przyjmuje zmodyfikowaną postać:

$$F = \frac{(l-d)^2 - a^2}{4(l-d)}. \quad (7)$$

III. Wykonanie pomiarów

III.1. Wyposażenie

Masz do dyspozycji:

- ławę optyczną z podziałką;
- zestaw soczewek;
- wyświetlacz do projekcji przedmiotu;
- ekran;
- suwmiarkę.

III.2. Planowanie pomiarów

Przed rozpoczęciem właściwych serii pomiarowych należy przeprowadzić obserwację jakościową charakteru powstającego obrazu w zależności od położenia przedmiotu względem ogniskowej soczewki. Należy zbadać następujące przypadki:

1. $x = f$: Obraz powstaje w nieskończoności (brak obrazu na ekranie, wiązka równoległa).
2. $f < x < 2f$: Obraz rzeczywisty, odwrócony, powiększony.
3. $x = 2f$: Obraz rzeczywisty, odwrócony, tej samej wielkości ($p = 1$).
4. $x > 2f$: Obraz rzeczywisty, odwrócony, pomniejszony.
5. $x < f$: Obraz urojony, prosty, powiększony (obserwacja bezpośrednio przez soczewkę).

III.3. Wykonanie ćwiczenia

A. Wyznaczanie ogniskowej pojedynczej soczewki skupiającej

Metoda wzoru soczewkowego i powiększeń:

- Ustaw podświetlany przedmiot oraz ekran na ławie optycznej.
- Używając suwmiarki zmierz wysokość przedmiotu P .
- Wybierz z dostępnego zestawu jedną z soczewek skupiających o znanej ogniskowej i zamontuj ją na ławie optycznej.
- Zweryfikuj położenie ogniska soczewki na dwa sposoby: ustawiając przedmiot w dużej odległości od soczewki (promienie prawie równoległe) i znajdując położenie ostrego obrazu na ekranie (odległość soczewka-ekran powinna odpowiadać ogniskowej) oraz ustawiając przedmiot w odległości równej ogniskowej soczewki i sprawdzając, że na ekranie nie powstaje ostry obraz (promienie po przejściu przez soczewkę biegną równoległe, tzn. w tym przypadku brak możliwości uzyskania ostrego obrazu potwierdza poprawne wyznaczenie położenia ogniska).
- Przesuń przedmiot z położenia ogniskowej, znajdź położenie ekranu y zapewniające optymalną ostrość obrazu i zapisz zmierzone wartości x i y .
- Używając suwmiarki zmierz wysokość ostrego obrazu O na ekranie.
- Wykonaj kilkukrotne pomiary bez zmiany odległości przedmiotu od soczewki, za każdym razem od nowa szukając idealnej ostrości obrazu na ekranie.
- Wykonaj pomiary dla kilku różnych odległości przedmiotu od soczewki, obejmujących różne charaktery powstającego obrazu.

Metoda Bessela:

- Ustaw stałą odległość między przedmiotem a ekranem l większą od $4f$ (np. 80 cm – 100 cm). Odczytaj l z podziałki ławy.
- Przesuwając soczewkę od przedmiotu w stronę ekranu, znajdź pierwsze położenie y_1 odpowiadające ostremu obrazowi powiększonemu. Używając suwmiarki zmierz wysokość obrazu O_1 .
- Przesuwaj soczewkę dalej w stronę ekranu, odnajdując drugie położenie y_2 z ostrym obrazem pomniejszonym. Używając suwmiarki zmierz wysokość obrazu O_2 .
- Nie zmieniając odległości l , wykonaj kilkukrotne pomiary, za każdym razem od nowa szukając idealnej ostrości obrazu powiększonego i pomniejszonego na ekranie.

- Powtórz procedurę dla kilku różnych wartości odległości l .
- **B. Wyznaczanie ogniskowej układu dwóch soczewek skupiających**
- Wybierz dwie soczewki skupiające o znanych ogniskowych f_1 oraz f_2 i zamontuj je na ławie w ustalonej odległości d od siebie.
- Przeprowadź pomiary ogniskowej układu F przy użyciu metody Bessela wg zmodyfikowanego wzoru (7) dbając aby w trakcie przesuwania układu soczewek zachować ich odległość od siebie.
- Nie zmieniając odległości l , wykonaj kilkukrotne pomiary, za każdym razem od nowa szukając idealnej ostrości obrazu powiększonego i pomniejszonego na ekranie.
- Wykonaj pomiary dla kilku różnych odległości l .

IV. Analiza wyników pomiarów

1. Ustal realistyczne, niepewności pomiarowe wielkości bezpośrednio mierzonych uwzględniając zarówno niepewności typu A (statystycznej, uzyskanej bezpośrednio z eksperymentu) jak i niepewności typu B (systematycznej, np. dokładności działki elementarnej czy błędu paralaksy).
2. Zaproponuj sposób wyznaczenia ogniskowej soczewki na podstawie wykonanych przez Ciebie pomiarów korzystając ze wzoru soczewkowego (1), ze wzoru wykorzystującego powiększenie obrazu (2) oraz metodą Bessela (5).
3. Wykorzystując zmierzone w metodzie Bessela wysokość obrazu powiększonego i pomniejszonego, korzystając ze wzoru (6) oblicz wysokość przedmiotu.
4. Wyznacz wypadkową ogniskową układu dwóch soczewek.
5. Porównaj wyznaczone wielkości z parametrami nominalnymi.

Jeśli na którymś z etapów analizy danych prowadzisz dopasowanie zależności modelowej metodą najmniejszych kwadratów, **obowiązkowo** podaj postać dopasowywanej funkcji oraz określ przyjęte niepewności. Podaj uzasadnienie wyboru zmiennej niezależnej, za wyjątkiem sytuacji, w których ona jest z góry narzucona. Przeprowadź walidację modelu uwzględniającą zasadność przyjętych niepewności pomiarowych. Jako wynik dopasowania podaj estymaty dopasowywanych parametrów wraz z ich niepewnościami. W uzasadnionych przypadkach przedyskutuj istotność dopasowywanych parametrów. Do dobrej praktyki należy również w przypadku dopasowania funkcji opisanej więcej niż jednym parametrem podanie kowariancji i współczynników korelacji parametrów a także wykresu reszt z tego dopasowania oraz jego dyskusja.

Pamiętaj też, że najczęściej używana metoda najmniejszych kwadratów wymaga wyników pomiarowych, z których każdy uzyskany jest w niezależnym akcie pomiarowym. **Nie mają takiego charakteru wielkości uzyskane np. w wyniku odejmowania jednej ustalonej wartości od wszystkich wyników pomiarów, jeśli wartość odejmowana pochodzi z pomiaru.**

V. Dodatkowe uwagi odnośnie do raportu

Nim przygotujesz raport, zaznajom się z uwagami zawartymi w [wymaganiach dotyczących raportu](#) zamieszczonymi na stronie pracowni. Absolutnie zalecane jest także świadome przyjrzenie się redakcji tekstu, a także tabel, rysunków i wzorów, sposobów ich numerowania, tytułowania i opisywania w dowolnym, ale wydanym przez uznane wydawnictwo, akademickim podręczniku do fizyki, jak również zajrzenie do kilku publikacji w różnych czasopismach naukowych, co może ułatwić podjęcie decyzji co do podziału Twego raportu na części.

W raporcie **obowiązkowo** zamieść wszystkie surowe wyniki pomiarów tak, aby sięgając jedynie do raportu i bez potrzeby odwoływania się do protokołu z doświadczenia można było wykonać pełną i niezależną analizę Twych danych. Pamiętaj, że w niektórych przypadkach uzasadnione jest przeniesienie tych danych do Suplementu. W przypadku bardzo dużej liczby danych pomiarowych (np. zebranych komputerowo) dopuszczalne jest umieszczenie danych nie w formie tabel, ale w formie wykresów. Wówczas oryginalne dane należy dołączyć do raportu w formie

cyfrowej (np. w wiadomości email do prowadzącego).

VI. Literatura przedmiotu

- Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna* Część IV – Optyka, Warszawa, 1983;
- D. Halliday, R. Resnick i J. Walker, *Podstawy fizyki*, t. 4, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003;
- H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna wspomagana komputerem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, szereg wydań w latach 2003 ÷ 2012;
- J.R. Meyer-Arendt, *Wstęp do optyki*, PWN, Warszawa, 1977;
- A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2013.

Pytania i zadania definiujące wymagania do ćwiczenia

Problem 1. Zdefiniuj pojęcie cienkiej soczewki optycznej i podaj jej równanie. Jakie założenia i przybliżenia (np. przybliżenie przyosiowe/gaussowskie) są niezbędne, aby równanie soczewkowe było spełnione?

Problem 2. Czym różni się obraz rzeczywisty od urojonego? Podaj przykłady konfiguracji optycznych, w których soczewka skupiająca tworzy obraz rzeczywisty, a w których obraz urojony.

Problem 3. Przedstaw sposób geometrycznej konstrukcji obrazu punktu/przedmiotu dla cienkiej soczewki (skupiającej i rozpraszającej) oraz zwierciadła (wklęsłego i wypukłego) oraz wykonaj odpowiednie rysunki dla punktu/przedmiotu w odległości $x < f$, $x = f$, $f < x < 2f$, $x = 2f$, $x > 2f$ w poniższych przypadkach:

- Wyznaczenie obrazu punktu leżącego **poza osią optyczną**.
- Wyznaczenie obrazu punktu świecącego leżącego **dokładnie na głównej osi optycznej** (wskaz, jakich promieni konstrukcyjnych należy użyć w tym przypadku).
- Wyjaśnij, w jaki sposób konwencja znaków (np. znak ogniskowej f , odległości przedmiotu x i obrazu y) pozwala opisać te konstrukcyjne przypadki wspólnym równaniem $1/f = 1/x + 1/y$ dla soczewek i zwierciadeł.

Problem 4. Wykaż, że rzeczywista wysokość przedmiotu w metodzie Bessela wyraża się wzorem $P = \sqrt{O_1 \cdot O_2}$.

Problem 5. W jaki sposób grubość soczewki wpływa na wyznaczanie ogniskowej i położenie płaszczyzn głównych?

Problem 6. Opisz zjawisko aberracji sferycznej oraz aberracji chromatycznej w soczewkach. W jaki sposób aberracje te wpływają na ostrość obrazu i niepewność wyznaczenia ogniskowej? Jaki wpływ będą miały te efekty w przypadku zwierciadeł?

Problem 7. Jak zmieni się ogniskowa soczewki szklanej umieszczonej w wodzie w porównaniu z jej ogniskową w powietrzu? Podaj uzasadnienie jakościowe i wzór.

Problem 8. Opisz różnice pomiędzy niepewnością pomiarową typu A i typu B. Która metoda oceny niepewności ma zastosowanie przy pomiarze odległości l na ławie optycznej?

Problem 9. Wyjaśnij, dlaczego metoda Bessela uznawana jest za dokładniejszą niż bezpośredni pomiar z równania soczewki. Jakie błędy systematyczne eliminuje ta metoda?

Problem 10. Przeanalizuj wzory na niepewności złożone dla metody wzoru soczewkowego i metody Bessela. Dla jakich proporcji odległości niepewność pomiarowa osiąga minimum?

Opracowała: Aneta Drabińska, wrzesień 2026 r.,

Na podstawie wcześniejszych instrukcji nieznanego autorstwa.