WYDZIAŁ FIZYKI
UNIWERSYTET WARSZAWSKI

ZADANIE F1
WYZNACZANIE PRĘDKOŚCI DZWIĘKU METODĄ CZASU PRZELOTU

I. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie prędkości dźwięku metodą pomiaru czasu przelotu fali dźwiękowej między głośnikiem a mikrofonem.

II. Wprowadzenie

Szereg dynamicznych zjawisk fizycznych opisuje się tzw. **klasycznym równaniem falowym**, czyli liniowym, cząstkowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$

gdzie wielkość $\Psi(x, y, z, t)$ to np. natężenie pola elektrycznego bądź magnetycznego w fali elektromagnetycznej, ciśnienie w fali głosowej lub też przesunięcie w pobudzonym do drgań ośrodku ciągłym, przy czym wielkości te obserwujemy w punkcie przestrzeni określonym współrzędnymi x, y i z oraz w chwili czasu t. Parametr v uważamy za liczbę dodatnią, a jej sens wyjaśnimy niżej.

Rozważmy gaz wypełniający całą przestrzeń i głośnik wysyłający falę dźwiękową w ustalonym kierunku, wzdłuż którego wybierzemy oś X. Falę ψ będzie reprezentować odchyłka $p(x,t)$ ciśnienia od tegoż ciśnienia, jakie panuje w ośrodku niezaburzonym przez falę. Odchyłka ta w punkcie o współrzędnej x w chwili czasu t jest rządzona jednowymiarowym równaniem falowym:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Ponieważ w gazach ciśnienie jest proporcjonalne do gęstości, a równanie jest liniowe, więc identyczne równanie mamy także i dla gęstości. Słuszne jest ono także dla położenia cząsteczek gazu wychylonych z położenia równowagi, przy czym wychylenie to jest zgodne z kierunkiem rozchodzenia cię fali i dlatego fale dźwiękowe nazywamy **falami podłużnymi**, w odróżnieniu do fal np. na strunie, kiedy to drgania jej elementów mogą wystąpić w kierunku poprzecznym do kierunku propagacji fali.

Sprawdźmy, czy równanie falowe dopuszcza rozwiązania w postaci **fali harmonicznej**, czyli fali postaci:

$$p(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$$

lub też:

$$p(x, t) = A\sin(kx - \omega t).$$

Wielkość A nazywamy **amplituda fali**, symbol k określa tzw. **liczbę falową**, natomiast ω opisuje **częstość** (kołową) **fali**. W opisie teoretycznym wygodniej jest wykorzystywać funkcję wykładniczą

$$p(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

od czysto urojonego argumentu – możliwe jest to tak długo, jak długo operacje matematyczne wykonywane nad funkcją $p(x,t)$ mają charakter liniowy. Podstawiając harmoniczną postać fali (wyrażoną funkcją *sinus*, *cosinus* lub wykładniczą) do równania znajdujemy, że jest ona jego rozwiązaniem, wszakże pod warunkiem, że wielkości k oraz ω związane będą ze sobą relacją $\omega^2 = v^2k^2$, zwaną **związkiem dyspersyjnym**. Ponieważ dla wielkości ω mamy dwa rozwiązania: $\omega = \pm vk$, możemy więc utworzyć dwa rozwiązania równania falowego:

$$p(x, t) = Ae^{ik(x-vt)}, \tag{1}$$

oraz

$$p(x, t) = Be^{ik(x+vt)}. \tag{2}$$

Uzyskane rozwiązania charakteryzują się powtarzalnością w czasie i w przestrzeni. Periodyczność tę będzie nam łatwiej zobaczyć, jeśli spojrzymy na nią oddzielnie w obu tych wymiarach. Rozważmy rozwiązanie (1) w ustalonej chwili czasu t. Funkcja $p(x,t)$ przyjmie tę samą wartość w punktach, między którymi różnica Δx współrzędnych będzie spełniała warunek:

$$k\Delta x = 2\pi n,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Najmniejszą taką różnicę Δx nazywamy **długością λ fali** i łączymy ją z liczba falową k związkiem:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Podobnie, jeśli ustalimy położenie x w przestrzeni i będziemy obserwować zaburzenie w czasie, to rozwiązanie (1) będzie przyjmować dokładnie tę samą wartość w chwilach czasu różniących się o wartość Δt spełniająca warunek:

$$\omega\Delta t = 2\pi n.$$

Najmniejszą taką różnicę Δt nazywamy **okresem** T fali i łączymy ją z częstością ω związkiem:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Wspomnimy, że obok częstości kołowej ω, mierzonej w radianach na sekundę, do opisu zmienności w czasie stosowana jest też odwrotność okresu, czyli częstość (bez dodatkowego przymiotnika) $\nu = 1/T$ mierzona w jednostkach odwrotności czasu, np. hercach (Hz). I jeszcze jeden termin: argument $kx - \omega t$ nazywamy **fazą** fali.

Przyjrzyjmy się teraz wielkości υ występującej w równaniu falowym. Jeśli wyobrazimy sobie, że np. funkcja $p(x,t)$ w rozwiązaniu (1) w pewnej chwili czasu t_0 osiąga maksymalną wartość w punkcie o współrzędnej x_0, przy czym wartość fazy $x - \upsilon t$ wynosi $\xi_0 = x_0 - \upsilon t_0$, to po czasie Δt tę samą wartość $\xi_0 = x_0 + \upsilon\Delta t - \upsilon(t_0 + \Delta t)$, a więc i maksimum funkcji, znajdziemy w punkcie o współrzędnej $x_0 + \upsilon\Delta t$, co oznacza, że maksimum przesunie się w kierunku dodatnim osi X z prędkością υ, którą dlatego nazywamy **prędkością fali**. Rozumując podobnie stwierdzamy, że rozwiązanie (2) opisuje propagację fali z tą samą prędkością υ w kierunku przeciwnym do osi X. Ponieważ prędkość υ opisuje propagację powierzchni stałej fazy $kx \pm \omega t$, więc nazywamy ją również **prędkością fazową** υ_f i, jak pokazaliśmy, definiujemy związkiem:

$$\upsilon_f = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu = \upsilon.$$

Parametr υ określony jest własnościami ośrodka, w którym propaguje się fala. W przypadku fali głosowej w gazie, w warunkach, w których możemy uznać ten gaz za doskonały, a więc przy niskich ciśnieniach i dla temperatur zazwyczaj istotnie wyższych od temperatury zera bezwzględnego, parametr ten wynosi:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\kappa R}{\mu}T},$$

gdzie T jest temperaturą absolutną, κ stosunkiem C_p/C_V, a więc stosunkiem ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej objętości, wielkość R to tzw. uniwersalna stała gazowa, a wielkość μ jest masą molową gazu. Wzór ten dobrze zgadza się wynikami pomiarów dla powietrza w warunkach, jakie spotykamy na co dzień.

Krzywe Lissajous

Wykorzystanie oscyloskopu w trybie z podstawą czasu w omawianym doświadczeniu pozwala obserwować w czasie rozwiązanie równania falowego w ustalonym punkcie przestrzeni, a przy wprowadzeniu sygnałów z głośnika i mikrofonu ich wzajemną relację. Tę że relację można także obserwować w innym trybie pracy oscyloskopu. Otóż, sygnał napięciowy docierający do oscyloskopu z generatora można opisać jako drganie harmoniczne postaci:

$$U = U_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

podczas gdy sygnał docierający z mikrofonu ma kształt:

$$V = V_0 \sin(\omega t + \beta).$$

Wielkości α oraz β to są fazy związane z opóźnieniem na kablu dla sygnału z generatora oraz opóźnienie na kablu i opóźnienie związane z propagacją fali dźwiękowej między głośnikiem a mikrofonem dla sygnału docierającego z mikrofonu. Rugując z obu równań czas, otrzymujemy związek między napięciami V_x i V_y:

$$\left(\frac{U}{U_0}\right)^2 - 2\frac{U}{U_0}\frac{V}{V_0}\cos(\alpha-\beta) + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = \sin^2(\alpha-\beta),$$

który, w prostokątnym układzie odniesienia na płaszczyźnie (U,V) w ogólnym przypadku przedstawia elipsę, której środek znajduje się w początku układu odniesienia, ale osie nie są równoległe do osi układu (elipsa jest „obrócona”). Przy zwiększaniu odległości między głośnikiem a mikrofonem, zwiększamy fazę β. W szczególności, gdy różnica $\alpha-\beta$ faz jest wielokrotnością liczby π, to elipsa ta degeneruje się do linii prostej.

III. Wykonanie pomiarów

III.1. Wyposażenie

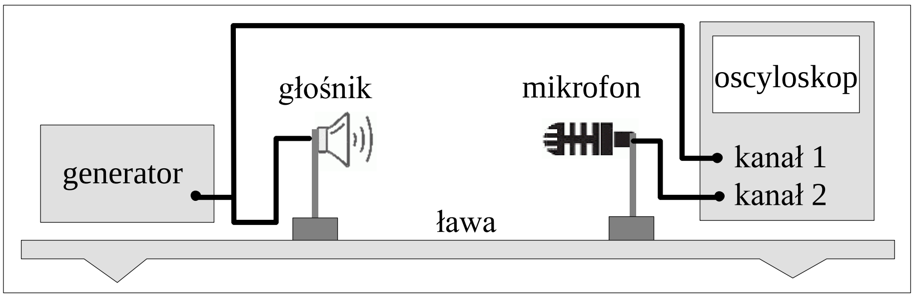
Masz do dyspozycji

- generator akustyczny;
- źródło fal dźwiękowych (głośnik);
- odbiornik fal dźwiękowych (mikrofon);
- ławę z miarką, na której umieszczony jest głośnik i mikrofon;
- oscyloskop;

Źródło fal dźwiękowych w tym ćwiczeniu emituje falę dźwiękową o wysokiej częstości, niesłyszalną dla ucha.

III.2. Wykonanie ćwiczenia

Zestaw układ pomiarowy według schematu na Rysunku 1.



Rys. 1. Schemat układu pomiarowego

III.3. Badanie czasu przelotu impulsu dźwiękowego

- Ustaw oscyloskop w trybie YT (w trybie z podstawą czasu) – upewnij się, że na ekranie widzisz odpowiedzi z obu kanałów.
- Zmieniając częstość sygnału wytwarzanego przez generator, poszukaj sygnału z mikrofonu w okolicy 40 kHz.
- Sprawdź, czy sygnał z mikrofonu przesuwa się względem sygnału z głośnika przy zmianie odległości między głośnikiem a mikrofonem.
- Wciśnij na generatorze przycisk BURST, aby generator wytwarzał pojedynczy impuls dźwiękowy.
- Dopasuj położenie sygnału oraz jego amplitudę tak, aby poszukać sinusoidalnego impulsu głośnika oraz sygnału mikrofonu. Zastanów się skąd się bierze różnica w kształtach ich sygnałów.

- Dla szeregu pozycji mikrofonu zmierz (wykorzystując na przykład funkcję kursorów), odległość czasową między impulsem z głośnika i tym odbieranym przez mikrofon. Za każdym razem dobieraj zakres czasu na oscyloskopie, tak aby pomiar był wykonany jak najdokładniej. Przy zmianie zakresu zanotuj go na karcie pomiarowej. Zapisz również położenie głośnika i mikrofonu na ławie pomiarowej.
- Przy każdym Zastanów się nad problemem dokładności pomiaru czasu za pomocą oscyloskopu.

III.4. Badanie przesunięcia czasowego fali ciągłej

- Ustaw na generatorze sygnał fali ciągłej sinusoidalnej o częstotliwości 40 kHz
- Ustaw położenie głośnika i mikrofonu, tak aby sygnały głośnika i mikrofonu były zgodne w fazie
- Przesuwaj ręcznie pozycję mikrofonu tak, aby jego sygnał na oscyloskopie przesuwał się o określoną liczbę okresów, tak aby zebrać kilka-kilkanaście pomiarów. Za każdym razem zapisuj położenie mikrofonu oraz ilu zmianom okresu obserwowanej fali to położenie odpowiada.

III.5. Badanie zmian kształtu figur Lissajous

- Przy ustawieniu na generatorze sygnału fali ciągłej sinusoidalnej o częstotliwości 40 kHz ustaw oscyloskop w trybie XY – upewnij się, że na ekranie widzisz elipsę.
- Sprawdź, czy przy zmianie odległości między głośnikiem a mikrofonem zmienia się kształt elipsy.
- Zastanów się nad problemem dokładności z jaką, obserwując ekran oscyloskopu, zliczasz wielokrotności długości, połówek, ćwiartek, ... fali.
- Dla szeregu położeń mikrofonu zmierz jego pozycję przy zmianie kształtu sygnału o odpowiadającej określonej wielokrotności długości fali.
- Pomiary powtórz dla kilku wybranych kształtów elipsy.
- Odnotuj temperaturę panującą w pracowni.

IV. Analiza wyników pomiarów

Analiza danych winna uwzględniać następujące elementy.

Badanie czasu przelotu impulsu dźwiękowego

- Wykres zależności czasu przelotu impulsu od odległości między mikrofonem i głośnikiem.
- Wyznaczenie oceny, wraz z jej niepewnością, prędkości propagacji fali dźwiękowej.

Badanie przesunięcia czasowego fali ciągłej

- Wykres zależności przesunięcia mikrofonu od liczby okresów o jakie przesunęła się faza odbieranego sygnału.
- Wyznaczenie oceny, wraz z jej niepewnością, prędkości propagacji fali dźwiękowej.

Badanie zmian kształtu figur Lissajous

- Wykres zależności przesunięcia mikrofonu od liczby okresów o jakie przesunęła się faza odbieranego sygnału dla każdej z serii pomiarów.
- Ocenę prędkości propagacji fali dźwiękowej dla każdej z serii pomiarów.
- Sprawdzenie zgodności uzyskanych ocen.
- Wyznaczenie najlepszej oceny prędkości, wraz z jej niepewnością, ze wszystkich pomiarów w tej części, jeśli uznasz takie postępowanie za stosowne.

- Porównanie dokładności każdej z zastosowanych procedur pomiarowych.
- Wyznaczenie najlepszej oceny prędkości, wraz z jej niepewnością, z pomiarów w całym doświadczeniu.
- Porównanie uzyskanej oceny prędkości z wartością modelową.

Jeśli na którymś z etapów analizy danych prowadzisz dopasowanie zależności modelowej metodą najmniejszych kwadratów **obowiązkowo** podaj postać dopasowywanej funkcji oraz określ przyjęte niepewności. Pamiętaj, że zdolność rozdzielcza przyrządu nie musi gwarantować sensownych błędów granicznych. Podaj uzasadnienie wyboru zmiennej niezależnej, za wyjątkiem sytuacji, w których ona jest z góry narzucona. Przeprowadź walidację modelu uwzględniającą zasadność przyjętych niepewności pomiarowych. Jako wynik dopasowania podaj estymaty dopasowywanych parametrów wraz z ich niepewnościami. W uzasadnionych przypadkach przedyskutuj istotność dopasowywanych parametrów. Do dobrej praktyki należy również w przypadku dopasowania funkcji opisanej więcej niż jednym parametrem podanie kowariancji i współczynników korelacji parametrów a także wykresu reszt z tego dopasowania oraz jego dyskusja.

Pamiętaj też, że najczęściej używana metoda najmniejszych kwadratów wymaga wyników pomiarowych, z których każdy uzyskany jest w niezależnym akcie pomiarowym. **Nie mają takiego charakteru wielkości uzyskane np. w wyniku odejmowania jednej ustalonej wartości od wszystkich wyników pomiarów, jeśli wartość odejmowana pochodzi z pomiaru.**

V. Dodatkowe uwagi odnośnie do raportu

Nim przygotujesz raport, zaznajom się z uwagami zawartymi w wymaganiach dotyczących raportu zamieszczonymi na stronie pracowni. Absolutnie zalecane jest także świadome przyjrzenie się redakcji tekstu, a także tabel, rysunków i wzorów, sposobów ich numerowania, tytułowania i opisywania w dowolnym, ale wydanym przez uznane wydawnictwo, akademickim podręczniku do fizyki, jak również zajrzenie do kilku publikacji w różnych czasopismach naukowych, co może ułatwić podjęcie decyzji co do podziału Twego raportu na części.

W raporcie **obowiązkowo** zamieść wszystkie surowe wyniki pomiarów tak, aby sięgając jedynie do raportu i bez potrzeby odwoływania się do protokołu z doświadczenia można było wykonać pełną i niezależną analizę Twych danych. Pamiętaj, że w niektórych przypadkach uzasadnione jest przeniesienie tych danych do Suplementu. W przypadku bardzo dużej liczby danych pomiarowych (np. zebranych komputerowo) dopuszczalne jest umieszczenie danych nie w formie tabel, ale w formie wykresów. Wówczas oryginalne dane należy dołączyć do raportu w formie cyfrowej (np. w wiadomości email do prowadzącego).

VI. Pytania definiujące wymagania do ćwiczenia

Problem 1. Ile wynosi prędkość dźwięku w próżni?

Problem 2. Równanie fali dźwiękowej, opisującej wychylenia ψ cząsteczek powietrza z położenia równowagi, ma postać $\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$, gdzie $A = 6{,}0\cdot 10^{-2}$ mm oraz $k = 5{,}3\ \mathrm{m}^{-1}$.

- Oblicz stosunek amplitudy drgań cząsteczek ośrodka i długości fali.
- Podaj wyrażenie na maksymalną prędkość drgań cząsteczek ośrodka i oblicz jej stosunek do prędkości fali.

Problem 3. Pokaż, że tor punktu o współrzędnych $x(t) = A\sin(\omega t)$, $y(t) = A\cos(2\omega t)$, to parabola.

Wskazówka: $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Problem 4. Wzdłuż osi OX rozchodzi się fala dźwiękowa, w której wychylenie ξ cząstek gazu z położenia równowagi opisane jest zależnością $\xi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$, natomiast wzdłuż osi OY propaguje się fala, pod wpływem której wychylenia ζ cząstek mają postać $\zeta(y,t) = A\cos(ky - \omega t)$. Opisz ruch cząstek gazu w płaszczyźnie XY.

Pytania i zadania przybliżające, uzupełniające lub poszerzające treść ćwiczenia

Problem 5. Fala akustyczna rozchodzi się w atmosferze ziemskiej pionowo do góry. W jakim czasie dotrze ona na wysokość $L = 10$ km, jeśli na powierzchni ziemi panuje temperatura $t_1 = 16°$, a w atmosferze ziemskiej, traktowanej jako gaz doskonały, temperatura maleje o 6° na odcinku jednego kilometra i ten gradient jest stały? Wykładnik adiabaty κ dla powietrza wynosi 1,4, masa cząsteczkowa μ powietrza to 29 g/mol, a stała Boltzmanna ma wartość k_B = 1,38·10^{-23} J/K.

Problem 6. Dwa ciągi harmonicznych fal dźwiękowych biegną w tym samym kierunku z prędkościami υ_1 i υ_2. Ich długości fal wynoszą odpowiednio λ_1 i λ_2. Znajdź prędkość u, z jaką przesuwają się w przestrzeni te punkty, w których drgania odpowiadające każdej z fal znajdują się w jednakowej fazie. Znajdź odległość Δ między dwoma takimi punktami.

VII. Literatura przedmiotu

- J. Ginter, *Fizyka fal – Fale w ośrodkach jednorodnych*, *Fale w ośrodkach niejednorodnych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1993;
- Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna*, cz. I, *Mechanika*, PWN, Warszawa, 1972,
- B. Jaworski i A. Dietłaf, *Kurs fizyki*, tom 3, *Procesy falowe, optyka, fizyka atomowa i jądrowa*, PWN, Warszawa, 1981, s. 469,
- D. Holliday, R. Resnick i J. Walker, *Podstawy fizyki*, tom 3, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2008;
- A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2013.

Opracował: NN.
Uzupełnili: Roman J. Nowak, 16 stycznia 2017, Aneta Drabińska wrzesień 2022