

ZADANIE D2
BADANIE DRGAŃ STRUNY

I. Cel ćwiczenia

Pobudzany do drgań poprzecznych cienki drut stalowy zamocowany w dwóch punktach dostarcza modelowego układu rządzonego klasycznym równaniem falowym. Model ten wyznacza częstotliwość drgania podstawowego i wyższych harmonicznych, jak również zależność częstotliwości tych drgań od długości drutu i od siły napinającej drut. Celem ćwiczenia jest sprawdzenie słuszności tych modelowych związków.

II. Wprowadzenie

Szereg dynamicznych zjawisk fizycznych opisuje się tzw. **klasycznym równaniem falowym**, czyli liniowym, cząstkowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2},$$

gdzie wielkość $\Psi(x, y, z, t)$ to np. natężenie pola elektrycznego bądź magnetycznego w fali elektromagnetycznej, ciśnienie powietrza w fali głosowej lub przesunięcie w pobudzonym do drgań ośrodku ciągłym, przy czym wszystkie te wielkości obserwujemy w punkcie przestrzeni określonym współrzędnymi x , y i z i w chwili czasu t . Sens wielkości v wyjaśnimy niżej.

Jeśli rozciągniemy strunę wzdłuż wybranego kierunku w przestrzeni, który utożsamimy z osią X i rozważymy jej wychylenia poprzeczne wzdłuż osi, którą wybierzemy jako oś Y , to falę Ψ będzie reprezentować wychylenie $y(x, t)$ od położenia równowagi i wychylenie to w punkcie o współrzędnej x w chwili czasu t jest rządzone jednowymiarowym równaniem falowym:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Sens parametru v występującego w równaniu falowym omówimy poniżej, a tu powiemy tylko, że zdefiniowany jest on własnościami ośrodka, w którym propaguje się fala. W przypadku struny o polu S przekroju poprzecznego, wykonanej z materiału o gęstości masy ρ i napiętej z siłą F , wynosi on:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}. \quad (2)$$

Rozważmy, czy równanie falowe dopuszcza rozwiązania w postaci **fali harmoniczej**, czyli fali postaci:

$$y(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)},$$

gdzie

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

przy czym wielkość k zwana jest **liczbą falową**, ω **częstością kołową** fali, a wyrażenie $kx - \omega t$ **fazą** fali. Wielkość λ to długość fali, T jej okres i obie wielkości ukazują ściśle okresowy charakter zmienności wychylenia y w czasie i przestrzeni. Wspomnimy też, że obok częstości kołowej ω , mierzonej w radianach na sekundę, do opisu zmienności w czasie stosowana jest też odwrotność okresu, czyli częstotliwość $\nu = 1/T$ mierzona w hercach (Hz). Oczywiście, równie dobrze w definicji fali harmoniczej możemy wykorzystać funkcję *sinus* lub *cosinus*, a odwołanie się do funkcji wykładniczej od czysto urojonego argumentu to tylko i wyłącznie kwestia wygody. Podstawiając harmoniczną postać fali do równania znajdujemy, że jest ona jego rozwiązaniem, wszakże pod warunkiem, że częstość i liczba falowa związane są ze sobą relacją: $\omega^2 = v^2 k^2$, zwaną **związkiem dyspersyjnym**. Ponieważ dla częstości mamy dwa rozwiązania: $\omega = \pm v k$, możemy więc utworzyć dwa rozwiązania równania falowego:

$$y(x, t) = A e^{ik(x - vt)},$$

oraz:

$$y(x, t) = Ae^{ik(x+vt)}.$$

Zauważmy także, że równanie falowe jest liniowe, więc jeśli dysponujemy rozwiązaniem o liczbie falowej k_1 i częstotliwości $\omega_1 = vk_1$ oraz rozwiązaniem o liczbie falowej k_2 i częstotliwości $\omega_2 = vk_2$, to suma tych rozwiązań także będzie rozwiązaniem równania falowego. Stąd wnioskujemy, że możemy utworzyć ogólne rozwiązanie postaci:

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{ik(x-vt)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} Be^{ik(x+vt)} dk = f(x - vt) + g(x + vt), \quad (3)$$

gdzie $A(k)$ oraz $B(k)$, lub alternatywnie f oraz g , to dowolne funkcje, których postać wyznaczamy z **warunków początkowych**:

$$y(x, t = t_0) = y_0(x) \quad \text{oraz} \quad \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} = v_0(x) \quad (4)$$

ustalających kształt $y_0(x)$ struny i prędkość $v_0(x)$ wszystkich jej punktów w wybranej chwili początkowej t_0 . Przedstawione tu podejście, wiodące do rozwiązania (3) spełnia swoje zadanie dla struny nieskończonej. W przypadku struny o skończonych rozmiarach, a nawet struny półnieskończonej, obok warunków początkowych do jednoznacznego wyrażenia jej ruchu potrzebne także warunki brzegowe, zadające wartość wychylenia y w pewnych wybranych punktach. Problemem tym zajmiemy się w dalszej części.

Przyjrzyjmy się teraz wielkości v występującej w równaniu. Jeśli wyobrazimy sobie, że np. funkcja f w pewnej chwili czasu t_0 osiąga maksimum w punkcie określonym współrzędną x_0 , przy czym wartość argumentu funkcji wynosi $\xi_0 = x_0 - vt_0$, to po czasie Δt tę samą wartość ξ_0 argumentu, a więc i maksimum funkcji, znajdziemy w punkcie o współrzędnej $x_0 + v\Delta t$, a więc maksimum to przesunie się w kierunku dodatnim osi X z prędkością v , którą nazywamy **prędkością fali**. Rozumując podobnie stwierdzamy, że funkcja g opisuje propagację fali z tą samą prędkością v w kierunku przeciwnym. Ponieważ prędkość v opisuje propagację płaszczyzny stałej wartości fazy $kx \pm \omega t$, więc nazywamy ją prędkością fazową i, jak pokazaliśmy, definiujemy związkami:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \pm v.$$

Zauważmy, że kształt $y(x, t)$ fali nie ulega zmianie w trakcie jej wędrówki – raz uformowany profil w chwili początkowej, np. w postaci garbu, propaguje się niezmiennie przez wieczność. Jest to rezultat specyficznej postaci związku dyspersyjnego $\omega^2 = v^2 k^2$, jaki łączy liczbę falową z częstotliwością. Konsekwencją tej relacji jest identyczna wartość prędkości fazowej dla każdej fali harmoniczej, więc raz uformowany kształt (3) utrzymywany jest w trakcie propagacji fali bez zniekształcenia.

Przejdźmy teraz do propagacji fali na strunie o skończonej długości. Rozwiązanie równania falowego znajdujemy tzw. metodą Fouriera, postulującą funkcję $y(x, t)$ w formie iloczynu dwóch nieznanymi funkcji: $y(x, t) = f(t)g(x)$, z których jedna zależy jedynie od czasu, a druga tylko od położenia. Taką specyficzną postać rozwiązań nazywamy **falą stojącą**. Podstawiając do równania falowego znajdujemy:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} g = f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2},$$

a po podzieleniu stronami przez iloczyn fg , otrzymujemy:

$$\frac{1}{v^2} \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}.$$

Ponieważ lewa strona tego równania zależy jedynie od czasu t , a prawa od współrzędnej x , więc wspólna wartość może być jedynie liczbą κ niezależną od czasu i przestrzeni:

$$\frac{1}{v^2} \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \kappa,$$

co prowadzi do dwóch zwyczajnych równań różniczkowych:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = wf, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \kappa g, \quad w = v^2 \kappa.$$

Widzimy, że otrzymane równanie zależności czasowej jest równaniem oscylatora harmonicznego,

jeśli liczba κ jest mniejsza od zera lub równaniem, którego rozwiązaniem zachowują się wykładniczo, jeśli liczba ta jest dodatnia. Ta druga możliwość jest nie do utrzymania z fizycznego punktu widzenia, gdyż sankcjonuje narastającą w czasie wykładniczo amplitudę drgań, dla czego w warunkach postawionego zadania trudno znaleźć uzasadnienie. Z tego też powodu przyjmiemy, że nieznaną stałą jest ujemna, co zapiszemy jako $\kappa = -k^2$ i otrzymamy dwa równania:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -k^2 g, \quad \omega^2 = v^2 k^2,$$

wiodące do rozwiązania:

$$y(x, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)(C \cos kx + D \sin kx). \quad (5)$$

Gdy struna ma długość L i zamocowana jest na obu końcach, to punkty o współrzędnych $x = 0$ oraz $x = L$ muszą pozostawać nieruchome w każdej chwili czasu, a tym samym rozwiązanie (5) musi, w każdej chwili czasu, spełniać **warunki brzegowe**:

$$y(x = 0, t) = 0, \quad y(x = L, t) = 0,$$

co prowadzi do równań:

$$C = 0, \quad D \sin kL = 0.$$

Pierwsze z równań usuwa wyraz z funkcją *cosinus* z rozwiązania (5), drugie zaś prowadzi do wniosku, że albo współczynnik $D = 0$, czego nie możemy zaakceptować, gdyż wtedy nie mamy w ogóle drgań, lub też nieznaną liczbą k , która nazwiemy liczbą falową, może przyjmować jedynie wartości:

$$k_n = n \frac{\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

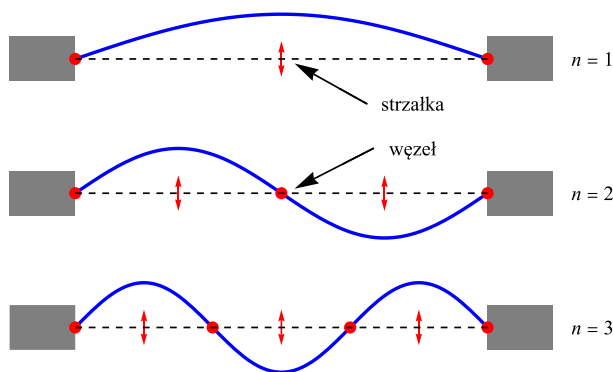
a skoro $\omega^2 = v^2 k^2$, więc również i częstotliwości drgań stają się dyskretne:

$$\omega_n = v k_n = n \omega_0, \quad \omega_0 = v k_0. \quad (7)$$

Z warunku (6) wnosimy, że i długość fali przyjmuje wartości dyskretne:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

a więc struna drga tak, że jej długość stanowi wielokrotność połowy długości fali, jak ukazuje to Rysunek 1. Drganie opisane wartością $n = 1$ nazywamy podstawowym.



Rysunek 1. Trzy pierwsze mody drgań struny.

Korzystając z powyższych wyników, szczególne rozwiązania równania falowego możemy przedstawić (wchłaniając współczynnik D do współczynników A i B) jako:

$$y_n(x, t) = (A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t) \sin k_n x. \quad (8)$$

O rozwiązaniu tym mówimy, że przedstawia sobą **drżania własne** struny o skończonej długości i zamocowanej na obu końcach. Drgania takie nazywamy także **modami** własnych struny. Z postaci tej wynika, że na strunie istnieją punkty $x_m = m\pi/k_n = mL/n$, $m = 1, 2, 3, \dots, n$, zwane **węzłami**, które są zawsze w spoczynku, podczas gdy wszystkie pozostałe punkty drgają harmonicznie z częstotliwości ω_n , jedną z nieskończonej liczby **częstotliwości własnych** struny. Współrzędne $x_m = (m - 1/2)L/n$, $m = 1, 2, 3, \dots, n$, punktów, które drgają z maksymalną amplitudą, nazywamy **strzałkami**.

Przekształćmy jeszcze rozwiązanie (8) do postaci:

$$\begin{aligned}
 y_n(x, t) &= (A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t) \sin k_n x \\
 &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega_n t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega_n t \right) \sin k_n x \\
 &= \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \varphi \cos \omega_n t + \sin \varphi \sin \omega_n t) \sin k_n x \\
 &= \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega_n t - \varphi) \sin k_n x \\
 &= \sqrt{A^2 + B^2} (\sin(k_n x + (\omega_n t - \varphi)) + \sin(k_n x - (\omega_n t - \varphi)))
 \end{aligned}$$

w której to postaci widzimy, że każde z drgań własnych struny jest złożone z dwóch fal o identycznych amplitudach i biegnących w przeciwnych kierunkach. Jak widzimy, złożenie takich dwóch fal, prowadzące do tworzenia się węzłów i strzałek, przedstawia falę stojącą.

Ponieważ równanie falowe jest liniowe, więc spełnione jest ono także przez kombinację liniową rozwiązań. Dlatego ogólne rozwiązanie znajdziemy jako sumę rozwiązań (8) z różnymi wartościami wektora falowego i częstości, a także z różnymi współczynnikami A oraz B :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin k_n x, \quad (9)$$

w którym stałe A_n oraz B_n wyznaczone są przez warunki początkowe (4). Zauważmy, że rozwiązanie to nie jest już harmoniczne, ale jest ciągle periodyczne w czasie. Mówimy, że ogólna postać drgań struny to superpozycja, w postaci szeregu Fouriera, jej drgań własnych lub też superpozycja fal stojących.

Gdy w ustalonym punkcie x_0 pobudzamy strunę siłą harmoniczną $Q(t) = Q_0 \sin \omega t$, to do rozwiązania swobodnego (9) należy dodać wymuszony ruch

$$y_Q(x, t) = A \begin{cases} \frac{\sin(k(L-x_0))}{\sin kL} \sin kx \sin \omega t, & 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{\sin kx_0}{\sin kL} \sin(k(L-x)) \sin \omega t, & x_0 \leq x \leq L \end{cases} \quad k = \frac{\omega}{v}, \quad (10)$$

gdzie stała A zależy od amplitudy Q_0 siły wymuszającej. Należy mieć świadomość, że powyższy opis, zarówno w odniesieniu do drgań swobodnych jak i wymuszonych, to obraz wyidealizowanego modelu. W każdym doświadczeniu prowadzonym w realnych warunkach występuje rozproszenie energii pierwotnie zmagazynowanej w strunie i zanik drgań swobodnych, a zachowane są jedynie, dzięki stałemu dopływowi energii dostarczanej przez siłę zewnętrzną, drgania wymuszone (10), które nazywamy **rozwiązaniem stacjonarnym**. Z rozwiązania tego w szczególności wynika, że gdy częstość ω siły wymuszającej jest równa jednej z częstości własnych ω_n struny, to mianownik $\sin k_n L$ znika. W ramach rozpatrywanego modelu interpretujemy to jako brak rozwiązań stacjonarnych. Możemy oczekiwać, że w rzeczywistości dyssypacja energii usuwa tę osobliwość, choć dalej prowadzi do pojawienia się wzrostu amplitudy drgań, ukazującego zjawisko **rezonansu** (winniśmy jednak mieć na uwadze fakt, że w warunkach silnego rezonansu wychylenia struny mogą być na tyle duże, że zawiodą przybliżenia stosowane przy wyprowadzaniu równania falowego). Spodziewamy się, że rezonans taki objawi się najsilniej wtedy, gdy punkt x_0 przyłożenia siły znajdzie się w położeniu strzałki drgania własnego, jako że wtedy zarówno funkcja $\sin(k_n x_0)$ jak i funkcja $\sin(k_n(L-x_0))$ w liczniku amplitudy fali stojącej osiąga, co do wartości bezwzględnej, wartość maksymalną. Gdybyśmy mieli pecha i siłę wymuszającą o częstości ω_n przyłożyli do punktu, który jest węzłem drgania własnego o tejże częstości ω_n , to drgań nie spowodujemy.

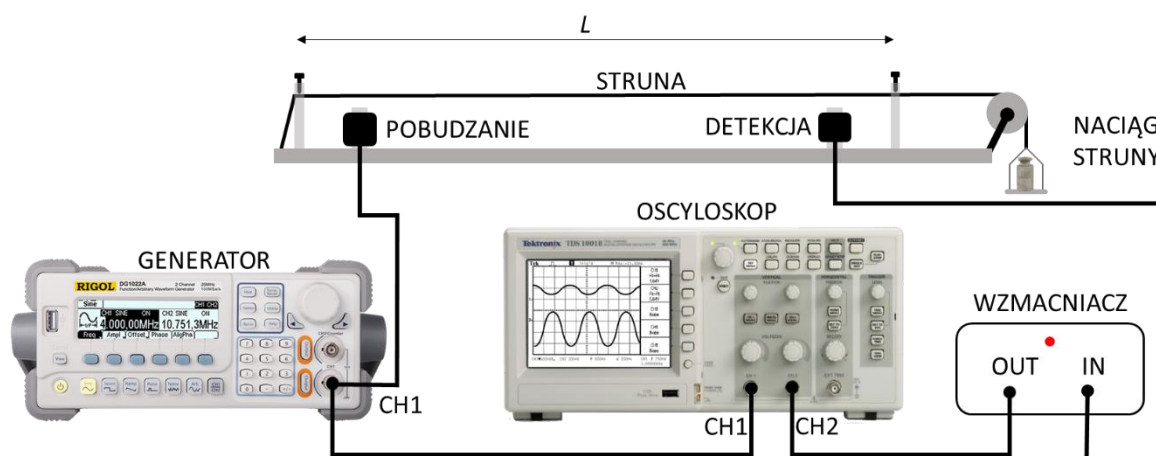
III. Wykonanie pomiarów

III.1. Wyposażenie

- generator Rigol DG1021 wykorzystywany jako źródło napięcia zmiennego o zadanej częstotliwości;
- oscyloskop Tektronix TDS1002;
- wzmacniacz;

- ławę z miarką oraz drutem z szalką zamocowaną na jednym z jego końców; masy szalek są zapisane bezpośrednio na szalkach;
- układ pobudzający drut do drgań;
- układ rejestrujący drgania drutu;
- odważniki;
- śrubę mikrometryczną;
- taśmę mierniczą.

Schemat aparatury przedstawia Rysunek 2. Zestaw pomiarowy składa się ze stalowego drutu umocowanego na ławie oraz elektromagnesu zasilanego z generatora o regulowanej częstotliwości, który pobudza drut do drgań. Do rejestracji drgań służy przetwornik, czyli drugi elektromagnes, z którego sygnał podawany jest na wzmacniacz, a następnie na wejście oscyloskopu. Naciąg drutu regulowany jest za pomocą odważników umieszczanych na szalce, a do pomiaru średnicy drutu użyj śruby mikrometrycznej.



Rysunek 2. Schemat układu pomiarowego

III.2. Planowanie pomiarów

Przed przystąpieniem do pomiarów, zastanów się, w jaki sposób wyznacysz niepewność częstotliwości drgań własnych.

III. 3 Wykonanie ćwiczenia

Uwaga!!! Ze względu na możliwość zerwania struny nigdy nie przesuwaj elektromagnesu pobudzającego i przetwornika bliżej niż 10 cm od miejsca umocowania struny, a obciążając szalkę nie przekraczaj wartości 5 kG.

Szczegółowy cel ćwiczenia polega na sprawdzeniu słuszności relacji opisującej zależność pomiędzy częstotliwością drgań własnych ν , a długością struny L i jej naprężeniem F

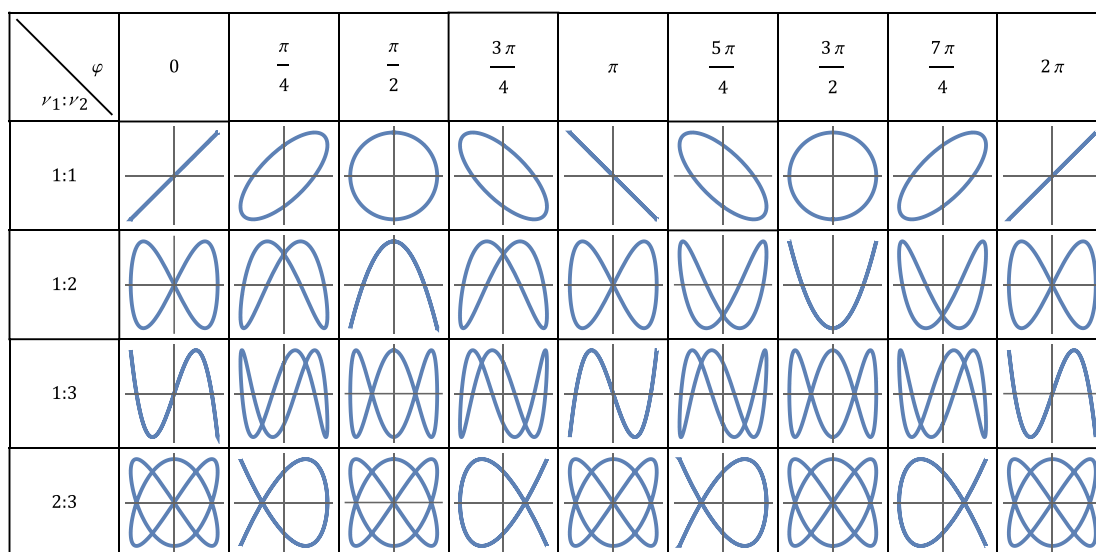
$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L} v = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho S}} \quad (11)$$

wynikającej z wprowadzonych wcześniej wzorów, jak również wyznaczenie prędkości v fali oraz gęstości ρ drutu, dlatego też:

- śrubą mikrometryczną wykonaj pomiary średnicy drutu w różnych miejscach;
- przy maksymalnej długości drutu i obciążeniu odważnikami o masie 5 kg wyznacz częstotliwość drgania podstawowego, następnie zdejmij obciążenie;
- ponownie wstaw takie samo obciążenie jak poprzednio i wyznacz częstotliwości kilku kolejnych drgań własnych drutu rozpoczynając ponownie od drgania podstawowego, a następnie wykorzystując znaną wartość częstotliwości, zidentyfikuj i zmierz częstotliwości kolejnych kilku, przynajmniej czterech, wyższych drgań własnych;

- zmierz podstawową częstotliwość własną drutu dla kilku, przynajmniej pięciu, jego długości przy obciążeniu masą 5 kg;
- przy maksymalnej długości drutu zmierz częstotliwości drgania podstawowego dla kilku, przynajmniej pięciu, obciążeń odważnikami w zakresie mas od 1 kg do 5 kg.

W czasie pomiarów konieczna jest powolna zmiana częstotliwości, gdyż przy słabym pobudzaniu drutu do drgań, drgania rezonansowe mogą być obserwowane dopiero po kilku sekundach oraz dostosowanie amplitudy pobudzania tak, aby rejestrowany obraz miał postać sinusoidalną. Pomiary należy wykonywać w zakresie częstotliwości od około $\nu = 10$ Hz do $\nu = 2000$ Hz. Oscyloskop możesz ustawić w trybie XT lub XY, w zależności od tego dla którego ustawienia łatwiej znajduje się częstotliwości rezonansu. W trybie XY rezonansowe częstotliwości drgań drutu złożone z częstotliwością generatora utworzą na ekranie oscyloskopu figury, zwane figurami Lissajous, o przykładowych kształtach ukazanych na Rysunku 3.



Rysunek 3. Przykłady krzywych Lissajous dla różnych stosunków częstości i różnicy faz.

IV. Analiza wyników pomiarów

Analiza danych winna obejmować następujące elementy:

- ustalenie realistycznych, dopuszczalnych błędów granicznych wielkości bezpośrednio mierzonych i wyznaczenie odpowiadających im niepewności standardowych – pamiętaj, że zdolność rozdzielcza przyrządu nie musi gwarantować sensownych błędów granicznych (oczywiście, możesz też od razu oszacować niepewności standardowe, bez przechodzenia przez etap błędów granicznych);
- wyznaczenie, w każdym z kroków analizy, niezbędnych niepewności standardowych wielkości mierzonych pośrednio;
- weryfikację, z zastosowaniem metod statystycznej analizy danych, słuszności modelowej relacji między częstotliwością drgania własnego a liczbą falową, odwołującą się do pomiarów częstotliwości drgań własnych uzyskanych przy ustalonej długości drutu i obciążeniu;
- wyznaczenie, z tych samych danych, prędkości fali oraz gęstość drutu;
- weryfikację, z zastosowaniem metod statystycznej analizy danych, słuszności modelowej relacji między częstotliwością podstawowego drgania własnego a długością drutu, odwołującą się do pomiarów częstotliwości tego drgania przy różnych długościach drutu i stałym obciążeniu;
- wyznaczenie, z tych samych danych, prędkości fali oraz gęstość drutu;
- stosowne uśrednienie wartości prędkości fali uzyskanych z obu pomiarów, o ile uznasz taki krok za uzasadniony;
- weryfikację, z zastosowaniem metod statystycznej analizy danych, słuszności modelowej relacji między częstotliwością podstawowego drgania własnego a obciążeniem, odwołującą się

do pomiarów częstotliwości tego drgania uzyskanych przy ustalonej długości drutu i zmiennym obciążeniu;

- wyznaczenie, z tych samych danych, gęstość drutu;
- stosowne uśrednienie wartości gęstości drutu uzyskanych ze wszystkich pomiarów, o ile uznasz taki krok za uzasadniony.

Jeśli na którymś z etapów analizy danych prowadzisz dopasowanie zależności modelowej metodą najmniejszych kwadratów, **obowiązkowo** podaj postać dopasowywanej funkcji oraz określ przyjęte niepewności. Podaj uzasadnienie wyboru zmiennej niezależnej, za wyjątkiem sytuacji, w których ona jest z góry narzucona. Przeprowadź walidację modelu uwzględniającą zasadność przyjętych niepewności pomiarowych. Jako wynik dopasowania podaj estymaty dopasowywanych parametrów wraz z ich niepewnościami. W uzasadnionych przypadkach przedyskutuj istotność dopasowywanych parametrów. Do dobrej praktyki należy również w przypadku dopasowania funkcji opisanej więcej niż jednym parametrem podanie kowariancji i współczynników korelacji parametrów a także wykresu reszt z tego dopasowania oraz jego dyskusja.

Pamiętaj też, że najczęściej używana metoda najmniejszych kwadratów wymaga wyników pomiarowych, z których każdy uzyskany jest w niezależnym akcie pomiarowym. Nie mają takiego charakteru wielkości uzyskane np. w wyniku odejmowania jednej ustalonej wartości od wszystkich wyników pomiarów, jeśli wartość odejmowana pochodzi z pomiaru.

V. Dodatkowe uwagi odnośnie do raportu

Nim przygotujesz raport, zaznajom się z uwagami zawartymi w [wymaganiach dotyczących raportu](#) zamieszczonymi na stronie pracowni. Absolutnie zalecane jest także świadome przyjrzenie się redakcji tekstu, a także tabel, rysunków i wzorów, sposobów ich numerowania, tytułowania i opisywania w dowolnym, ale wydanym przez uznane wydawnictwo, akademickim podręczniku do fizyki, jak również zajrzenie do kilku publikacji w różnych czasopismach naukowych, co może ułatwić podjęcie decyzji co do podziału Twojego raportu na części.

W raporcie **obowiązkowo** zamieść wszystkie surowe wyniki pomiarów tak, aby sięgając jedynie do raportu i bez potrzeby odwoływania się do protokołu z doświadczenia można było wykonać pełną i niezależną analizę Twoich danych. Pamiętaj, że w niektórych przypadkach uzasadnione jest przeniesienie tych danych do Suplementu. W przypadku bardzo dużej liczby danych pomiarowych (np. zebranych komputerowo) dopuszczalne jest umieszczenie danych nie w formie tabel, ale w formie wykresów. Wówczas oryginalne dane należy dołączyć do raportu w formie cyfrowej (np. w wiadomości email do prowadzącego).

VI. Literatura uzupełniająca

- F.C. Crawford, *Fale*, PWN, Warszawa 1972;
- D. Halliday, R. Resnick i J. Walker, *Podstawy fizyki*, t. 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003;
- H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna wspomagana komputerem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, szereg wydań w latach 2003 – 2012;
- A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2013.

Pytania i zadania definiujące wymagania do ćwiczenia

Problem 1. W jaki sposób wyznaczysz niepewność częstotliwości drgania drutu?

Problem 2. Równanie fali dźwiękowej, opisującej wychylenia ψ cząsteczek powietrza z położenia równowagi, ma postać $\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$, gdzie $A = 6,0 \cdot 10^{-2}$ mm oraz $k = 5,3 \text{ m}^{-1}$.

- Oblicz stosunek amplitudy drgań cząsteczek ośrodka i długości fali.
- Oblicz stosunek maksymalnej prędkości cząsteczek powietrza do prędkości fali.

Problem 3. W jednorodnym ośrodku sprężystym utworzono falę stojącą

$\Psi(x, t) = A \cos(kx) \cos(\omega t)$. Naskicuj na wykresie wychylenie ψ cząsteczek ośrodka z położenia równowagi dla chwil czasu: $t = 0$ oraz $t = T/2$, gdzie T jest okresem fali oraz ich prędkości w chwili $t = T/4$.

Problem 4. W strunie o długości $L = 120$ cm wywołano falę stojącą. W punkcie struny odległym o $a = 7,5$ cm od jednego z jej końców, amplituda A fali jest równa $3,5$ mm, a najbliższy punkt struny o tej samej amplitudzie znajduje się w odległości $b = 22,5$ cm od tego samego końca. Ile wynosi maksymalna amplituda fali? Której harmonicznej odpowiada ta fala?

Problem 5. Wyznacz siłę F naciągu zamocowanej na obu końcach stalowej struny o długości $L = 0,5$ m i średnicy $D = 0,2$ mm, jeśli wiadomo, że drga ona z częstotliwością $\nu = 435$ Hz.

Problem 6. Jak wykazuje doświadczenie, prędkość v propagacji fal podłużnych w ośrodku sprężystym zależy od modułu Younga E ośrodka i jego gęstości ρ . Posługując się metodą analizy wymiarowej, zaproponuj formę wzoru na prędkość fali.

Pytania i zadania przybliżające, uzupełniające lub poszerzające treść ćwiczenia

Problem 7. Pokaż, że funkcja $y(x, t)$ zadana związkami (3) jest rozwiązaniem jednowymiarowego, klasycznego równania falowego.

Problem 8. Pokaż, że jeśli funkcje $f_1(x, t)$ oraz $f_2(x, t)$ są rozwiązaniem jednowymiarowego, klasycznego równania falowego, to funkcja $f(x, t) = af_1(x, t) + bf_2(x, t)$, gdzie a oraz b to dowolne stałe, jest także rozwiązaniem tego równania.

Problem 9. W instrukcji do ćwiczenia pojawia się prośba, by naciąg drutu nie był nigdy większy niż 5 kG. Ile to newtonów?

Problem 10. Dane są dwie podłużne fale $\Psi_1(x, t) = A \sin(k_1x - \omega_1t)$ oraz $\Psi_2(x, t) = B \sin(k_2x - \omega_2t)$ rozchodzące się wzdłuż metalowego pręta. Znajdź różnicę fazy fali wypadkowej względem fazy fal A i fali B . Jakie warunki muszą spełniać k_1 , ω_1 , k_2 , ω_2 aby fala wypadkowa była falą stojącą?

Problem 11. W powietrzu rozchodzą się dwie płaskie, podłużne fale: jedna wzdłuż osi X i ma postać $\Psi_1(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ i druga, wzdłuż osi Y , zadana wzorem $\Psi_2(y, t) = A \cos(ky - \omega t)$. Opisz ruch cząsteczek ośrodka w płaszczyźnie XY .

Problem 12. Wyznacz rozwiązanie klasycznego, jednowymiarowego równania falowego, jeśli w chwili $t = 0$ nieskończenie długiej strunie nadano kształt

$$y_0(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

gdzie A i σ to zadane stałe, a następnie ją uwolniono bez prędkość początkowej.

Problem 13. Wyznacz związek dyspersyjny dla równania

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2},$$

gdzie $i^2 = -1$, i podaj ogólną postać jego rozwiązania.

Problem 14. Pokaż, że tor punktu o współrzędnych $x(t) = A \sin(\omega t)$, $y(t) = A \sin(2\omega t)$, to parabola.

Problem 15. Struna o masie m , zamocowana na obu końcach, drga z częstością podstawową ω , przy czym maksymalne wychylenie struny wynosi A . Wyznacz maksymalną energię kinetyczną struny oraz jej średnią energię kinetyczną w czasie jednego okresu.

Problem 16. Równanie falowe ma postać

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}.$$

Ile wynosi prędkość fali wzdłuż osi X ? A wzdłuż osi Y ?

Opracował: NN,

Uzpełnili: Roman J. Nowak, 19 stycznia 2017, Aneta Drabińska, 2024 r.