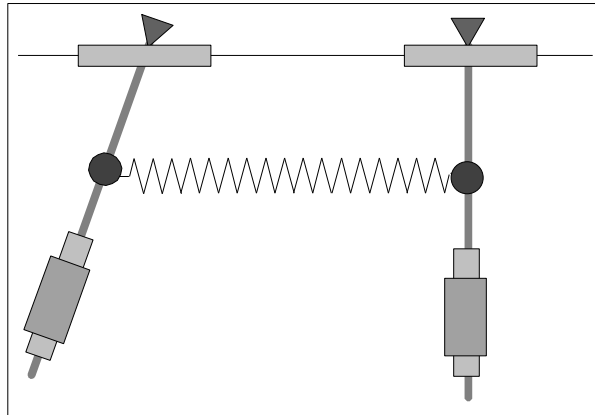


ZADANIE D1
BADANIE DRGAŃ WAHADEŁ SPRZĘŻONYCH

I. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie współczynnika sprężystości sprężyny i jest pretekstem do poznania i opisu zjawisk występujących podczas wahań dwóch wahadeł sprzężonych za pomocą sprężyny, jak to schematycznie ukazuje Rysunek 1.



Rys. 1. Schemat wahadeł sprzężonych

II. Podstawy teoretyczne

W eksperymencie odwołujemy się do modelu dwóch wahadeł sprzężonych za pomocą sprężyny. Wahadła są jednakowe, tzn. mają ten sam moment bezwładności $I_1 = I_2 = I$, tę samą masę m i tę samą odległość r środka ciężkości od osi obrotu. Wahadła połączone są sprężyną podlegającą prawu Hooke'a o współczynniku sprężystości k . W położeniu równowagi sprężyna nie jest napięta a jej punkty przyczepienia do wahadeł leżą w odległości a od osi obrotu, tej samej dla obu wahadeł. Ruch każdego z wahadeł jest płaskim ruchem obrotowym wokół ustalonej osi. Równania Newtona ruchu takiego układu wraz z ich rozwiązaniami w ogólnym jak i w każdym z niżej dyskutowanych przypadków są szczegółowo przedstawione w **DODATKU A**. Układ taki łatwo jest operacyjnie wprowadzić w kilka modów drgań, które odpowiadają wychyleniu o kąt φ_1 oraz φ_2 , które mogą być opisane przy pomocy funkcji okresowej o częstotliwości ν , częstości kołowej $\omega = 2\pi\nu$ i okresie $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$.

a) **Drganie własne – drgania w fazie**. Wychylając o ten sam kąt oba wahadła w tę samą stronę i zwalnając je jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowej, uzyskujemy zsynchronizowany, zgodny w fazie ruch obu wahadeł z częstością ω_1 tak, jakby nie były one połączone sprężyną i drgały jedynie pod wpływem siły ciężkości:

$$\varphi_1(t) = A \cos(\omega_1 t),$$

$$\varphi_2(t) = A \cos(\omega_1 t),$$

gdzie $\omega_1^2 = \frac{mgr}{I}$.

b) **Drganie własne – drgania w przeciwfazie**. Wychylając o ten sam kąt oba wahadła w przeciwną stronę i zwalnając je jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowej, uzyskujemy synchroniczny ruch, w którym wahadła drgają w przeciwfazie, a ruch każdego odbywa się z częstością ω_2 :

$$\varphi_1(t) = A \cos(\omega_2 t),$$

$$\varphi_2(t) = -A \cos(\omega_2 t),$$

gdzie $\omega_2^2 = \frac{mgr+2ka^2}{I}$.

c) **Dudnienia.** Uruchamiamy wahadła tak, że jedno z nich, np. pierwsze, jest wychylone o pewien kąt, w dowolną stronę, a drugie utrzymujemy w położeniu równowagi i oba zwalniamy jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowych. Wtedy ruch przyjmie postać w którym amplituda $A_i(t)$ szybkich drgań z częstością Ω_s modulowana jest wolnozmiennym w czasie, harmonicznym drganiem z częstością Ω_d :

$$\varphi_1(t) = A(t) \cos(\Omega_s t), \quad A(t) = A \cos(\Omega_d t),$$

$$\varphi_2(t) = A(t) \sin(\Omega_s t), \quad A(t) = A \sin(\Omega_d t),$$

przy czym obie częstości są związane z częstościami własnymi układu drgającego zgodnie w fazie i w przeciwfazie: $\Omega_s = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$, $\Omega_d = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$.

Zjawisko periodicznej zmiany amplitudy drgń nazywamy **dudnieniem**, w tym przypadku dudnieniem z częstością Ω_d .

III. Wykonanie pomiarów

Część pomiarów dotyczy okresów wahadeł, dlatego poświęcimy teraz nieco uwagi tym pomiarom. Przypominamy, że okres wahadła to czas, jaki upłynął od chwili, gdy minęło ono pewne położenie z określoną prędkością do chwili, gdy wróci do tego położenia z tą samą prędkością (zarówno co do wartości jak i kierunku). Zgodnie z założeniami rozważanego modelu małych drgań, należy zawsze wychylać wahadło o małe kąty (kilka stopni).

III.1. Wyposażenie

Masz do dyspozycji:

- dwa wahadła sprzężone sprężyną; wahadła mają nakrętki pozwalające zmienić położenia środka ciężkości wahadła, a więc i jego momentu bezwładności;
- dwa bezprzewodowe czujniki odległości PASCO PS-3219 pracujące w zakresie od 15 cm do 4 m z dokładnością 1,0 mm.
- komputer z oprogramowaniem Capestone do odczytywania danych z czujników;
- miarkę metrową;
- nitkę;
- zapalniczkę;
- szalkę wagi;
- ostrze pryzmatyczne do wyznaczania środka ciężkości.


III.2. Planowanie pomiarów

Nim przystąpisz do pomiaru okresu dudnień, powinieneś zastanowić się nad sprzężeniem. Siłę sprzężenia możemy regulować wybierając odległości a punktu zamocowania sprężyny do wahadła od osi obrotu. Zamocowanie to możemy przesuwać wzdłuż prętów wahadeł – pamiętajmy o umieszczeniu zamocowań obu końców sprężyny w tej samej odległości od osi obrotu wahadła. Po pierwsze sprężyna musi być zamocowana w taki sposób, aby w trakcie drgań nie wyginała się w łuk, co jest niezgodne z przyjętym w wyprowadzonych równaniach modelem. Poza tym duża wartość parametru a spowoduje, że okres dudnień będzie mały, a to utrudni nam zarówno pomiar okresu drgań szybkich jak i dudnień. Z drugiej strony, jeśli wartość parametru a będzie zbyt mała, to okres

dudnień będzie wyjątkowo długi i ze względu na występujące straty energii, ruch układu ustanie nim wykonamy pomiar. Tak dobierz punkt przyczepienia sprężyny do wahadła, aby w trakcie jednego okresu dudnienia wystąpiło kilka do kilkunastu drgań szybkich.

Jednym z zadań podczas analizy drgań wahadeł będzie obliczenie transformaty Fouriera obserwowanych drgań. Bardzo ważnym elementem podczas planowania pomiarów jest odpowiednie dobranie czasu pomiaru i częstości próbkowania, aby móc w wyniku transformacji Fouriera uzyskać informacje o częstotliwościach drgań z odpowiednią rozdzielczością. Szczegółowa procedura obliczania transformaty Fouriera została przedstawiona w **DODATKU B**. Zakres spektralny transformaty jest określony w głównej mierze przez interwał czasowy danych wejściowych. Jeśli dane wejściowe są zbierane z interwałem równym Δt maksymalna możliwa do uzyskania w widmie częstotliwość wynosi $\nu_{max} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t}$, zaś jego rozdzielczość $\Delta \nu = \frac{1}{N \Delta t}$, gdzie N jest liczbą zebranych danych. Wykonaj wstępne pomiary okresu wahadeł gdy poruszają się zgodnie i przeciwnie w fazie i oszacuj ich częstotliwości. Zdecyduj jakie zakres częstotliwości oraz jaką rozdzielczość spektralną transformaty Fouriera potrzebujesz, żeby te częstotliwości wyznaczyć satysfakcjonująco dokładnie i od siebie rozróżnić. Następnie oblicz potrzebną częstość próbkowania oraz czas pomiaru.

Kluczowym elementem modelu stanowiącego podstawę doświadczenia jest równość okresów drgań obu wahadeł. Ponieważ modyfikując wahadła nigdy nie doprowadzimy do sytuacji, w której będą one miały dokładnie taki sam okres, musimy pogodzić się faktem marginalnie różnych okresów drgań – zawsze jednak pozostanie pytanie o dopuszczalny rozmiar tego marginesu. Musimy zadbać o zachowanie synchroniczności wahadeł przynajmniej przez czas, jaki zamierzamy poświęcić na pomiar. W tym celu uruchommy oba wahadła, niesprężone, wychylając je w tę samą stronę i zwalniając jednocześnie, bez prędkości początkowej. Obserwujmy ich ruch przez odpowiedni czas, zwracając uwagę na synchroniczność ich ruchu. W razie potrzeby dokonajmy niezbędnych regulacji nakrętką na wahadle.

Podczas pomiarów będzie wykorzystywał bezprzewodowe czujniki odległości. Zwróć uwagę na numery czujników którymi dysponujesz tak aby podczas pomiaru połączyć się z nimi (a nie na przykład z czujnikami kolegów czy koleżanek pracującymi na innych stanowiskach). Są to numery w formacie xxx-xxx widoczne na każdym z czujników obok ikony ✖. Upewnij się, że czujniki są ustawione w taki sposób aby podczas pomiarów najmniejsza odległość między nimi a wahadłem którego położenie odczytują nie wykraczała poza ich zakres pomiarowy. Jeśli czujnik sygnalizuje rozładowaną baterię w przypadku czujnika ciśnienia podłącz go do ładowarki. Przed rozpoczęciem pomiarów sprawdź czy potrafisz swobodnie posługiwać się interfejsem programu, w tym uruchomić i zakończyć pomiar położenia obu czujników jednocześnie, wybrać odpowiednią częstość próbkowania, poprawnie zapisać dane pomiarowe. Zwróć uwagę, że domyślna dokładność zapisu położenia przez czujnik może nie być niewystarczająca, aby móc przeprowadzić poprawną analizę danych. Należy to zmienić w panelu narzędzi korzystając z opcji  (Data Summary), a następnie kliknąć ikonę ustawień przy pomiarze położenia, a następnie zmienić jednostki korzystając z kategorii Nazwy i symbole (Names and Symbols) oraz liczbę cyfr znaczących korzystając z kategorii Format liczb (Numerical Format).

III.3. Badanie drgań wahadeł

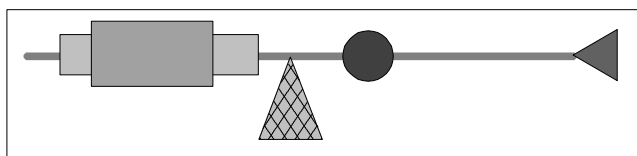
- Uruchamiamy wahadła jak w przypadku II.a. W tym przypadku lepiej jest rozłączyć wahadła i badać ruch dowolnego z nich (wszak sprawdziliśmy, że są jednakowe). Korzystając z programu Capestone, uruchamiamy pomiar położenia wahadeł w funkcji czasu.
- Uruchamiamy wahadła jak w przypadku II.b. W chwili $t_0 = 0$ oba nieruchome wahadła wychylone są od pionu o ten sam kąt, ale w przeciwne strony. Teoretycznie nie ma znaczenia, czy wahadła są zbliżone do siebie, czy też oddalone, wygodniej jest jednak zrealizować pierwszy przypadek. Zbliżyliśmy wahadła ku sobie, co powoduje skurczenie sprężyny. Ponieważ ma ona tendencję do wyginania się w łuk, należy na tyle zbliżyć wahadła, aby wygięcie to nie wystąpiło,

w przeciwnym razie zmienia się współczynnik sprężystości. Związujemy nitką końce zsuniętych wahadeł. W równowadze oba nieruchome wahadła będą symetrycznie wychylone ku sobie. Po przepaleniu nitki uruchamiamy, korzystając z programu Capestone, uruchamiamy pomiar położenia wahadeł w funkcji czasu.

- c) Uruchamiamy wahadła jak w przypadku II.c. W chwili $t_0 = 0$ oba wahadła powinny być nieruchome. Jedno z nich wychylamy o niewielki kąt, a drugie utrzymujemy w położeniu pionowym. Zwalniamy oba wahadła jednocześnie bez nadawania im prędkości początkowych i korzystając z programu Capestone, uruchamiamy pomiar położenia wahadeł w funkcji czasu.

III.4. Wyznaczanie odległości środka masy wahadła od osi obrotu

W stosownych wzorach na częstość występuje odległość środka masy wahadła od osi obrotu. Znajdujemy ją równoważąc wahadło ułożone w poziomej pozycji na pryzmatycznym ostrzu, jak ukazuje to Rysunek 2. Jedno z wahadeł należy w tym celu zdjąć ostrożnie z łożysk, a po pomiarze ułożyć precyzyjnie ponownie w łożyskach. Masa m wahadła podana jest na nalepce na wahadle.



Rys. 2. Wyznaczanie środka ciężkości

IV. Analiza wyników pomiarów

Rezultatem zastosowanej przez Ciebie procedury powinny być wyeksportowane dane zawierające położenia obydwu wahadeł w funkcji czasu dla wszystkich trzech ruchów wahadła. Dalsza analiza danych powinna zawierać następujące elementy:

- ustalenie realistycznych niepewności standardowych położenia i czasu;
- prezentację, wykorzystującą zgromadzone dane;
- w przypadku drgań obu wahadeł zgodnych w fazie i w przeciwfazie dla każdego z wahadeł:
 - a) wyznaczenie częstości drgań własnych poprzez dopasowanie zależności $x(t) = x_0 + A \cos(\omega t + \varphi)$; x_0 odpowiada przesunięciu początku układu współrzędnych w stosunku do stosowanego w przywołanych wyprowadzeniach początku układu, zaś czynnik fazowy φ jest związany z inną chwilą rozpoczęcia pomiaru w stosunku do chwili w której rozpoczął się ruch;
 - b) dyskusję wzajemnego przesunięcia fazowego obu wahadeł;
 - c) wyznaczenie częstotliwości drgań poprzez obliczenie transformaty Fouriera zależności $x(t)$.
 - d) porównanie częstości i częstotliwości drgań własnych wyznaczonych w punkcie a i c wraz z określeniem najlepszej według ciebie oceny częstotliwości drgań własnych;
- w przypadku dudnień:
 - a) wyznaczenie częstości drgań szybkozmiennych i dudnień poprzez dopasowanie zależności $x(t) = x_0 + A \cos(\Omega_d t + \varphi_d) \cos(\Omega_s t + \varphi_s)$; podobnie jak poprzednio czynnik x_0 jest związany z przesunięciem początku układu współrzędnych, zaś czynnik fazowy φ z inną chwilą rozpoczęcia pomiaru w stosunku do chwili w której rozpoczął się ruch;
 - b) dyskusję wzajemnego przesunięcia fazowego obu wahadeł;
 - c) wyznaczenie ocen częstotliwości drgań własnych poprzez obliczenie transformaty Fouriera;
 - d) konfrontację częstotliwości drgań szybkozmiennych i dudnień otrzymanych w punkcie a z częstotliwościami drgań wyznaczonych w sposób pośredni z pomiarów drgań własnych.
- prezentację optymalnego, w mniemaniu autora raportu, sposobu wyznaczenia współczynnika sprężystości sprężyny metodą dynamiczną;
- ocenę współczynnika sprężystości sprężyny wynikającą z wybranej metody dynamicznej;
- ostateczną ocenę współczynnika sprężystości wynikającą z wykonanych pomiarów.

Jeśli na którymś z etapów analizy danych prowadzisz dopasowanie zależności modelowej metodą najmniejszych kwadratów, **obowiązkowo** podaj postać dopasowywanej funkcji oraz określ przyjęte niepewności. Podaj uzasadnienie wyboru zmiennej niezależnej, za wyjątkiem sytuacji, w których ona jest z góry narzucona. Przeprowadź walidację modelu uwzględniającą zasadność przyjętych niepewności pomiarowych. Jako wynik dopasowania podaj estymaty dopasowywanych parametrów wraz z ich niepewnościami. W uzasadnionych przypadkach przedyskutuj istotność dopasowywanych parametrów. Do dobrej praktyki należy również w przypadku dopasowania funkcji opisanej więcej niż jednym parametrem podanie kowariancji i współczynników korelacji parametrów a także wykresu reszt z tego dopasowania oraz jego dyskusja.

Pamiętaj też, że najczęściej używana metoda najmniejszych kwadratów wymaga wyników pomiarowych, z których każdy uzyskany jest w niezależnym akcie pomiarowym. **Nie mają takiego charakteru wielkości uzyskane np. w wyniku odejmowania jednej ustalonej wartości od wszystkich wyników pomiarów, jeśli wartość odejmowana pochodzi z pomiaru.**

V. Dodatkowe uwagi odnośnie do raportu

Nim przygotujesz raport, zaznajom się z uwagami zawartymi w [wymaganiach dotyczących raportu](#) zamieszczonymi na stronie pracowni. Absolutnie zalecane jest także świadome przyjrzenie się redakcji tekstu, a także tabel, rysunków i wzorów, sposobów ich numerowania, tytułowania i opisywania w dowolnym, ale wydanym przez uznane wydawnictwo, akademickim podręczniku do fizyki, jak również zajrzenie do kilku publikacji w różnych czasopismach naukowych, co może ułatwić podjęcie decyzji co do podziału Twego raportu na części.

W raporcie **obowiązkowo** zamieść wszystkie surowe wyniki pomiarów tak, aby sięgając jedynie do raportu i bez potrzeby odwoływania się do protokołu z doświadczenia można było wykonać pełną i niezależną analizę Twych danych. Pamiętaj, że w niektórych przypadkach uzasadnione jest przeniesienie tych danych do Suplementu. W przypadku bardzo dużej liczby danych pomiarowych (np. zebranych komputerowo) dopuszczalne jest umieszczenie danych nie w formie tabel, ale w formie wykresów. Wówczas oryginalne dane należy dołączyć do raportu w formie cyfrowej (np. w wiadomości email do prowadzącego).

VI. Literatura uzupełniająca

- F.C. Crawford, *Fale*, PWN, Warszawa 1972, str. 48 - 52, 100 – 102;
- C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, *Mechanika*, PWN, Warszawa 1969, Rozdział 7;
- H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna wspomagana komputerem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, szereg wydań w latach 2003 ÷ 2012;
- A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2013.

VII. Pytania i zadania definiujące wymagania do ćwiczenia

Problem 1. Podaj postać prawa Hooke'a i zdefiniuj precyzyjnie wszystkie wielkości, które występują w jego sformułowaniu.

Problem 2. Wyprowadź równanie ruchu pojedynczego wahadła matematycznego w polu grawitacyjnym.

Problem 3. Omów jakościowo charakter ruchu zadany rozwiązaniem równania $\ddot{x} = kx$, gdzie zadana stała k jest dodatnia.

Problem 4. Co to są drgania własne?

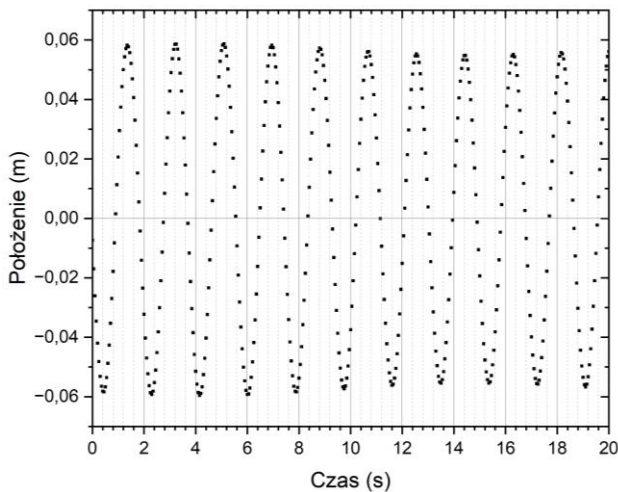
Problem 5. Wytłumacz, na czym polega zjawisko dudnienia.

Problem 6. Jak długo i z jakim interwałem czasowym powinny być zbierane dane wejściowe, aby w widmie transformaty Fouriera móc wyodrębnić częstotliwości $\nu_1 = 0,50$ Hz oraz $\nu_2 = 0,55$ Hz.

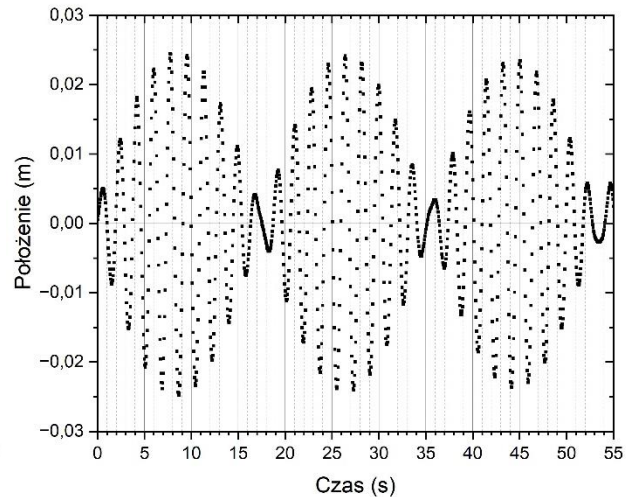
Problem 7. Na rys. 3 zostało zaprezentowane zmierzone położenie wahadła w trakcie jego ruchu. Zakładając, że położenie w funkcji czasu może być opisane funkcją $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ wyznacz

wartości liczbowe parametrów A , ω i φ . Narysuj jak będzie wyglądało widmo transformaty Fouriera tych drgań.

Problem 8. Na rys. 4 zostało zaprezentowane zmierzone położenie jednego z wahadeł układu wahadeł sprzężonych w trakcie jego ruchu. Zakładając, że położenie w funkcji czasu może być opisane funkcją $x(t) = A \cos(\Omega_d t + \varphi_d) \cos(\Omega_s t + \varphi_s)$ wyznacz wartości liczbowe parametrów A , Ω_d , Ω_s , φ_d i φ_s . Narysuj jak będzie wyglądało widmo transformaty Fouriera tych drgań.



Rys. 3 Położenie wahadła w funkcji czasu



Rys. 4 Położenie jednego z wahadeł w układzie wahadeł sprzężonych w funkcji czasu

DODATEK A – Szczegółowy opis ruchu wahadeł sprzężonych

W ćwiczeniu rozważamy jednakowe wahadła, tzn. mają one ten sam moment bezwładności $I_1 = I_2 = I$, tę samą masę m i tę samą odległość r środka ciężkości od osi obrotu. Wahadła połączone są sprężyną, której punkty zaczepienia leżą w odległości a od osi obrotu, tej samej dla obu wahadeł. Przyjmujemy też, że sprężyna podlega prawu Hooke'a o współczynniku sprężystości k , a w położeniu równowagi nie jest napięta. Ruch każdego z wahadeł jest płaskim ruchem obrotowym wokół ustalonej osi, a równania ruchu mają postać:

$$I_i \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} = \sum_j D_{i,j}, \quad i = 1, 2, \quad (\text{A1})$$

gdzie φ_i jest kątem wychylenia i -tego wahadła z położenia równowagi, I_i jest jego momentem bezwładności względem osi obrotu, natomiast $D_{i,j}$ momentem j -tej siły działającej na i -te wahadło względem osi obrotu wahadła. Przejdziemy teraz do wyznaczenia jawnej postaci momentów sił.

Na każde z wahadeł działają dwie siły:

- siła ciężkości $P = mg$ przyłożona w odległości r od osi obrotu, o momencie $D = mgr \sin \varphi$;
- siła sprężystości $F = -k\delta$ przyłożona w odległości a od osi obrotu, gdzie δ jest wydłużeniem sprężyny. Wyznamy wartość tej siły.

Rysunek 4 ukazuje oba wahadła: jedno odchylone o kąt φ_1 , a drugie o kąt φ_2 . Współrzędne punktu zaczepienia sprężyny do wahadła pierwszego (lewego) wynoszą:

$$x_1 = a \sin \varphi_1,$$

$$z_1 = a \cos \varphi_1,$$

natomiast współrzędne zaczepienia sprężyny do wahadła drugiego (prawego), to:

$$x_2 = L + a \sin \varphi_2$$

$$z_2 = a \cos \varphi_2.$$

gdzie L jest długością swobodną sprężyny. Z obu par współrzędnych wyznaczamy odległość między punktami zaczepienia:

$$\sqrt{(\Delta z)^2 + (\Delta x)^2} = \sqrt{(L + a(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1))^2 + a^2(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)^2}.$$

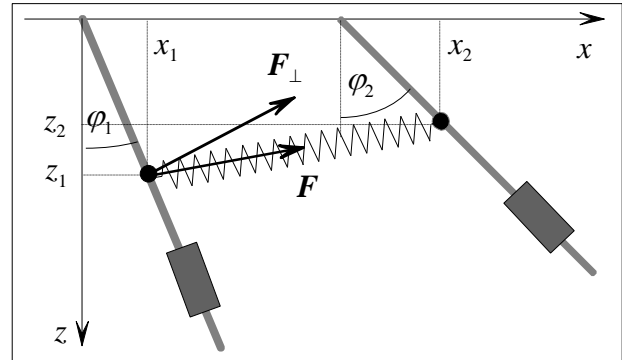
Ograniczymy się do małych wychyleń tak, aby spełnione były relacje:

$$\cos \varphi_1 \approx 1 \approx \cos \varphi_2, \quad \sin \varphi_1 \approx \varphi_1, \quad \sin \varphi_2 \approx \varphi_2,$$

a wtedy wydłużenie sprężyny wynosi:

$$\delta = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2} - L \approx a(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Jeśli, jak na Rysunku 4, przyjmiemy, że $\varphi_2 > \varphi_1$, to $\delta > 0$ i siła działająca na lewe wahadło wynosi $ka(\varphi_2 - \varphi_1)$ i wychyla je w prawo z położenia równowagi. Na drugie wahadło działa siła przeciwnie skierowana o tej samej wartości.



Rys. 4. Siła sprężysta i jej moment

Pozostaje nam wyznaczenie momentu siły sprężystej. Rysunek 4 ukazuje siłę sprężystą F skierowaną wzdłuż sprężyny oraz jej rzut $F_{\perp} = F \cos \alpha$ na kierunek prostopadły do wahadła, gdzie kąt α jest kątem między siłą F a jej rzutem. Wyznamy teraz ten kąt. Wektor $A = (A_x, A_z)$ łączący punkty zaczepienia sprężyn i skierowany od wahadła 1 do wahadła 2 ma składowe:

$$A_x = L + a \sin \varphi_2 - a \sin \varphi_1 = L + a(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1),$$

$$A_z = a \cos \varphi_2 - a \cos \varphi_1 = a(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1),$$

a skoro wektor prostopadły do dowolnego wektora (a_x, a_z) zadany jest przez $\pm(a_z, -a_x)$, więc wektor $B = (B_x, B_z)$ prostopadły do osi wahadła lewego wynosi (wybieramy znak „+”; znak „-” wyznacza wektor skierowany przeciwnie):

$$B_x = \cos \varphi_1, \quad B_z = -\sin \varphi_1.$$

Kąt α wyznaczamy za pomocą iloczynu skalarnego:

$$\cos \alpha = \frac{A \cdot B}{AB} = \frac{(L + a(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)) \cos \varphi_1 - a(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) \sin \varphi_1}{\sqrt{(L + a(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1))^2 + a^2(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)^2}}.$$

Ponieważ interesują nas małe kąty φ_1 oraz φ_2 , więc rozwijamy ten wynik wokół punktu $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ i otrzymujemy, że najniższy (zerowy) wyraz rozwinięcia daje $\cos \alpha = 1$. W rezultacie, interesująca nas składowa momentu siły działającej na wahadło 1 wynosi $ka^2(\varphi_2 - \varphi_1)$. Identyczny wynik, lecz z przeciwnym znakiem, znajdujemy dla momentu siły działającej na wahadło 2.

Teraz już możemy wypisać postać równań ruchu wahań:

$$\begin{cases} I \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = -mgr \varphi_1 + ka^2(\varphi_2 - \varphi_1), \\ I \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = -mgr \varphi_2 - ka^2(\varphi_2 - \varphi_1). \end{cases} \quad (A2)$$

Równania te łatwo rozprzęgniemy, gdyż dodając je stronami, otrzymujemy:

$$I \frac{d^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{dt^2} = -mgr(\varphi_1 + \varphi_2),$$

a odejmując stronami, znajdujemy:

$$I \frac{d^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt^2} = -mgr(\varphi_1 - \varphi_2) - 2ka^2(\varphi_1 - \varphi_2),$$

wprowadzają zaś nowe zmienne:

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2,$$

otrzymamy dwa oddzielne równania oscylatorów harmoniczych:

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\omega_1^2\psi_1, \quad \omega_1^2 = \frac{mgr}{I}, \quad (\text{A3})$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -\omega_2^2\psi_2, \quad \omega_2^2 = \frac{mgr + 2ka^2}{I}. \quad (\text{A4})$$

Widzimy, że ruch wahadeł w pełni opisany jest przez dwie nowe współrzędne: $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ i dwie częstości ω_1 i ω_2 . Współrzędne $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ nazywamy **współrzędnymi normalnymi**, drgania opisane tymi współrzędnymi nazywamy **drzganiami własnymi** układu lub **modami** układu, a częstości ω_1 i ω_2 **częstościami własnymi** układu. Częstości te wyznaczają **okresy własne** drgań:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}.$$

Zauważmy, że częstość ω_1 jest częstością pojedynczego, nie sprzężonego wahadła oraz $T_1 > T_2$.

Pojęcie drgań własnych układu rozszerzamy na układ n ciał. W tym celu rozważmy odpowiednik układu równań (A1) dla n ciał. Prawe strony tych równań zależą od współrzędnych φ_i , przy czym rozważamy tu przypadek, w którym zależność ta jest liniowa (sgdy nie jest to prawda, to po zlinearyzowaniu otrzymujemy przybliżony opis w postaci tzw. *małych drgań*). Jeśli zdołamy znaleźć takie przekształcenie liniowe zmiennych φ_i w nowy zestaw takich n zmiennych ψ_i , że dla każdej z tych nowych zmiennych jej równanie ruchu przyjmuje postać równania pojedynczego oscylatora harmonicznego, to mówimy, że znaleźliśmy **drzganiami własnymi** układu, czyli jego **współrzędne normalne i częstości własne**.

Rozwiązania równań ruchu

Ogólne rozwiązania równań (A3) i (A4):

$$\psi_1(t) = \psi_{10} \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{\psi}_{10}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t), \quad \psi_2(t) = \psi_{20} \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{\psi}_{20}}{\omega_2} \sin(\omega_2 t), \quad (\text{A5})$$

gdzie ψ_{i0} to wartości „wychyleń” ψ_i w chwili $t = 0$, natomiast $\dot{\psi}_{i0}$ to „prędkości” drgań ψ_i w chwili $t = 0$, wiodą nas do ogólnych rozwiązań układu równań (A2):

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{2}(\psi_1(t) + \psi_2(t)) = \frac{1}{2} \left(\psi_{10} \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{\psi}_{10}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) + \psi_{20} \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{\psi}_{20}}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \right), \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{2}(\psi_1(t) - \psi_2(t)) = \frac{1}{2} \left(\psi_{10} \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{\psi}_{10}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) - \psi_{20} \cos(\omega_2 t) - \frac{\dot{\psi}_{20}}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \right). \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

Mamy tu, zgodnie z regułą, cztery stałe dowolne: dwa położenia początkowe:

$$\begin{cases} \varphi_1(t=0) = \varphi_{10} = \frac{1}{2}(\psi_{10} + \psi_{20}), \\ \varphi_2(t=0) = \varphi_{20} = \frac{1}{2}(\psi_{10} - \psi_{20}), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_{10} = \varphi_{10} + \varphi_{20}, \\ \psi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{20}, \end{cases}$$

i dwie prędkości początkowe:

$$\begin{cases} \left. \frac{d\varphi_1(t)}{dt} \right|_{t=0} = \dot{\varphi}_{10} = \frac{1}{2}(\dot{\psi}_{10} + \dot{\psi}_{20}) \\ \left. \frac{d\varphi_2(t)}{dt} \right|_{t=0} = \dot{\varphi}_{20} = \frac{1}{2}(\dot{\psi}_{10} - \dot{\psi}_{20}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\psi}_{10} = \dot{\varphi}_{10} + \dot{\varphi}_{20}, \\ \dot{\psi}_{20} = \dot{\varphi}_{10} - \dot{\varphi}_{20}. \end{cases}$$

Wypiszmy jeszcze rozwiązania dla indywidualnych wahadeł wyrażone przez ich położenia i prędkości początkowe:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{2} \left((\varphi_{10} + \varphi_{20}) \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{\varphi}_{10} + \dot{\varphi}_{20}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) + (\varphi_{10} - \varphi_{20}) \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{\varphi}_{10} - \dot{\varphi}_{20}}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \right), \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{2} \left((\varphi_{10} + \varphi_{20}) \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{\varphi}_{10} + \dot{\varphi}_{20}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) - (\varphi_{10} - \varphi_{20}) \cos(\omega_2 t) - \frac{\dot{\varphi}_{10} - \dot{\varphi}_{20}}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \right). \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

Spośród tych ogólnych rozwiązań wybierzemy pewne trzy szczególne.

a) **Drganie własne – drgania w fazie.** Wybierzmy drgania własne (A5) w formie:

$$\psi_1(t) = \psi_{10} \cos(\omega_1 t), \quad \psi_2(t) = 0,$$

a wtedy:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2} \psi_{10} \cos(\omega_1 t), \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{2} \psi_{10} \cos(\omega_1 t)$$

Ruch taki uzyskujemy wychylając o ten sam kąt oba wahadła w tę samą stronę i zwalniając je jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowej. Uzyskujemy zsynchronizowany, zgodny w fazie ruch obu wahadeł z częstością ω_1 , tak jakby nie były połączone sprężyną i drgały jedynie pod wpływem siły ciężkości.

b) **Drganie własne – drgania w przeciwfazie.** Wybierzmy drgania własne (A5) w formie:

$$\psi_1(t) = 0, \quad \psi_2(t) = \psi_{20} \cos(\omega_2 t),$$

a wtedy:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2} \psi_{20} \cos(\omega_2 t), \quad \varphi_2(t) = -\frac{1}{2} \psi_{20} \cos(\omega_2 t).$$

Ruch taki uzyskujemy wychylając o ten sam kąt oba wahadła w przeciwną stronę i zwalniając je jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowej. W tym ruchu wahadła synchronicznie zbliżają się i oddalają od siebie.

c) **Dudnienia.** Dobierzmy teraz takie uruchomienie obu wahadeł, kiedy to jedno wahadło, np. pierwsze, jest wychylone o pewien kąt, a drugie utrzymujemy w położeniu równowagi i oba zwalniamy jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowych. Wtedy rozwiązanie (A6) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{2} \varphi_{10} (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) = \varphi_{10} \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right), \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{2} \varphi_{10} (\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) = \varphi_{10} \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right). \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

Zdefiniujmy nowe częstości:

$$\Omega_s = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}, \quad \Omega_d = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}, \quad \Omega_s \Omega_d = \frac{1}{4} (\omega_2^2 - \omega_1^2) = \frac{ka^2}{2I},$$

i związane z nimi okresy drgań:

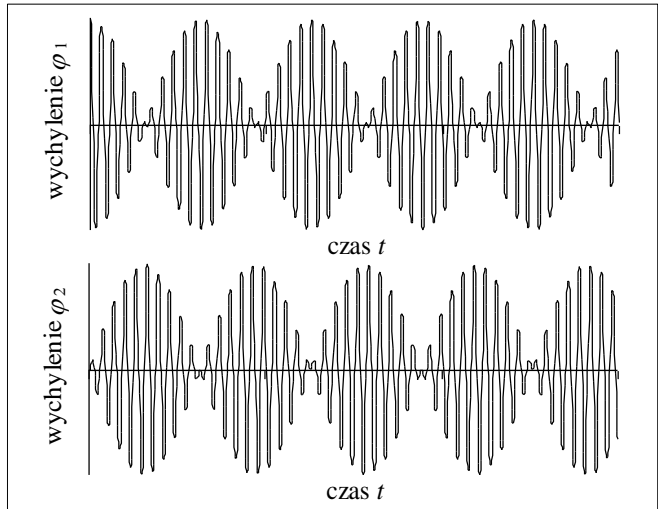
$$T_s = \frac{2\pi}{\Omega_s} = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2}, \quad T_d = \frac{2\pi}{\Omega_d} = \frac{2T_1T_2}{T_1 - T_2}.$$

Ponieważ $\Omega_s > \Omega_d$, więc $T_s < T_d$, a to czyni, że rozwiązania (A8) możemy zapisać w formie

$$\varphi_1(t) = A_1(t) \cos(\Omega_s t), \quad A_1(t) = \varphi_{10} \cos(\Omega_d t),$$

$$\varphi_2(t) = A_2(t) \sin(\Omega_s t), \quad A_2(t) = \varphi_{10} \sin(\Omega_d t).$$

Wychylenia φ_1 oraz φ_2 zapisane w takiej formie przedstawiają ruch z częstością Ω_s i amplitudą $A_i(t)$. Interpretacja taka staje się tym bardziej wyraźna, im wielkości A_i są wolniej zmienne w czasie, a więc im bardziej częstość Ω_s jest większa od częstości Ω_d . Ilustrację amplitudy takich drgań przedstawia Rysunek 5, ukazujący wychylenia φ_1 i φ_2 , gdy częstość Ω_s jest 20 razy większa od częstości Ω_d . Zjawisko periodycznej zmiany amplitudy nazywamy dudnieniem, w tym wypadku dudnieniem z częstością Ω_d . W czasie ruchu energia przekazywana jest między wahadłami: gdy jedno z nich spoczywa, wówczas drugie wykonuje drgania z maksymalną amplitudą, następnie oba drgają z pośrednimi amplitudami, a potem drugie zatrzymuje się w położeniu równowagi, podczas gdy pierwsze drga z maksymalną amplitudą.



Rys. 5. Ilustracja zjawiska dudnień

Dudnienia ukazane na Rysunku 5 uzyskaliśmy składając dwa *cosinusoidalne*, zgodne w fazie drgania wzdłuż tego samego kierunku i o tej samej amplitudzie. Podobne wyrażenie otrzymamy składając dwa drgania *sinusoidalne*.

DODATEK B – Transformata Fouriera

Transformacja Fouriera rozkłada dowolną funkcję okresową na szereg funkcji okresowych tak, że uzyskana transformata podaje w jaki sposób poszczególne częstotliwości składają się na pierwotną funkcję. W ten sposób uzyskujemy informację na temat widma sygnału czyli jego reprezentacji częstotliwościowej.

Niech $f(t)$ będzie funkcją taką, że f jest całkowalna w zbiorze \mathbb{R} . Wówczas funkcję F daną wzorem

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-2\pi i \nu t} dt \quad (\text{B1})$$

nazywamy **transformatą Fouriera** (ang. FT – *Fourier transform*) funkcji f . Odwzorowanie $\mathcal{F}(f)$ przyporządkowujące funkcji f jej transformatę F nazywamy przekształceniem (transformacją) Fouriera. Można pokazać, że jeśli f i F są całkowalne, to

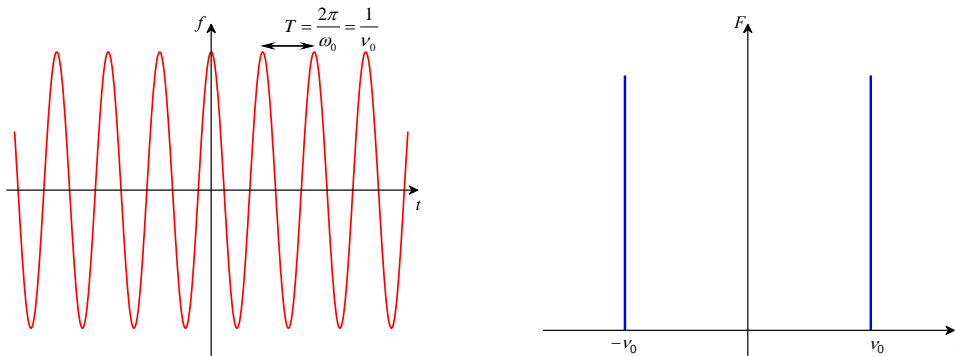
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \cdot e^{2\pi i \nu t} d\nu. \quad (\text{B2})$$

Odwzorowanie to oznaczamy symbolem \mathcal{F}^{-1} i nazywamy przekształceniem odwrotnym (transformacją odwrotną) Fouriera (ang. IFT – *inverse Fourier transform*), a funkcję $\mathcal{F}^{-1}(F)$ nazywamy transformatą odwrotną. Należy zaznaczyć, że używanie terminu transformacja odwrotna jest tutaj pewnym nadużyciem, bowiem nie każda transformata funkcji musi być funkcją całkowalną.

W praktyce (m. in. w niniejszym ćwiczeniu) często zmienna t oznacza czas (w sekundach), wówczas argument transformaty ν oznacza częstotliwość (w Hz = 1/s). Czyli $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$, gdzie ω

jest częstotliwością kołową, a T jest okresem funkcji okresowej. Jeśli obserwowany sygnał w funkcji czasu jest postaci $A \cos(\omega_0 t) = A \cos(2\pi\nu_0 t)$, wówczas jego transformata Fouriera w funkcji częstotliwości wyraża się następująco:

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A \cos(2\pi\nu_0 t) \cdot e^{-2\pi i \nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A \left(\frac{e^{2\pi i \nu_0 t} + e^{-2\pi i \nu_0 t}}{2} \right) \cdot e^{-2\pi i \nu t} dt \\ &= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i (\nu - \nu_0) t} dt + \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i (\nu + \nu_0) t} dt \\ &= \frac{A}{2} \cdot 2\pi \delta(\nu - \nu_0) + \frac{A}{2} \cdot 2\pi \delta(\nu + \nu_0) = A\pi [\delta(\nu + \nu_0) + \delta(\nu - \nu_0)] \end{aligned}$$



Rys. 6. Transformata Fouriera funkcji $f(t) = A \cos(\omega_0 t)$.

Jak można zobaczyć na Rys. 6 wyraz $\delta(\nu - \nu_0)$ oznacza obserwację w widmie bardzo ostrego pików o charakterze delty Diraca dla częstotliwości równej częstotliwości drgań ($\nu = \nu_0$). Wyraz $\delta(\nu + \nu_0)$ odpowiada analogicznemu pikowi dla $\nu = -\nu_0$, jednak jest to rozwiązanie niefizyczne.

W przypadku sygnału będącego składową więcej niż jednego sygnału okresowego w otrzymanym widmie będą widoczne składowe o różnych częstotliwościach. Na przykład dla rozważanych w niniejszym ćwiczeniu przypadku dudnień, zgodnie ze wzorem (A8) wyprowadzonym w Dodatku A, obserwowany jest sygnał:

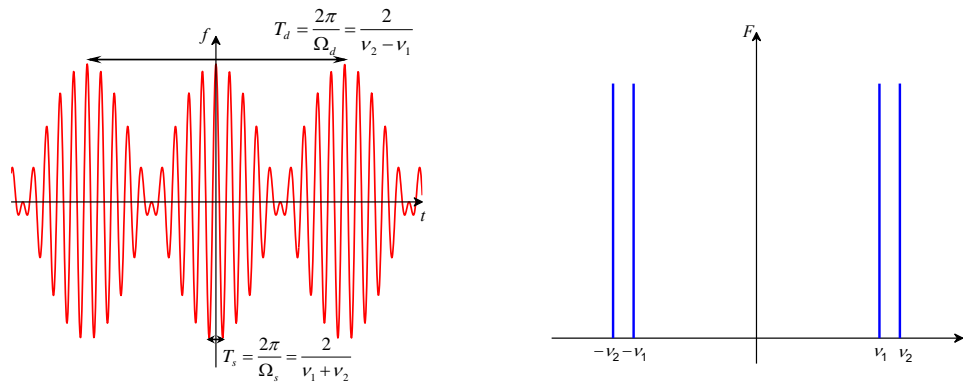
$$\cos(\Omega_d t) \cos(\Omega_s t) = \frac{1}{2} (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) = \frac{1}{2} (\cos(2\pi\nu_1 t) + \cos(2\pi\nu_2 t))$$

gdzie $\Omega_d = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ i $\Omega_s = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Transformata Fouriera takiego sygnału będzie równa:

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (\cos(2\pi\nu_1 t) + \cos(2\pi\nu_2 t)) \cdot e^{-2\pi i \nu t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\nu_1 t) \cdot e^{-2\pi i \nu t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\nu_2 t) \cdot e^{-2\pi i \nu t} dt = \\ &= \pi [\delta(\nu + \nu_1) + \delta(\nu - \nu_1) + \delta(\nu + \nu_2) + \delta(\nu - \nu_2)] \end{aligned}$$

Co oznacza, że w widmie (rys. 7) będą widoczne dwie częstotliwości odpowiadające częstotliwościom własnym drgań wahadła w fazie ($\nu = \nu_1$) i w przeciwfazie ($\nu = \nu_2$).

Należy zauważyć, że transformata Fouriera może być funkcją urojoną (na przykład dla funkcji sinus) lub w ogólności funkcją zespoloną. Zatem przy wykonywaniu wykresów widma wygodne jest przedstawianie jej modułu $|F(\nu)| = \sqrt{Re^2(F) + Im^2(F)}$. Wówczas wykres widma amplitudowego (wykres modułu) pokazuje jakie są amplitudy składowych widmowych sygnału o różnych częstotliwościach.



Rys. 7. Transformata Fouriera funkcji $f(t) = \cos(\Omega_d t) \cos(\Omega_s t) = \frac{1}{2}(\cos(2\pi v_1 t) + \cos(2\pi v_2 t))$.

Ponieważ w praktyce w wyniku pomiarów otrzymujemy dane o charakterze dyskretnym a nie ciągłym, konieczne jest zdefiniowanie dyskretnego odpowiednika ciągłej transformaty Fouriera. W tym celu należy ciągłą całkę zastąpić sumą dyskretnych wartości. Dla N -elementowego ciągu **dyskretną transformatę Fouriera** (ang. **DFT** – *discrete Fourier transform*) definiujemy jako:

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N}nk}, k \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad (B3)$$

gdzie x_0, \dots, x_{N-1} to próbki sygnału. W rezultacie otrzymuje się dyskretny, N -elementowy, rozkład częstotliwości w zakresie $[-v_{max}, v_{max}]$ z rozdzielczością $\Delta v = \frac{2v_{max}}{N}$. Maksymalna możliwa do uzyskania częstotliwość widma wynosi $v_{max} = \frac{1}{2\Delta t} \left(1 - \frac{1}{N}\right)$. Dla dużej liczby danych ($\frac{1}{N} \ll 1$), zakres spektralny jest określony w głównej mierze przez interwał czasowy danych wejściowych. Maksymalna możliwa do uzyskania częstotliwość widma jest określona przez częstotliwość Nyquista i wynosi $v_{max} = \frac{1}{2\Delta t}$. Czyli im mniejszy interwał między danymi, tym w wyniku transformacji Fouriera uzyskuje się szersze spektrum. Dlatego dla sygnałów o stabilnym widmie, gdy zależy nam na dokładnym rozróżnieniu składowych częstotliwościowych stosuje się większe interwały danych wejściowych. Z kolei przy analizie szybkozmiennego widma stosuje się małe interwały danych wejściowych, godząc się na mniej dokładną analizę składowych, zyskując w zamian szerszy zakres spektralny. Z drugiej strony spektrum składa się z takiej samej liczby elementów jak dane wejściowe, tak więc zwiększenie liczby pomiarów poprzez wydłużenie całkowitego czasu pomiaru przy zachowaniu ich interwału czasowego prowadzi do zwiększenia rozdzielczości spektralnej.

Liczenie DFT z definicji wymaga dużych mocy obliczeniowych co mocno ogranicza użycie tego algorytmu. W roku 1965 J. Cooley i J. Tuckey opublikowali pracę pod tytułem „An Algorithm for the machine computation of complex Fourier series” [Math. Comput. **19**, str. 297-301, 1965], w której zaprezentowali szybszy algorytm liczenia dyskretnego transformaty Fouriera powszechnie znany jako **szybka transformata Fouriera** (ang. **FFT** – *fast Fourier transform*). Celem FFT jest zmniejszenie długiego algorytmu obliczeniowego przez jego podział na krótsze i prostsze obliczenia DFT i skrócenie czasu obliczeń. Obecnie do obliczeń transformaty Fouriera najczęściej stosuje się bibliotekę FFTW (ang. *fastest Fourier transform in the West*). Jest to bardzo szybka biblioteka transformat Fouriera wykorzystująca poza standardowymi wariantami algorytmu FFT Cooley – Tukey’a (dobry dla potęg 2), również algorytmy przydatne dla dużych liczb pierwszych (takie jak algorytm FFT Rader’a oraz algorytm FFT Bluestein’a). Więcej informacji na temat tego algorytmu można znaleźć na stronie: <http://fftw.org/>. W przypadku używania FFT należy zwrócić uwagę

na zjawisko tzw. przecieku widma. W rzeczywistych sygnałach zmierzona funkcja oscylująca nie jest określona w całym zakresie czasu, ale jak każdy pomiar, jest ograniczona w czasie. W obliczeniach zakłada się, że część sygnału poddawana transformacji Fouriera stanowi okres sygnału. Prowadzi to do faktu, że zamiast ostrego piku dla częstotliwości odpowiadającej częstotliwości sygnału obserwuje się w widmie obecność innych częstotliwości. Zjawisko przecieku widma można wytłumaczyć jako mnożenie sygnału przez funkcję okna prostokątnego, czyli funkcję, która ma wartość 1 dla próbek branych do transformaty i 0 dla pozostałych. Widmo okna prostokątnego jest proporcjonalne do funkcji sinc, czyli $\sin(x)/x$. Mnożeniu w dziedzinie czasu odpowiada splot w dziedzinie widma. Jeżeli okno prostokątne nie obejmuje wielokrotności okresu sygnału, rzeczywiste widmo sygnału i widmo okna prostokątnego "rozjeżdżają się" przy obliczaniu splotu. Wynikiem tego są zafalowania charakterystyki widmowej. Nie da się tego problemu w pełni uniknąć, ale można zredukować jego skutki stosując funkcje okna inne niż prostokątne (np. takie, których amplituda jest bliska zeru na skraju okna). W przypadku prostego sygnału okresowego przecieki stanowią niewielki problem, ale w przypadku sygnałów o złożonym widmie, przecieki od poszczególnych składowych sumują się z innymi składowymi widmowymi, zniekształcając ich amplitudy.

Opracował: NN.

Uzupełnili: Roman J. Nowak i Andrzej Witowski, 16 stycznia 2017 r,

Aneta Drabińska, 8 kwietnia 2021 r.