ZADANIE 27
WYZNACZANIE STAŁEJ STEFANA-BOLTZMANNA

Cel ćwiczenia

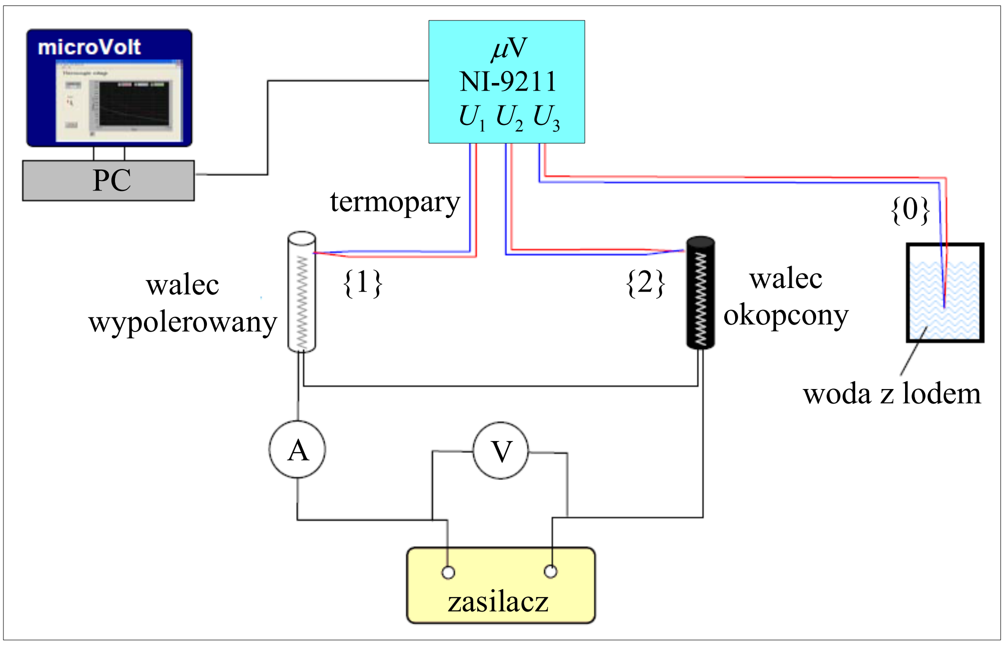
Celem ćwiczenia jest wyznaczenie tzw. stałej Sefana-Boltzmanna występującej w niezwykle ważnym historycznie prawie Stefana-Boltzman określającym promieniowanie pewnego idealnego ciała zwanego ciałem doskonale czarnym.

Masz do dyspozycji:

- dwa walce, jeden srebrzysty, bo wypolerowany, drugi czarny, bo okopcony sadzą, z umieszczonymi w ich wnętrzu grzałkami;
- układ 3 termopar do pomiaru temperatury;
- sterowany komputerowo czterokanałowy mikrowoltomierz NI-9211 wraz z oprogramowaniem;
- zasilacz stałonapięciowy;
- dwa mierniki uniwersalne;
- kable;
- lód i naczynie na lód.

Układ doświadczalny

Rysunek 1 przedstawia układ doświadczalny wykorzystywany w ćwiczeniu. Wewnątrz dwóch wydrążonych aluminiowych walców – wypolerowanego i okopconego – umieszczone są grzałki o identycznych oporach. Moc dostarczaną do walców za pośrednictwem grzałek określana jest przez pomiar natężenia prądu płynącego w obwodzie i napięcia na zaciskach zasilacza. Temperatury walców są mierzone za pomocą termopar {1} i {2}. Termopara {0} jest wykorzystywana do kalibracji pomiaru temperatury. Wykorzystujemy termopary techniczne o takich samych charakterystykach. Złącza termopar są wykonane z miedzi i konstantanu, umieszczone w pancerzu ochronnym. Napięcie termoelektryczne wytwarzane w złączach termopar mierzymy wykorzystując 4-kanałowy cyfrowy mikrowoltomierz NI-9211 obsługiwanego komputerowo programem microVolt. Program rejestruje zmianę napięć w czasie, przedstawia graficznie wyniki pomiarów i umożliwia zapisywanie danych na dysku komputera. W ćwiczeniu wykorzystywane są trzy kanały: po jednym dla każdego z walców i trzeci, wyznaczający punkt odniesienia, którego dostarcza woda z lodem.



Rysunek 1. Układ doświadczalny

Wykonanie ćwiczenia

- Włącz zasilacz – przed pomiarami powinien się nieco „wygrzać".
- Włącz komputer. Uruchom program microVolt i sprawdź, czy potrafisz uruchamiać pomiary, zatrzymywać je i zapisywać wyniki na dysk. Uzgodnij z osobą prowadzącą ćwiczenie sposób przekazania jej wyników pomiarów.
- Zmierz rozmiary walców potrzebne do obliczenia ich powierzchni.
- Upewnij się, że potrafisz posługiwać się miernikiem uniwersalnym przy pomiarze oporności, napięcia i natężenia prądu stałego. Jeśli nie masz pewności – poproś o instruktaż.
- Zmierz oporność grzałek. Jakiego spodziewasz się natężenia płynącego przez nie prądu, jeśli układ zasilany będzie napięciem między 12 V a 28 V? Na jaki zakres należało będzie nastawić mirnik uniwersalny mierzący natężenie prądu?
- Upewnij się, że znasz działanie wszystkich pokręteł i gniazd zasilacza. W szczególności sprawdź, czy potrafisz nastawiać na zasilaczu wybrane napięcie. Jeśli masz kłopoty, poproś osobę prowadzącą ćwiczenie o instrukcję.
- Poproś osobę z obsługi Pracowni o lód – napełnij nim całe naczynie i dolej nieco wody.
- Zestaw układ doświadczalny według schematu na Rysunku 1 z amperomierzem nastawionym na zakres 10 A. **Nie podłączaj układu do zasilacza**! Poproś osobę prowadzącą ćwiczenie o sprawdzenie poprawności połączeń.
- Zanurz stosowną termoparę w wodzie w naczyniu z mieszaniną wody z lodem i odczekaj chwilę.
- Uruchom program microVolt i przez kilka minut zbieraj napięcia termoelektryczne ze wszystkich termopar. Zapisz wyniki a dysku.
- Kierując się wskazaniami woltomierza, nastaw na zasilaczu napięcie 12 V, uruchom program microVolt i podłącz układ do zasilacza. Zbieraj dane do momentu, gdy uznasz, że na wyświetlanym na komputerze wykresie napięcia od czasu widzisz nasycenie. Zapisz wyniki na dysku. Nie jest wykluczone, że czas trwania takiego pomiaru może być nietolerowanie długi. Mając na uwadze fakt wyznaczania napięcia granicznego U_∞ metodą dopasowania, pamiętaj, aby uzbierać dane w obszarze zakrzywiania się zależności $U(t)$, gdyż jedynie wtedy będzie można uzyskać wiarygodną ocenę poszukiwanego parametru.
- Zarejestruj przebiegi czasowe napięć termoelektrycznych dla co najmniej czterech dodatkowych wartości mocy prądu płynącego przez grzałki. W pomiarach nie przekraczaj napięcia 28 V. Im jest wyższe napięcie, tym uzyskanie stanu stacjonarnego wymaga co raz to dłuższego czasu, więc wskazówka z poprzedniego punktu staje się tu co raz to bardziej istotna.

Literatura

- D. Halliday, R. Resnick, *Fizyka*, t. I, II, Warszawa 2001. § 49.1 – 49.3;
- instrukcja programu microVolt: http://pe.fuw.edu.pl/fizelektr/pliki/instr_microVolt.pdf;
- A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2013.

ZADANIE 27
WYZNACZANIE STAŁEJ STEFANA-BOLTZMANNA

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie tzw. stałej Sefana-Boltzmanna występującej w niezwykle ważnym historycznie prawie Stefana-Boltzman, określającym promieniowanie pewnego idealnego ciała zwanego ciałem doskonale czarnym, za którego przyczyną narodziła się teoria kwantów.

Wprowadzenie teoretyczne

Każde ciało o temperaturze powyżej 0 K promieniuje energię w formie fali elektromagnetycznej. Opis tego promieniowania wymaga wprowadzenia dwóch podstawowych pojęć. Pierwsze z nich to ciało doskonale czarne. Ciało doskonale czarne to wyidealizowane ciało, które jest zaprzeczeniem lustra – wszelka fala elektromagnetyczna, która na nie padnie, jest pochłaniana – nic nie jest odbijane. Oczywiście nie oznacza to, że ciało takie wiecznie pochłania energię fali i temperatura jego rośnie w nieskończoność. Zgodnie z pierwszym zdaniem tego paragrafu, ciało to, po „przetrawieniu" pochłoniętego promieniowania, emituje je. Bardzo dobrym przybliżeniem takiego ciała jest sadza lub mały otworek wiodący do wnętrza wnęki wypełnionej polem elektromagnetycznym. Wszelkie inne ciała także promieniują, lecz jednocześnie, w większym lub mniejszym stopniu, także energię odbijają.

Drugie pojęcie to pojęcie zdolności emisyjnej R ciała, która dotyczy ilości ΔE emitowanej energii z tym. W oczywisty sposób ilość wyemitowanej energii jest proporcjonalna od czasu Δt i do powierzchni ΔS emitującego ciała, a to oznacza, że powinniśmy raczej rozważać wielkość $\Delta E/(\Delta t\Delta S)$, a samą ilości energii. Ponadto, całe nasze doświadczenie życiowe podpowiada nam, że ciała o wyższej temperaturze emitują więcej energii niż ciała o niższej temperaturze, co prowadzi do wniosku, że zdolność emisyjna R jest funkcją temperatury T. Jest jednakże jeszcze jeden element, nie tak oczywisty, bo umykający codziennym doznaniom. Otóż okazuje się, że ilość emitowanej energii zależy od długości fali, luźno mówiąc – w niektórych długościach fal ciało emituje więcej energii, w niektórych mniej. Aby to uwzględnić, w zdolności emisyjnej odnosimy się do ilości energii na jednostkę $\Delta\lambda$ długości fali, co wyrażamy jako $\Delta E/(\Delta t\Delta S\Delta\lambda)$ i tak też, przechodząc do wielkości infinitezymalnych, zdolność emisyjną definiujemy jako

$$R(\lambda;T)=\frac{d^3E}{dtdSd\lambda}.$$

Natura matematyczna tej relacji jest taka sama, jaką znajdujemy np. w pojęciu gęstości masy. Tak jak wyznaczenie masy w zadanej objętości wymaga całkowania gęstości masy po tej objętości, tak też wyznaczenie, odniesionej do jednostki czasu i jednostki powierzchni, energii emitowanej w pewnym przedziale $[\lambda_1,\lambda_2]$ długości fal, wymaga całkowania zdolności emisyjnej po tym przedziale:

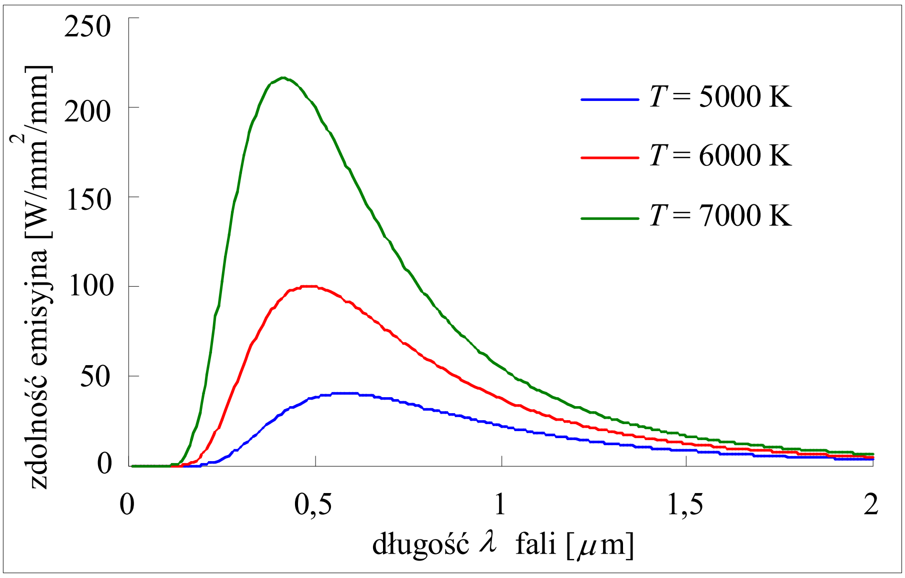
$$\frac{d^2E}{dtdS}=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}R(\lambda;T)\,d\lambda\,.$$

Jedyna różnica polega na tym, że objętość jest wielkością trójwymiarową, podczas, gdy długość fali jest wielkością jednowymiarową. Jeśli interesuje nas całkowita moc jednostki powierzchni łącznie – we wszystkich długościach fal, całkę musimy rozciągnąć na cały zakres długości fal: od zera do nieskończoności.

Zasługą Plancka jest wyprowadzenie, w 1900 roku, postaci wyrażenia na zdolność emisyjną ciała doskonale czarnego:

$$R(\lambda;T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(\exp\dfrac{hc}{\lambda kT}-1\right)},\quad 0<\lambda<\infty,\quad 0<T<\infty\,,$$

zwanego wzorem Plancka – kształt tej zależności przedstawia Rysunek 1. Temperatura T we wzorze Plancka oznacza temperaturę absolutną i musi być wyrażona w kelwinach, wielkość c to prędkość



Rysunek 1. Zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego

światła, k jest tzw. stała Boltzmanna, natomiast h to wprowadzona przez Plancka nowa stała uniwersalną i w uznaniu jego zasług nazwana stałą Plancka.

Całkowitą moc promieniowania jednostki powierzchni we wszystkich długościach fal, czyli strumień $j(T)$ mocy promieniowania, przedstawia tzw. prawo Stefana-Boltznmanna:

$$j(T) = \int_0^\infty R(\lambda;T)\,d\lambda = \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} \approx 5,67\cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}},$$

gdzie σ jest stałą, zwaną stałą Stefana-Boltzmanna.

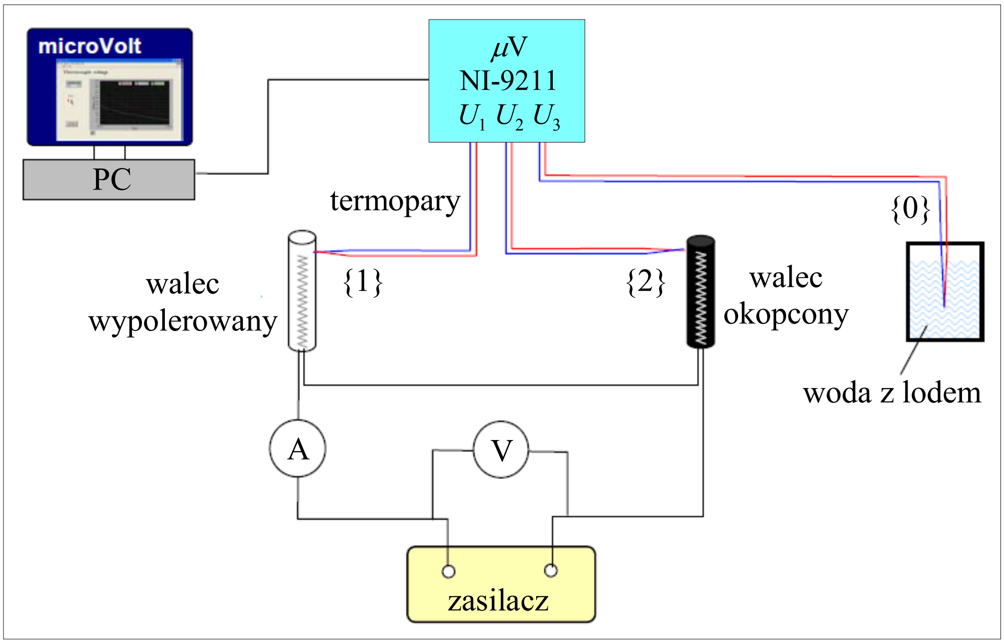
Masz do dyspozycji:

- dwa walce, jeden srebrzysty, bo wypolerowany, drugi czarny, bo okopcony sadzą, z umieszczonymi w ich wnętrzu grzałkami;
- układ 3 termopar do pomiaru temperatury;
- sterowany komputerowo czterokanałowy mikrowoltomierz NI-9211 wraz z oprogramowaniem;
- zasilacz stałonapięciowy;
- dwa mierniki uniwersalne;
- kable;
- lód i naczynie na lód.

Układ doświadczalny i zasada pomiaru

Rysunek 2 ukazuje układ doświadczalny wykorzystywany w ćwiczeniu. Wewnątrz dwóch wydrążonych aluminiowych walców – wypolerowanego i okopconego – umieszczone są grzałki o identycznych oporach. Moc dostarczaną do walców za pośrednictwem grzałek określamy mierząc natężenie prądu płynącego w obwodzie i napięcie na zaciskach zasilacza. Temperatury walców są mierzone za pomocą termopar {1} i {2}. Termopara {0} jest wykorzystywana do kalibracji pomiaru temperatury. Wykorzystujemy termopary techniczne o takich samych charakterystykach. Złącza termopar są wykonane z miedzi i konstantanu, umieszczone w pancerzu ochronnym. Napięcie termoelektryczne wytwarzane w złączach termopar mierzy się za pomocą 4-kanałowego cyfrowego mikrowoltomierz NI-9211 obsługiwany komputerowo programem microVolt. Program rejestruje zmianę napięć w czasie, przedstawia graficznie wyniki pomiarów i umożliwia zapisywanie danych na dysku komputera. W ćwiczeniu wykorzystywane są trzy kanały: po jednym dla każdego z walców i trzeci, wyznaczający punkt odniesienia, którego dostarcza woda z lodem.

Zdolność emisyjna ciała różnego od ciała doskonale czarnego jest mniejsza od zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego – ciała takie zawsze odbijają część podającego na nie promieniowania. Współczynnik proporcjonalności między zdolnością emisyjną ciała rzeczywistego



Rysunek 2. Układ doświadczalny

a ciała doskonale czarnego zależy od rodzaju powierzchni ciał, od temperatury i od długości fali. Przykładowo, w zakresie temperatur 300 - 800 K zdolność emisyjna gładkiej powierzchni aluminiowej wynosi średnio ε = 4% do 8% zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego (dlatego np. wnętrza termosów napyla się cienką warstwą aluminium, dzięki czemu termos w małym stopniu absorbuje ciepło, a głównie je odbija).

Ciało traci energię przez promieniowanie, przewodnictwo i konwekcję, jak również odbiera energię od otoczenia, a bilans mocy $W(T)$ możemy wyrazić wzorem:

$$W(T) = S\sigma\left(T^4 - T_0^4\right) + f(T), \tag{1}$$

gdzie S jest polem powierzchni ciała a T_0 temperatura otoczenia. Pierwszy wyraz odpowiada za promieniowanie, przy czym wyraz zależny od czwartej potęgi temperatury T_0 otoczenia opisuje absorpcję energii pobieranej z otoczenia, natomiast funkcja $f(T)$ opisuje straty wynikające z konwekcji wraz z przewodnictwem.

Niech, zgodnie ze wzorem (1), W_c oznacza moc emitowaną przez czarny walec ogrzany do temperatury T:

$$W_c(T) = S\sigma\left(T^4 - T_0^4\right) + Sf(T),$$

podczas gdy

$$W_s(T) = \varepsilon S\sigma\left(T^4 - T_0^4\right) + Sf(T)$$

opisuje moc emitowaną w tej samej temperaturze przez walec srebrzysty. Zauważmy, że różnica mocy emitowanej

$$\Delta W(T) = W_c(T) - W_s(T) = (1-\varepsilon)S\sigma\left(T^4 - T_0^4\right) \tag{2}$$

przez walec okopcony i srebrzysty, o takich samych temperaturach powierzchni T, nie zależy od procesów transportu energii przez konwekcję i przewodnictwo. Jeżeli zatem wyznaczymy doświadczalnie zależność $\Delta W(T)$ od temperatury T, to będziemy mogli dotrzeć do stałej Stefana-Boltzmanna.

Idea stojąca za pomiarem odwołuje się do następującego faktu. Po włączeniu przepływu prądu, walce nagrzewają się, aż osiągną stan stacjonarny oznaczający brak zmian w układzie w czasie. W stanie tym moc emitowana przez każdy z walców równa jest mocy dostarczanej do każdego z nich i ustala się, inna dla każdego walców, temperatura graniczna T_∞. Zmieniając dostarczą moc i dokonując dla każdej z nich pomiaru temperatur stanu stacjonarnego, znajdziemy zależność mocy wyemitowanej od temperatury dla tych ciał. Dokonując odpowiednich interpolacji, abyśmy mogli wyznaczyć moc emitowaną przez każdy z walców w tej samej temperaturze, określimy zależność (2) różnicy mocy od temperatury T.

Wykonanie ćwiczenia

- Włącz zasilacz – przed pomiarami powinien się nieco „wygrzać".
- Włącz komputer. Uruchom program microVolt i sprawdź, czy potrafisz uruchamiać pomiary, zatrzymywać je i zapisywać wyniki na dysk. Uzgodnij z osobą prowadzącą ćwiczenie sposób przekazania jej wyników pomiarów.
- Zmierz rozmiary walców potrzebne do obliczenia ich powierzchni.
- Upewnij się, że potrafisz posługiwać się miernikiem uniwersalnym przy pomiarze oporności, napięcia i natężenia prądu stałego. Jeśli nie masz pewności – poproś o instruktaż.
- Zmierz oporność grzałek. Jakiego spodziewasz się natężenia płynącego przez nie prądu, jeśli układ zasilany będzie napięciem między 12 V a 28 V? Na jaki zakres należało będzie nastawić mirnik uniwersalny mierzący natężenie prądu?
- Upewnij się, że znasz działanie wszystkich pokręteł i gniazd zasilacza. W szczególności sprawdź, czy potrafisz nastawiać na zasilaczu wybrane napięcie. Jeśli masz kłopoty, poproś osobę prowadzącą ćwiczenie o instrukcję.
- Poproś osobę z obsługi Pracowni o lód – napełnij nim całe naczynie i dolej nieco wody.
- Zestaw układ doświadczalny według schematu na Rysunku 2 z amperomierzem nastawionym na zakres 10 A. **Nie podłączaj układu do zasilacza**! Poproś osobę prowadzącą ćwiczenie o sprawdzenie poprawności połączeń.
- Zanurz stosowną termoparę w wodzie w naczyniu z lodem i odczekaj chwilę.
- Uruchom program microVolt i przez kilka minut zbieraj napięcia termoelektryczne ze wszystkich termopar. Czy odczyty są stabilne? Zapisz wyniki a dysku.
- Kierując się wskazaniami woltomierza, nastaw na zasilaczu napięcie 12 V, uruchom program microVolt i podłącz układ do zasilacza. Zbieraj dane do momentu, gdy uznasz, że na wyświetlanym na komputerze wykresie napięcia od czasu widzisz nasycenie. Zapisz wyniki na dysku. Nie jest wykluczone, że czas trwania takiego pomiaru może być nietolerowanie długi. Mając na uwadze fakt wyznaczania napięcia granicznego U_∞ metodą dopasowania zależności (3) pamiętaj, aby uzbierać dane w obszarze zakrzywiania się zależności $U(t)$, gdyż jedynie wtedy będzie można uzyskać wiarygodną ocenę poszukiwanego parametru.
- Zarejestruj przebiegi czasowe napięć termoelektrycznych dla co najmniej czterech dodatkowych wartości mocy prądu płynącego przez grzałki. W pomiarach nie przekraczaj napięcia 28 V. Im jest wyższe napięcie, tym uzyskanie stanu stacjonarnego wymaga co raz to dłuższego czasu, więc wskazówka z poprzedniego punktu staje się tu co raz to bardziej istotna.

W trakcie całego czasu trwania pomiarów dbaj, by w naczyniu zawierającym mieszaninę wody z lodem było zawsze sporo lodu. Jeśli lód się roztopi i powstała woda zacznie się ogrzewać, napięcia rejestrowane z termopar {1} i {2} będą mniejsze od faktycznych, co doprowadzi do fałszywego określenia temperatury walców – wyznaczona temperatura będzie mniejsza od faktycznej.

Ukazany tu pomiar jest trudny między innymi dlatego, że układ jest czuły na zawirowania powietrza – walce można łatwo schłodzić i stan stacjonarny zaburzyć otwierając np. okno. Dlatego nie zaleca się wykonywania czynności, które mogą prowadzić do mieszania powietrza w obszarze aparatury pomiarowej w trakcie trwania pomiarów.

Analiza wyników pomiarów

- Z pomiarów napięcia wykonanych przy odłączonym zasilaczu wyznacz średnie wartości napięć termoelektrycznych $U_{\{1\}}$ i $U_{\{2\}}$, wraz z ich niepewnościami, na termoparach podłączonych do walców oraz napięcia $U_{\{0\}}$, wraz z niepewnością, dla termopary zanurzonej w wodzie z lodem. Należy przyjąć, że maksymalny błąd pomiaru napięcia U mikrowoltomierzem NI-9211 wynosi:
$$\Delta_U = 0{,}1\% U + 5\ \mu\text{V}.$$
- Dla każdego napięcia zasilania grzałek z zarejestrowanego przebiegu czasowego napięcia

termoelektrycznego termopar {1} i {2} należy wyznaczyć wartość graniczną U_∞, odpowiadającą napięciu stanu stacjonarnego, do którego doszedłby układ, gdybyśmy czekali dostatecznie długo. Ponieważ czas trwania pomiaru jest ograniczony, więc z fragmentu przebiegu zależności $U(t)$ należy uzyskać wartość graniczną U_∞, dopasowując fenomenologiczną zależność:

$$U(t) = U_\infty - U_0 \exp(-\lambda t), \tag{3}$$

gdzie U_∞, U_0 oraz λ to parametry dopasowania.

- Wyznaczywszy wielkość U_∞, graniczną temperaturę T_∞ obliczamy z ogólnej zależności kalibracyjnej $T(U)$, podanej przez producenta termopar:

$$T(U) = a + b(U - U_0) + c(U - U_0)^2, \tag{4}$$

gdzie: a = 1,75 °C, b = 0,02385 °C /μV oraz c = –2,6072·10^{-7} °C /μV^2. Wielkość U_0 jest parametrem krzywej (4) i jego wartość należy wyznaczyć wykorzystując uzyskany wcześniej wynik $U_{\{0\}}$ kalibracyjnego pomiaru napięcia, wykonanego za pomocą termopary {0} zanurzonej w mieszaninie wody z lodem, a więc w nominalnej temperaturze 0°C i rozwiązując równanie:

$$a + b\left(U_{\{0\}} - U_0\right) + c\left(U_{\{0\}} - U_0\right)^2 = 0.$$

Należy przyjąć, że dopuszczalny, maksymalny błąd pomiaru temperatury T, wynikający z zastosowania zależności (4), wynosi

$$\Delta_T = 0{,}5\%\ T + 0{,}5\ °\mathrm{C}.$$

W końcowej niepewności temperatury należy uwzględnić niepewność wynikającą z tej zależności, a także przyczynki wynikające z niepewności wyznaczonego napięcia U_∞ i stałej U_0.

- Porównaj zmierzone napięcia $U_{\{1\}}$ i $U_{\{2\}}$ – ich zgodność jest dobrym testem identyczności zastosowanych termopar. Niezależnie od wyniku tego porównania, wyznacz średnią obu wartości, przypisz jej rozsądną wartość niepewności, a wykorzystując formułę kalibracyjną (4) i wyznacz, wraz z niepewnością, temperaturę pokojową T_0 walców.
- Z pomiarów napięcia V i natężenia I prądu dla każdego z napięć zasilających układ, oblicz moc $W = VI$ pobieraną z zasilacza. **Pamiętaj**, że w układzie Rysunku 2 woltomierz wskazuje łączne napięcie na obu grzałkach. Z założenia o identyczności grzałek wynika, że napięcie na każdej z nich jest równe połowie wskazań woltomierza.
- Wyznaczenie stałej Stefana-Boltzmanna wymaga znajomości wartości różnicy (2), a ponieważ każdy z walców, przy tej samej mocy prąd płynącego przez grzałki, osiąga inną temperaturę T_∞ stanu stacjonarnego, więc musimy skorzystać ze związku (1). Postać funkcji $f(T)$ jest dość złożona:

$$f(T) = a(T - T_0) + b(T - T_0)^\beta,$$

gdzie wyraz liniowy odpowiedzialny jest za konwekcję, a potęgowy za przewodnictwo i zależy od nieznanych parametrów a, b oraz β, które należałoby dopasować do danych. Jednakże przy jedynie kilku pomiarach wystarczy ograniczyć się do roboczej formuły w postaci zależności kwadratowej:

$$\begin{aligned} W_s(T) &= A_s T^2 + B_s T + C_s \\ W_c(T) &= A_c T^2 + B_c T + C_c \end{aligned} \tag{5}$$

z A_s, B_s, C_s, A_c, B_c i C_c parametrami dopasowania odpowiednio dla walca srebrzystego i czarnego. Przy większej liczbie danych warto popróbować zależności kubicznej lub nawet kwartycznej.

Można by sądzić, że w miejsce zależności (5), właściwsza byłaby postać

$$W(T) = A(T - T_0)^2 + B(T - T_0),$$

zależna jedynie od dwóch, a nie trzech parametrów i gwarantująca brak emisji netto w temperaturze pokojowej przy braku zasilania grzałek. Wydaje się jednak, że należy pozostać przy pierwotnej propozycji, gdyż sama zależność paraboliczna jest jedynie przybliżona, wiec warto zachować nieco więcej elastyczności, nawet za cenę drobnej nielogiczności.

W analizie prowadzącej do wyznaczenia ocen parametrów zależności (5) należy przyjąć, że pomiar miernikiem CHY 38 napięcia V zasilającego grzałki odbywa się z dopuszczalnym, maksymalny błędem

$$\Delta_V = 0{,}5\%\ V + 1 \text{ cyfra},$$

natomiast pomiar tymże miernikiem na zakresie 10 A prądu I płynącego przez grzałki odbywa się z dopuszczalnym, maksymalnym błędem

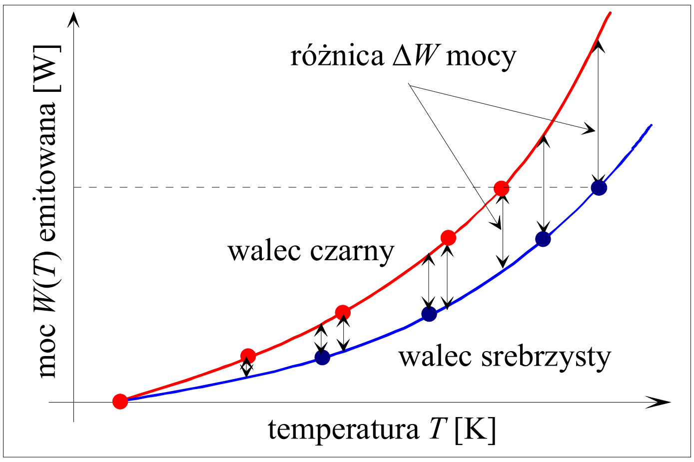
$$\Delta_I = 3\%\ I + 1 \text{ cyfra}.$$

Należy także upewnić się, że niepewność mocy wynikająca z przeniesienia, za pomocą (5), niepewności temperatury jest istotnie mniejsza od niepewności mocy wynikającej z niepewności napięcia na grzałkach i płynącego przez nie prądu.

- Wykorzystując wyznaczone formuły interpolacyjne (5), należy obliczyć dla każdej wartości mocy, przy której prowadzono pomiary, różnicę

$$\Delta W = A_c T^2 + B_c T + C_c - \left(A_s T^2 + B_s T + C_s\right) \tag{6}$$

mocy emitowanej przez walce w tej samej temperaturze, jak ilustruje to schematycznie Rysunek 3.



Rysunek 3. Wyznaczanie różnicy ΔW mocy

Do uzyskanego zestawu różnic mocy należy, wykorzystując wyniki obliczeń ze wzoru (6), dopasować zależność (2) w postaci $\Delta W = ax + b$, gdzie x jest czwartą potęgą temperatury absolutnej. Współczynnik a nachylenia umożliwia wyznaczenie stałej Stefana-Boltzmanna. W obliczeniach przyjmij, że parametr ε wynosi $0{,}06 \pm 0{,}01$.

Zauważmy, jako ciekawostkę, że współczynnik b zawiera temperaturę T_0 otoczenia i może być interesujące porównanie (wystarczy jakościowe) temperatury otoczenia wyznaczonej z tego współczynnika z otrzymaną wcześniej z odczytów napięcia z termopar {1} oraz {2}. Może to nawet sugerować wykonanie dodatkowego dopasowania zależności proporcjonalnej $\Delta W = ax$, gdzie, tym razem $x = T^4 - T_0^4$. Jako ostateczne wyniki należy jednak podać te wywiedzione z pełnej zależności liniowej, jako że w tym doświadczeniu część analizy danych odwołuje się do zależności fenomenologicznych, a ich niedostatek można, być może, zniwelować wprowadzając dodatkowe, swobodne parametry.

I tu, tak jak w poprzednim punkcie, należy się upewnić, że niepewność różnicy mocy wynikająca z przeniesienia niepewności temperatury jest istotnie mniejsza od niepewność różnicy (6).

Dodatkowe uwagi odnośnie do raportu

Jeśli na którymś z etapów analizy prowadzisz dopasowanie modelowej zależności do danych metodą najmniejszych kwadratów, **obowiązkowo** podaj jawną formę wielkości minimalizowanej, jako że postać ta jednoznacznie definiuje, który z wariantów metody wybierasz, a więc jaką postać przybierają wzory na oceny nieznanych współczynników modelowej zależności oraz ich niepewności standardowe i nie musisz cytować stosownych wzorów dla tych obiektów.

W raporcie zamieść, w stosownie dobranych tabelach, wszystkie surowe wyniki pomiarów tak, aby sięgając jedynie do raportu i bez potrzeby odwoływania się do protokołu z doświadczenia można było wykonać pełną i niezależną analizę Twych danych. Zadbaj o wierne przeniesienie zmierzonych wartości do raportu.

Nim przygotujesz raport, zaznajom się z uwagami zawartymi w opracowaniu *Instrukcja - Jak pisać raport końcowy* oraz z przykładową realizacją tych uwag w postaci *Przykładowy raport końcowy* jakie zamieszczone są na stronie http://anipw.igf.fuw.edu.pl Pracowni wstępnej. Wymagania ukazane w tych opracowaniach będą bezwzględnie egzekwowane przy sprawdzaniu Twego raportu. W szczególności pamiętaj o konwencji odnoszącej się do precyzji przedstawiania niepewności, a co za tym idzie, również wartości oceny wielkości zmierzonej.

Absolutnie zalecane jest świadome przyjrzenie się redakcji tekstu a także tabel, rysunków i wzorów, sposobów ich numerowania, tytułowania i opisywania w dowolnym, ale wydanym przez uznane wydawnictwo, akademickim podręczniku do fizyki, jak również zajrzenie do kilku publikacji w różnych czasopismach naukowych, co może ułatwić podjęcie decyzji w kwestii podziału Twego raportu na części.

Literatura

- D. Halliday, R. Resnick, *Fizyka*, t. I, II, Warszawa 2001. § 49.1 – 49.3;
- instrukcja programu microVolt: http://pe.fuw.edu.pl/fizelektr/pliki/instr_microVolt.pdf;
- A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2013.

Pytania i zadania definiujące wymagania do ćwiczenia

Problem 1. Co to jest zdolność emisyjna ciała? Podaj tylko definicję – bez wzoru.
Problem 2. Co opisuje prawo Stefana-Boltzmanna? Podaj tylko słowne wyjaśnienie – bez wzoru.
Problem 3. Co oznacza termin *stan stacjonarny*?
Problem 4. Jaki rodzaj promieniowania emitują walce?
Problem 5. Opisz, jakościowo, zachowania się temperatury ciała w czasie, które ogrzewane ze stała mocą, emitowałoby promieniowanie także ze stałą, niezależną od jego temperatury, mocą.

Pytania i zadania przybliżające, uzupełniające lub poszerzające treść ćwiczenia

Problem 6. Wyznacz matematyczną formę zależności temperatury ciała od czasu, gdyby ciało to miało dostarczane stałą w czasie moc i emitowałoby ono energię także ze stałą mocą, niezależną od jego temperatury.
Problem 7. Płaska i cienka płytka, zachowująca się jak ciało doskonale czarne, ustawiona jest prostopadle do kierunku padania promieni słonecznych ponad atmosferą ziemską. Oblicz temperaturę płytki po jej ustaleniu się. Przyjmij, że płytka nie odbiera promieniowania emitowanego przez Ziemię. Ilość energii słonecznej docierającej do Ziemi w jednostce czasu do jednostki powierzchni to tzw. stała słoneczna S_S która wynosi 1400 W/m^2, a stała Stefana-Boltzmanna σ to $5{,}7\cdot10^{-8}$ W/(m$^2\cdot$K^4).

Opracował: NN.

Uzupełnił: Roman J. Nowak, 4 stycznia 2017.

UZUPEŁNIENIE

Analiza danych w tym ćwiczeniu jest dość wymagająca, gdyż odwołuje się do złożonych metod zarówno analizy numerycznej jak i statystycznej. Pierwszy aspekt dotyczy dopasowania zależności (3), co wymaga zastosowania profesjonalnych programów wykorzystujących metodę najmniejszych kwadratów w zastosowaniu do problemu nieliniowego. Drugi, statystyczny, aspekt znajdujemy w wyznaczeniu niepewności mocy wyznaczanej z formuł (5). Standardowy program kursu analizy niepewności pomiarów dotyka tego zagadnienia, dyskutując ją w szczegółach jedynie dla zależności wyrażonej linią prostą, dlatego stosowną, zapewne, rzeczą będzie zastosowanie ukazanych w kursie procedur do zależności parabolicznej, czemu poświęcamy to UZUPEŁNIENIE.

Wprowadzenie

Zakładamy, że dysponujemy formułą $\eta = \mu(x;\boldsymbol{\theta})$ wiążącą zmienną zależną η (np. moc W) ze zmienną niezależną x (np. temperaturą T) w której $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$ to układ m parametrów. Dla n zadanych ścisłe wartości x_i zmiennej niezależnej, w wyniku niezależnych pomiarów wielkości $\eta_i = \mu(x_i;\boldsymbol{\theta})$, otrzymujemy n ocen y_i, z odchyleniami standardowymi σ_i. Sposob oceny nieznanych parametrów θ_i dostarcza metoda najmniejszych kwadratów, w ramach której minimalizowana jest, względem tychże parametrów, ważona odwrotnościami kwadratów odchyleń standardowych σ_i suma kwadratów różnic wartości y_i i wartości modelowych $\mu(x_i;\boldsymbol{\theta})$:

$$R(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i - \mu(x_i;\boldsymbol{\theta})\right)^2}{\sigma_i^2} .$$

W opisie statystycznym, obok wartości y_i, traktowanych jako wartości wylosowane z pewnego, być może nieznanego rozkładu, mamy także odchylenia standardowe σ_i zmiennych y_i. Należy podkreślić, że w praktyce, w miejsce tych odchyleń stosujemy, zazwyczaj, niepewności standardowe u_i.
W pozostałej części tego UZUPEŁNIENIA będziemy przyjmowali modelowe założenie o znajomości odchyleń standardowych. Czytelnik powinien być świadom, że zastąpienie tych odchyleń niepewnościami nada niejaką nieefektywność wyznaczonym wielkościom.

We wszystkich naszych dalszych rozważaniach przyjmiemy, że zgodnie z intuicyjnie zrozumiałym wymogiem, liczba n pomiarów jest większa od liczby m nieznanych parametrów.

Formuła liniowa

Zaczniemy od przypomnienia, że w kontekście metody najmniejszych kwadratów problemem liniowym nie nazywamy liniowej zależności między zmienną zależną η, a zmienną niezależną x, lecz zależność, w której relacja między zmienną niezależną a zmienną zależną jest *liniowa w nieznanych parametrach* i ma postać:

$$\eta = \mu(x;\boldsymbol{\theta}) = \varphi_1(x)\theta_1 + \varphi_2(x)\theta_2 + \cdots + \varphi_m(x)\theta_m ,$$

gdzie wielkości $\varphi_i(x)$ są w pełni znanymi, liniowo niezależnymi funkcjami – są to zazwyczaj kolejne potęgi wielkości x, ale mogą to być też np. funkcje Bessela lub wielomiany ortogonalne.

Dla n wartości x_i otrzymujemy n wartości $\eta_i = \mu(x_i;\boldsymbol{\theta})$

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x_i)\theta_j, \quad i = 1,2,\ldots,n ,$$

które w pomiarze znajdujemy jako wielkości y_i. Zespół tych równości możemy zapisać zwarcie w formie macierzowej

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_m(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_m(x_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_m \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\theta} ,$$

a jeśli jeszcze do tego zdefiniujemy:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

to i samą ważoną sumę kwadratów reszt będziemy mogli zgrabnie zapisać w postaci:

$$R(\boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{y} - \Phi\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{U}^{-1} (\boldsymbol{y} - \Phi\boldsymbol{\theta}).$$

Oceny parametrów i ich wariancje i kowariancje

Standardowe metody wyznaczania minimum prowadzą do liniowego układu równań na nieznane parametry:

$$\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi \boldsymbol{\theta} = \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{y},$$

a jeśli macierz Φ, wymiaru $n \times m$, jest rzędu m, czyli jej wszystkie kolumny są liniowo niezależne, to oceny $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ nieznanych parametrów wyznaczamy ze związku:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi\right)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{y}. \tag{7}$$

W dalszej części tego UZUPEŁNIENIA stosować będziemy notację „z daszkiem" dla ukazania oceny dyskutowanej wielkości.

Jeśli pomiary są nieobciążone, czyli jeśli $\mathcal{E}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\eta} = \Phi\boldsymbol{\theta}$, to i ocena $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ jest nieobciążona:

$$\mathcal{E}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \left(\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi\right)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \mathcal{E}(\boldsymbol{y}) = \left(\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi\right)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}.$$

Macierz wariancji ocen parametrów znajdujemy z definicji:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} &= \mathcal{E}\left(\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right)^T\right) \\
&= \mathcal{E}\left(\left(\left(\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi\right)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{y} - \left(\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi\right)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\eta}\right)\left(\left(\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi\right)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{y} - \left(\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi\right)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\eta}\right)^T\right) \\
&= \left(\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi\right)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \mathcal{E}\left((\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\eta})^T\right) \mathbf{U}^{-1} \Phi \left(\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi\right)^{-1} = \left(\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że wyznaczając oceny poszukiwanych parametrów otrzymujemy, jako „produkt uboczny", ich macierz wariancji.

Jak widzimy, w przypadku, gdy nieznane parametry występują w formule w sposób liniowy, minimalizację można przeprowadzić analitycznie i uzyskać zamknięte wyrażenia zarówno na oceny $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ nieznanych parametrów jak i ich macierz wariancji $\mathbf{V}$. Jeśli jednak parametry θ_i pojawiają się w zależności $\eta = \mu(x;\boldsymbol{\theta})$ w sposób nieliniowy, rozwiązanie problemu nie ma formy zamkniętej, a sama minimalizacja ważonej sumy kwadratów reszt wymaga, zazwyczaj, zastosowania wyspecjalizowanych metod numerycznych.

Musimy także zwrócić uwagę na fakt, że jeśli macierz $\mathbf{U}$ utworzymy z niepewności pomiarów wielkości y_i, a nie ich odchyleń standardowych, to macierz $\mathbf{V}$ przestaje być macierzą wariancji i kowariancji, a staje się macierzą ocen tych wielkości.

Wariancja zmiennej zależnej

Istnienie wyrazów pozadiagonalnych w macierzy $\mathbf{V}$ powoduje, że oceny $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ nieznanych parametrów w zależności $\eta = \mu(x;\boldsymbol{\theta})$ przestają być statystycznie niezależne i „szkolny" wzór na propagację błędów w celu obliczenia odchylenia standardowego $\sigma_{\hat{\eta}}$ wielkości $\hat{\eta} = \mu\left(x;\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ w punkcie x wymaga korekty. Zamiast niego, korzystamy ze związku:

$$\sigma_{\hat{\eta}}^2 = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial \mu}{\partial \theta_i} \mathrm{V}_{ij} \frac{\partial \mu}{\partial \theta_j} = \sum_{i,j=1}^{m} \varphi_i(x) \mathrm{V}_{ij} \varphi_j(x), \tag{8}$$

gdzie diagonalne elementy V_{ii} macierzy $\mathbf{V}$ to wariancje ocen parametrów θ_i, a elementy pozadiagonalne to ich kowariancje.

Przykład: zależność postaci $\eta = ax^2 + bx + c$

Dla przykładu rozważmy dopasowanie do danych liniowej zależności w postaci paraboli $\mu(x;\boldsymbol{\theta}) = ax^2 + bx + c$, kiedy to:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^{-1} = \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi = \begin{bmatrix} S_{4x} & S_{3x} & S_{2x} \\ S_{3x} & S_{2x} & S_x \\ S_{2x} & S_x & S \end{bmatrix}, \quad \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} S_{2xy} \\ S_{yx} \\ S_y \end{pmatrix},$$

gdzie:

$$S_{4x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^4}{\sigma_i^2}, \quad S_{3x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{\sigma_i^2}, \quad S_{2x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, \quad S_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2}, \quad S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2},$$

$$S_{2xy} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 y_i}{\sigma_i^2}, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}, \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\sigma_i^2}.$$

Oceny $\hat{a}, \hat{b}$ oraz $\hat{c}$ parametrów a, b oraz c znajdujemy ze związku (7)

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{4x} & S_{3x} & S_{2x} \\ S_{3x} & S_{2x} & S_x \\ S_{2x} & S_x & S \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_{2xy} \\ S_{yx} \\ S_y \end{pmatrix},$$

przy czym macierz wariancji tych ocen wynosi:

$$\mathbf{V}\left[\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}\right] = \begin{bmatrix} \mathrm{V}(\hat{a}) & \mathrm{cov}(\hat{a}, \hat{b}) & \mathrm{cov}(\hat{a}, \hat{c}) \\ \mathrm{cov}(\hat{a}, \hat{b}) & \mathrm{V}(\hat{b}) & \mathrm{cov}(\hat{b}, \hat{c}) \\ \mathrm{cov}(\hat{a}, \hat{c}) & \mathrm{cov}(\hat{b}, \hat{c}) & \mathrm{V}(\hat{c}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{4x} & S_{3x} & S_{2x} \\ S_{3x} & S_{2x} & S_x \\ S_{2x} & S_x & S \end{bmatrix}^{-1}.$$

Wariancję oceny $\hat{\eta}(x) = \hat{a}x^2 + \hat{b}x + \hat{c}$ w punkcie x wyznaczamy za pomocą (8):

$$\mathrm{V}(\hat{\eta}(x)) = \begin{pmatrix} x^2, & x, & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{V}(\hat{a}) & \mathrm{cov}(\hat{a}, \hat{b}) & \mathrm{cov}(\hat{a}, \hat{c}) \\ \mathrm{cov}(\hat{a}, \hat{b}) & \mathrm{V}(\hat{b}) & \mathrm{cov}(\hat{b}, \hat{c}) \\ \mathrm{cov}(\hat{a}, \hat{c}) & \mathrm{cov}(\hat{b}, \hat{c}) & \mathrm{V}(\hat{c}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Uwaga końcowa

Związek (9) pozwala wyznaczyć niepewność mocy (5) emitowanych przez indywidualne walce, jednakże nowy problem statystyczny pojawia się, gdy przejdziemy do wyznaczenia niepewność różnicy (6) mocy. Powinniśmy tu być świadomi, że współczynniki parabolicznej zależności zarówno zadanej odjemną jak i odjemnikiem pochodzą z tych samych danych doświadczalnych – mocy obliczonych ze znanych napięć i natężeń prądu, a więc są skorelowane i to nie tylko w ramach jednej formuły, ale także i ze współczynnikami drugiej formuły. Wyznaczenie niepewności różnicy staje się w tych warunkach dość złożone. Sugeruje się, aby, na dobre czy na złe, zignorować ten problem i każdą z mocy występującą w różnicy potraktować jako niezależną.