

ZADANIE 59

WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA ZAŁAMANIA POWIETRZA
PRZY UŻYCIU INTERFEROMETRU MICHELSONA

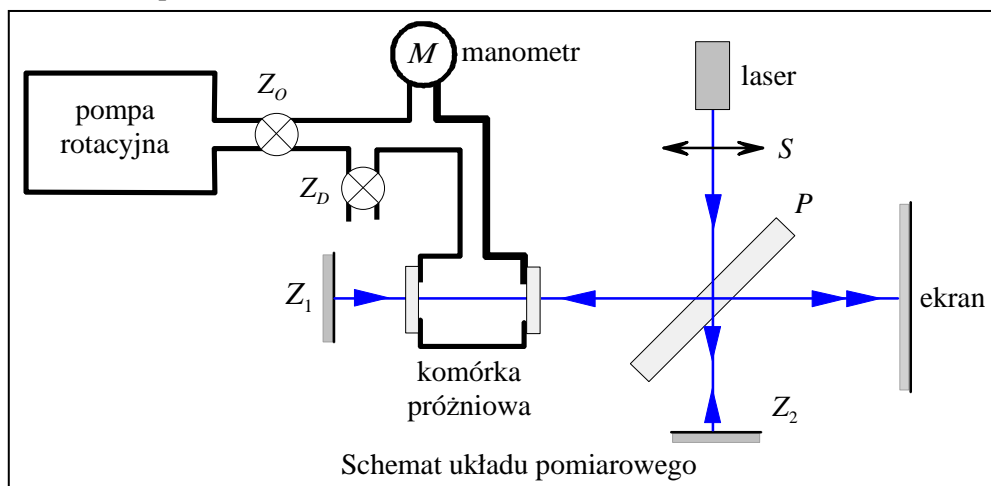
Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z interferometrem Michelsona, jako ważnym przyrządem optycznym, sprawdzenie liniowej zależności współczynnika załamania od ciśnienia i ocena wartości tego współczynnika w warunkach normalnych dla powietrza w laboratorium.

Masz do dyspozycji

Układ pomiarowy przedstawiony jest na rysunku. Składa się on z:

- źródła światła w postaci lasera He-Ne emitującego światło o długości fali 632,8 nm,
- interferometru Michelsona, na który składają się:
 - zwierciadła Z_1 i Z_2 i
 - płytką światłodzielącą P ,
- aparatury próżniowej, w skład, której wchodzi:
 - pompa rotacyjna,
 - komórka próżniowa,
 - manometr M ,
 - zawór Z_o odcinający komórkę pomiarową od pompy,
 - zawór Z_D dozujący zaopatrzony w śrubę mikrometryczną umożliwiającą precyzyjną zmianę ciśnienia w komórce pomiarowej,
 - ruchomy ekran i jako opcja
 - soczewkę S do skupiania wiązki lasera.



Ustawienie interferometru

- W porozumieniu z asystentem - **ostrożnie** umieść interferometr na miejscu przedstawionym Rys. 1. Uważaj by nie porysować luster!
- Usuń soczewkę z drogi wiązki (jeśli była). Włącz laser i upewnij się, że wiązki biegną jak na Rys. 1.
- Przyjrzyj się wiązkom z obu ramion na ekranie. Zidentyfikuj je metodą zasłaniania ramion interferometru małą kartką papieru oraz poruszania lustrem Z_1 za pomocą śrubek.
- Ustaw wiązki. W tym celu zaobserwuj dowolnie wybrany charakterystyczny mały szczegół powtarzający się w obu wiązках, np. cień zabrudzenia na laserze lub ostrze ołówka wstawione w wiązkę *przed* interferometrem. Pokręcając delikatnie śrubkami lustra Z_1 , nałóż ten szczegół w obu wiązках na ekranie ustawionym jak najdalej (najlepiej na drugim końcu pomieszczenia).
- Następnie popraw łagodnie ustawienie, aby na ekranie odległość dwóch kopii wybranego szczegółu bezpośrednio za interferometrem i bardzo daleko, była dokładnie taka sama (wykorzystaj siatkę milimetrową na ekranie). Celem tego postępowania jest ustawienie obu wiązek *bardzo dokładnie równoległe do siebie*.
- Jeśli wykonałeś powyższą procedurę starannie, zobaczysz prążki interferencyjne na ekranie. Zobacz, że ten obraz jest bardzo czuły na dotykanie interferometru czy dowolnej ze śrub.

Wykonanie pomiarów

- Suwmiarką zmierz długość boków komórki próżniowej w jej rogach. Zrób to ostrożnie, by nie porysować okienek. Zwróć uwagę na to, że komórka nie jest dokładnie prostopadłościenna.
- Ustaw interferometr i ekran tak, aby wyraźnie widzieć *jednocześnie* prążki i manometr.
- Zamknij zawór Z_D dozujący powietrze. Po zakręceniu stawia on opór – nie siłuj się z nim!
- Włącz pompę próżniową i otwórz elektromagnetyczny zawór Z_O odcinający (umieszczony na podstawie przełącznik przestaw w położenie dolne – winna zapalić się lampka kontrolna).
- W ciągu maksimum 10-20 s wskazówka manometru powinna osiągnąć położenie oznaczone jako -1 . Jeśli mimo długotrwałego pompowania wskazówka manometru nie wskazuje tego położenia, to układ jest nieszczelny; najczęstszą przyczyną jest pozostawienie otwartego zaworu Z_D – dokręć go. Po uzyskaniu właściwej próżni należy zamknąć zawór Z_O odcinający (wyłącznik w położeniu górnym) i można wyłączyć pompę. Zwróć uwagę na zachowanie obrazu interferencyjnego w trakcie odpompowywania układu.

UWAGA: Operowanie zaworem odcinającym Z_O częściej niż raz na minutę może spowodować jego uszkodzenie.

- Odkręć nieco zawór Z_D – obserwuj obraz i manometr; słuchaj swojego układu.
- Zamknij zawór Z_D i odpompuj komórkę. Za pomocą śruby umieszczonej w obudowie zwierciadła Z_2 ustaw na ekranie jakiś charakterystyczny obraz interferencyjny (np. wybierz taki, w którym w wybranym miejscu obrazu pojawia się minimum interferencyjne).
- Ustal procedurę pomiaru, która umożliwi sporządzenie zależności dodatkowej fazy wprowadzanej przez gaz od jego ciśnienia wskazywanego przez manometr. Głównym elementem tej procedury winna być rejestracja wskazania manometru, gdy odtwarza się na ekranie wybrany wcześniej obraz interferencyjny. Rejestrując ciśnienie należy jednocześnie notować numer prążka. Pomiar należy prowadzić aż do momentu, gdy ciśnienie powietrza w komórce zrówna się z ciśnieniem atmosferycznym. Ponieważ manometr jest niedokładny, wyznacz także całkowitą fazę od próżni aż do ciśnienia atmosferycznego.
- Wykonaj kilka serii pomiarowych, uzyskaj precyzję pomiaru fazy nie gorszą niż 2π .
- Odczytaj temperaturę powietrza w pokoju pomiarowym. Zakładamy, że temperatura powietrza w komórce jest równa temperaturze w pokoju pomiarowym.
- Na barometrze umieszczonym w korytarzu pracowni odczytaj panujące aktualnie ciśnienie atmosferyczne p_a . Barometr pokazuje ciśnienie w milimetrach słupa rtęci i wyposażony jest w noniusz – wykorzystaj to! Ciśnienie to potrzebne jest do wyskalowania użytego w doświadczeniu manometru, czyli wartość -1 wskazywana na manometrze faktycznie oznacza wartość $-p_a$. Przyjmij, że skala manometru jest liniowa.
- Omów z asystentem jego szczególne wymagania.

Opcjonalnie – interferencja fal sferycznych

Zamiast obserwować interferencję fal płaskich, można obserwować interferencję fal sferycznych.

- Wstaw soczewkę między laser a interferometr w takim miejscu, aby położenie środka obrazu się nie zmieniło. Oprawka soczewki ma śrubę, którą można precyzyjnie przesunąć soczewkę w pionie, można też soczewkę odkręcić i przesunąć na statywie.
- Jeśli nie widać koncentrycznych prążków interferencyjnych lub nie są one na środku wiązki, doreguluj śrubami lustro Z_1 tak, aby wiązki z obu ramion wychodziły w tym samym kierunku.

Opcjonalne użycie fotodiody i oscyloskopu – dla żądnych wrażeń

Zawodne oko można zastąpić fotodiodą pożyczoną z ćwiczenia interferencja Younga i podłączoną do oscyloskopu. Sygnał z fotodiody jest proporcjonalny do natężenia światła, o ile jest mniejszy niż 3-4V i jeśli bateria działa. Jeśli sygnał jest zbyt duży, najprościej jest odsunąć fotodiodę dalej. Podłączając fotodiodę do oscyloskopu możesz wykonać niektóre pomiary szybciej i/lub bardziej precyzyjnie, ale wymaga to namysłu. Nie obawiaj się mieć własnych pomysłów ani konsultacji z asystentem. Przed właściwymi pomiarami poświęć chwilę na właściwy dobór skali i podstawy czasu oraz przemyślenie związku opóźnienia fali optycznej przez gaz z wykresem ukazującym się na ekranie oscyloskopu.

Literatura przedmiotu

- R.P. Feynman, R. Leighton i M. Sadas, *Feynmana wykłady z fizyki*, T.1, Część II, Rozdz. 30-7, PWN, Warszawa 1971;
- Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna* Część IV – Optyka, Warszawa, 1983;
- D. Halliday, R. Resnick i J. Walker, *Podstawy fizyki*, t.4, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003;
- A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2013.

ZADANIE 59

WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA ZAŁAMANIA POWIETRZA
PRZY UŻYCIU INTERFEROMETRU MICHELSONA

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z interferometrem Michelsona, jako ważnym przyrządem optycznym, sprawdzenie liniowej zależności współczynnika załamania od ciśnienia i ocena wartości tego współczynnika w warunkach normalnych dla powietrza w laboratorium.

Wprowadzenie – podstawowa fizyka interferometru Michelsona i interferencja

Fala płaska. Dużą, skolimowaną (tj. biegnącą bez zmiany średnicy) wiązkę światła z lasera możemy z dobrym przybliżeniem opisywać jako **harmoniczną falę płaską**, czyli falę, której pole elektryczne w punkcie \mathbf{r} opisywane jest wzorem:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi), \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad v = \frac{\omega}{k},$$

gdzie E_0 jest amplitudą, \mathbf{n} jest wektorem o jednostkowej długości i wyznacza kierunek propagacji fali, wektor \mathbf{k} nazywamy wektorem falowy, a jego długość $k = 2\pi/\lambda$ to liczba falowa, λ jest długością fali, T jej okresem, ω jej częstością kołową, v jej prędkością propagacji, natomiast wielkość φ jest dowolną stałą. Argument funkcji *cosinus* nazywamy fazą fali, a w miejsce tej funkcji równie dobrze możemy wpisać funkcję *sinus*. Jeśli przed składnikiem ωt w miejsce znaku „minus” mamy znak „plus”, to uzyskujemy falę, która porusza się w kierunku przeciwnym do kierunku wyznaczonego wektorem \mathbf{n} . Fala taka jest nieskończenie rozciągnięta w przestrzeni i czasie i możemy ją postrzegać jako pęk równoległych promieni świetlnych. W rzeczywistości będziemy pracować z wiązkami, które mają skończoną średnicę i przypominają cylinder wykrojony z fali płaskiej o osi wzdłuż kierunku propagacji.

Natężenie I światła to ilość energii przenoszona przez falę w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni. Jest ono proporcjonalne do kwadratu uśrednionego pola elektrycznego i wynosi:

$$I = \varepsilon_0 c \langle \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2,$$

gdzie ε_0 jest przenikalnością próżni, a c prędkością światła, a symbol $\langle \cdot \rangle$ oznacza uśrednianie po jednym okresie drgań:

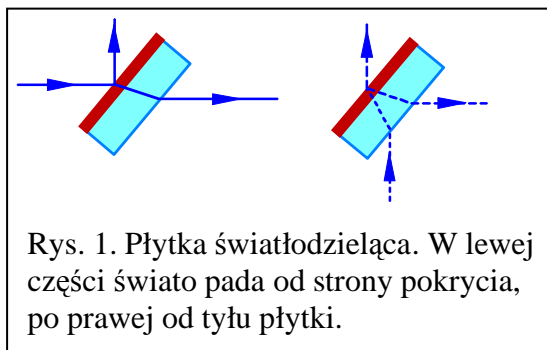
$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E^2(\mathbf{r}, t) dt.$$

Front falowy. Front falowy to powierzchnia stałej fazy. Zmiana fazy o 2π nie powoduje żadnego efektu fizycznego, dlatego równanie określające fronty falowe możemy dla fali płaskiej zapisać jako

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi = 2n\pi + \varphi_0,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą, natomiast φ_0 to dowolnie wybraną stałą fazą odniesienia. Dla fali płaskiej, front falowy ma kształt płaszczyzny, skąd też i nazwa tej fali.

Płytkę światłodzielącą. W eksperymentach interferencyjnych do dzielenia i nakładania wiązek laserowych używamy półprzepuszczalnych lusterek. Są to płytki szklane pokryte warstwą metalu lub dielektryka, która odbijają część padającego promieniowania, resztę zaś przepuszczają. Światło może padać na płytkę z obu jej stron, jak to ilustruje Rysunek 1. Należy zauważyć, że w lewej części rysunku światło odbija się od ośrodka gęstszego, co prowadzi do zmiany fazy fali odbitej o π w stosunku

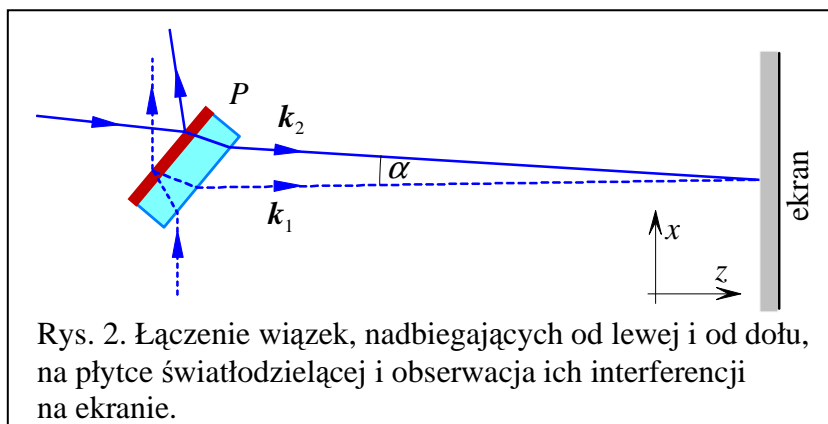


Rys. 1. Płytkę światłodzielącą. W lewej części światło pada od strony pokrycia, po prawej od tyłu płytki.

do fazy fali padającej. Przy odbiciu od ośrodka rzadszego faza nie zmienia się, podobnie jak przy przejściu przez płytkę.

Interferencja fal na płytce światłodzielnącej. Niech na płytkę z dwóch stron padają fale płaskie, których kierunki propagacji są tak dobrane, aby część odbita pierwszej fali utworzyła z częścią przechodzącą drugiej fali bardzo mały kąt α , jak ilustruje to Rysunku 2. Oznaczmy symbolami E_1 oraz E_2 amplitudy pola elektrycznego tych fal, zaś k_1 i k_2 będą ich wektorami falowymi. Pole wypadkowe, a więc i w płaszczyźnie ekranu, jest sumą pól obu fal:

$$E(\mathbf{r}, t) = E_1 \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_1) + E_2 \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_2).$$

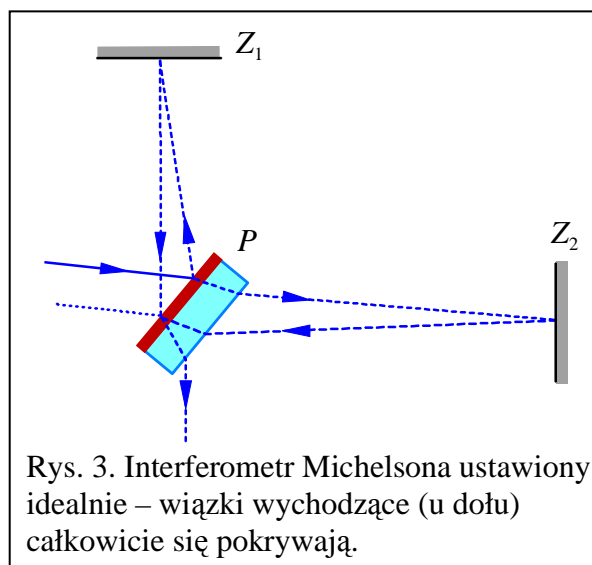


Jasność światła, które obserwujemy na ekranie, jest związana z jego natężeniem. Natężenie oświetlenia od sumarycznego pola to $I(\mathbf{r}) = 0,5 \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle$ i wynosi ono:

$$I(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c (E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 \cdot E_2 \cos((\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r} + \varphi_1 - \varphi_2)). \quad (1)$$

Jeśli wybierzemy układ współrzędnych, w którym płaszczyzna XZ zawiera wektory falowe obu fal i oś OZ pokrywa się z dwusieczną kąta α , jak na Rysunku 2, to różnica wektorów falowych będzie skierowana wzdłuż osi OX i wyniesie $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 \approx e_x k \alpha$, gdzie e_x jest wersorem osi OX . Znak przybliżenia pojawia się z uwagi na wykorzystanie małej wartości kąta α . Widzimy, że zależność od punktu \mathbf{r} przestrzeni oznacza, że różne miejsca będą różnie oświetlone.

Interferometr Michelsona. Jest to jedno z urządzeń, które umożliwia obserwację interferencji. Interferometr Michelsona wykorzystuje jedną płytkę światłodzielną dwa razy: do podziału wiązki lasera, połączenia wiązek biegnących z obu ramion i skierowania ich razem na ekran. Na Rysunku 3 przedstawione jest takie ustawienie interferometru, dla którego wiązki wychodzące biegną dokładnie równoległe do siebie oraz nie są względem siebie przesunięte poprzecznie. Warto zauważyć, że idealne ustawienie wiązek jest możliwe jedynie wtedy, gdy ramiona interferometru są równej długości lub gdy wiązki wracają do lasera. Osiągnięcie takiej konfiguracji w praktyce wymaga bardzo dokładnego ustawienia luster.



Fale sferyczne. Wiązkę światła wybiegającą z małego obszaru (np. z ogniska soczewki) możemy z dala od jej obszaru skupienia (zwanego przewężeniem) opisywać, jak falę sferyczną, wzorem:

$$E(r, t) = \frac{E_0}{r} \cos(kr - \omega t + \varphi),$$

gdzie r jest odległością od źródła fali. Fala taka jest równoważna pękowi promieni rozbiegających się z punktu. W rzeczywistości będziemy pracować z wiązkami, które rozchodzą się z obszaru o średnicy ułamka milimetra w mały wycinek kąta bryłowego przypominający stożek.

W dużej odległości od źródła, w okolicy ekranu, na którym będziemy obserwować falę, przybliżmy powyższy wzór w postaci ułatwiającej przekształcenia. Niech R będzie odległością od źródła fali do środka wiązki na ekranie, natomiast $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ będzie odległością od środka tejże wiązki do interesującego nas punktu obserwacji na ekranie. W eksperymencie R jest rzędu 300mm, ρ zaś to kilka milimetrów, wobec czego możemy skorzystać z rozwinięcia Taylora i przybliżenia:

$$r = \sqrt{R^2 + x^2 + y^2} = \sqrt{R^2 + \rho^2} = R\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{R^2}} \approx R\left(1 + \frac{\rho^2}{2R^2}\right) = R + \frac{\rho^2}{2R}.$$

Przybliżenie to odpowiada zastąpieniu sfery paraboloidą, co bardzo upraszcza rachunki (i jednocześnie skazuje nas na ograniczony zakres zastosowań). Wynik wstawiamy do wyrażenia na natężenie pola elektrycznego i uzyskujemy:

$$E(\rho, t) \approx \frac{E_0}{R} \cos\left(\frac{k\rho^2}{2R} + kR - \omega t + \varphi\right).$$

W mianowniku przed funkcją *cosinus* zaniedbaliśmy poprawkę zależną od odległości ρ , ponieważ mało wpływa ona na końcową amplitudę, nie dając istotnego efektu.

Interferencja fal sferycznych. Wróćmy do rozważań związanych z Rysunkiem 3, ale tym razem niech interferują fale sferyczne. W punkcie odległym o ρ od środka wiązki spotykają się dwie fale sferyczne E_1 i E_2 o tej samej liczbie falowej k i różnych odcinkach R . Natężenie $I(\rho)$ światła od sumarycznego pola elektrycznego tych fal wynosi:

$$I(\rho) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left(E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 \cdot E_2 \cos\left(k\rho^2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) + k(R_2 - R_1) + \varphi_2 - \varphi_1\right) \right). \quad (2)$$

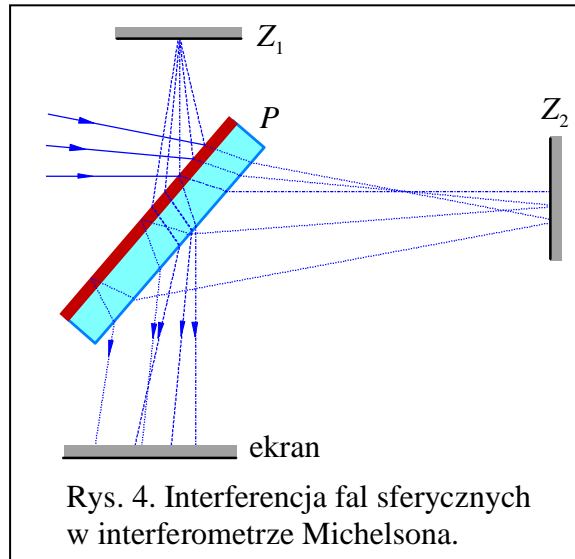
Stała wartość argumentu funkcji *cosinus*, a więc i stała wartość natężenia oświetlenia pojawia się na okręgach.

Spójrzmy teraz na interferencję fal sferycznych w różnoramiennym interferometrze Michelsona przedstawioną na Rysunku 4. Wiązka jest tu zogniskowana we wnętrzu interferometru, a zwierciadło Z_2 jest bardziej oddalone od płytki światłodzielącej, niż zwierciadło Z_1 . Powoduje to, że wiązka odbita od dalszego zwierciadła ma mniejszą rozbieżność kątową niż wiązka odbita od bliższego zwierciadła.

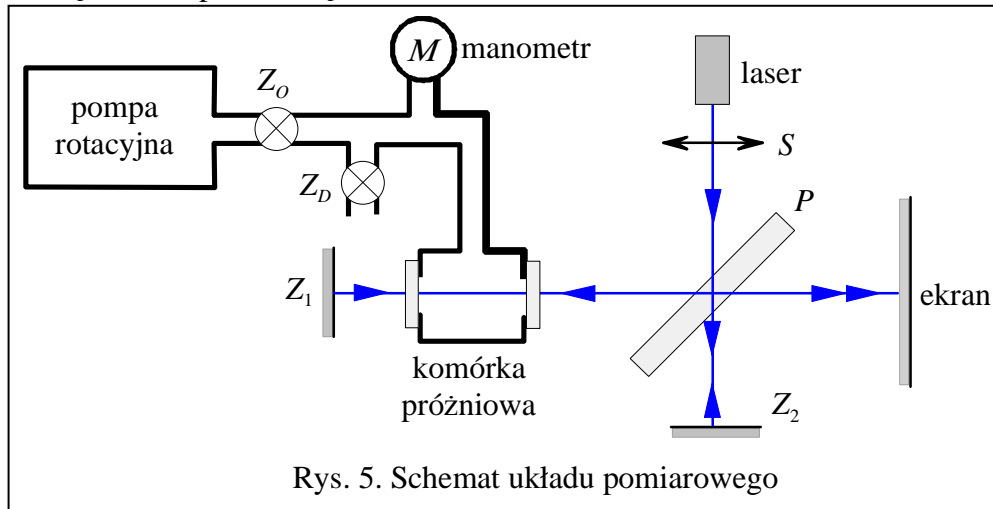
Masz do dyspozycji

Układ pomiarowy prezentuje Rysunek 5. Składa się on z:

- źródła światła w postaci lasera He-Ne emitującego światło o długości fali 632,8 nm,
- interferometru Michelsona, zbudowany z dwóch zwierciadeł i płytki światłodzielącej P ,
- aparatury próżniowej, w skład, której wchodzi:
 - pompa rotacyjna,
 - komórka próżniowa,
 - manometr M ,
 - zawór Z_O odcinający komórkę pomiarową od pompy,
 - zawór Z_D dozujący zaopatrzonej w śrubę mikrometryczną umożliwiającą precyzyjną zmianę ciśnienia w komórce pomiarowej,
 - ruchomy ekran i jako opcja



- soczewkę S do skupiania wiązki lasera.



Rys. 5. Schemat układu pomiarowego

Zasada pomiaru

Pomiar współczynnika załamania gazu jest możliwy przy użyciu interferometru Michelsona, przez wstawienie komórki z gazem do jednego z ramion interferometru i obserwację obrazu interferencyjnego na ekranie w funkcji ciśnienia gazu w komórce – od próżni do ciśnienia końcowego. W wyniku napełniania komórki gazem, współczynnik załamania n w jej wnętrzu rośnie od wartości 1 do nieco większej wartości $n = 1 + \delta n$, wywołanej obecnością cząsteczek gazu. Zmiana ta skraca, odrobinę, długość fali w porównaniu z wartością λ_0 w próżni, do wartości $\lambda = \lambda_0/n$ i w konsekwencji wydłuża wektor falowy, którego długość przyjmuje teraz wartość $k = 2\pi/\lambda = nk_0 = k_0 + k_0\delta n = k_0 + \delta k$. W efekcie, fala elektromagnetyczna przechodząc dwakroć przez komórkę o długości L , nabiera dodatkowej fazy $\delta\varphi = 2L\delta k$. Zmiana fazy o $\delta\varphi = 2\pi$ oznacza odtworzenie pierwotnego (przed zmianą fazy) obrazu interferencyjnego na ekranie, a zmiana fazy o m -krotną wielokrotność liczby 2π oznacza m -krotne odtworzenie pierwotnego obrazu interferencyjnego. Warunek takiej zmiany zapiszemy jako

$$2\pi m = 2L\delta k, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

co, po uwzględnieniu $\delta k = k_0\delta n = k_0(n - 1)$ i po prostych przekształceniach, prowadzi do:

$$n = 1 + \frac{m\lambda}{2L}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

Włączenie pompy rotacyjnej przy zamkniętym zaworze dozującym Z_D i otwartym zaworze odcinającym Z_O powoduje odpompowanie powietrza z komórki pomiarowej. Ciśnienie końcowe (rzędu 10^{-3} Tr) możliwe do uzyskania w tego typu aparaturze próżniowej przyjmuje się jako próżnię o współczynniku załamania 1. Jak można się przekonać w doświadczeniu, jest to wystarczająco dobre przybliżenie – widoczne zmiany w obrazie interferencyjnym obserwuje się dopiero przy wyższych ciśnieniach. Po uzyskaniu próżni i zamknięciu zaworu odcinającego Z_O , ostrożnie otwieramy zawór dozujący Z_D , co powoduje zmianę ciśnienia w komórce. Zasada pomiaru polega na zliczaniu na ekranie kolejnych odtworzeń obrazu interferencyjnego przy jednoczesnym notowaniu wartości ciśnień, przy których pojawia się odnowiony obraz.

Relacja między współczynnikiem załamania n a gęstością ρ gazu jest liniowa:

$\rho(n) = \alpha n + \beta$, gdzie α i β to stałe współczynniki. Dla powietrza możemy zastosować równanie stanu gazu doskonałego:

$$\rho = \frac{p\mu}{RT},$$

gdzie p jest ciśnieniem gazu, T jego temperaturą absolutną, μ masą molową (w gramach na mol), natomiast R uniwersalną stałą gazową. Wykorzystując to równanie, wyznaczamy relację między ciśnieniem a współczynnikiem załamania:

$$p(n) = \frac{\alpha RT}{\mu} n + \frac{\beta RT}{\mu} = An + B, \quad A = \frac{\alpha RT}{\mu}, \quad B = \frac{\beta RT}{\mu}. \quad (4)$$

Przyjmujemy, że w tej relacji ciśnienie jest wyrażane w jednostkach absolutnych (np. paskalach), a próżni odpowiada jego zerowa wartość.

Zasady analizy statystycznej danych wymagają, aby operować danymi nie przetworzonymi, dlatego tak dostosujemy teraz relację (4), aby odnosiła się ona bezpośrednio do danych uzyskiwanych w doświadczeniu, czyli numeru k prążka i ciśnienia $\pi(k)$ powietrza odczytywanego z manometru i mierzonego w jednostkach względnych, w których próżni odpowiada wartość -1 , a aktualnemu ciśnieniu atmosferycznemu p_a wartość zero. W tym celu podzielimy obie strony wyrażenia (4) przez wartość p_a oraz odejmiemy jedność:

$$\pi(n) = \frac{p(n)}{p_a} - 1 = \frac{A}{p_a} n + \frac{B}{p_a} - 1,$$

a po skorzystaniu ze związku (3), otrzymujemy poszukiwaną zależność:

$$\pi(k) = \frac{A}{p_a} \left(1 + \frac{\lambda}{2L} m \right) + \frac{B}{p_a} - 1 = am + b, \quad a = \frac{\lambda A}{2L p_a}, \quad b = \frac{A + B}{p_a} - 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Wartość współczynnika załamania w warunkach ciśnienia i temperatury, które akurat panowały w laboratorium w dniu wykonywania pomiaru nie jest zbytnio znacząca. Aby można było porównywać różne pomiary ze sobą lub odnieść się do rozważań teoretycznych, dobrze jest podać wartość współczynnika przetworzoną do umownych warunków zwanych normalnymi. Powszechnie za takie przyjmuje się ciśnienie normalne $p_0 = 760$ mmHg i temperaturę normalną $T_0 = 273,15$ K ($= 0^\circ\text{C}$). Znajomość współczynników a oraz b pozwala wyznaczyć wartość n_0 współczynnika załamania w warunkach normalnych. W tym celu z relacji (3) wyeliminujemy numer m prążka, wyrażając go przez współczynnik załamania, jak również powrócimy do ciśnienia $p(n)$ wyrażanego w jednostkach absolutnych:

$$\frac{p(n)}{p_a} - 1 = \frac{2La}{\lambda} (n-1) + b \Rightarrow p(n) = \frac{2L p_a a}{\lambda} (n-1) + (b+1) p_a,$$

i wyznaczmy współczynnik załamania:

$$n = \frac{\lambda p - \lambda (b+1) p_a}{2L p_a a} + 1. \quad (6)$$

Jego wartość n_0 w warunkach normalnych otrzymamy wybierając ciśnienie normalne p_0 i odpowiadające tym warunkom wartości a_0 oraz b_0 współczynników a i b w relacji (6):

$$n_0 = 1 + \frac{\lambda p_0 - \lambda (b_0 + 1) p_a}{2L p_a a_0}.$$

Współczynniki te, za pomocą relacji (4), możemy związać ze współczynnikami a i b uzyskanymi z analizy danych:

$$a_0 = \frac{\lambda}{2L p_a} A_0 = \frac{\lambda}{2L p_a} \frac{\alpha R T_0}{\mu} = \frac{\lambda}{2L p_a} \frac{\alpha R T}{\mu} \frac{T_0}{T} = \frac{\lambda A}{2L p_a} \frac{T_0}{T} = a \frac{T_0}{T},$$

$$b_0 + 1 = \frac{A_0 + B_0}{p_a} = \frac{A + B}{p_a} \frac{T_0}{T} = (b+1) \frac{T_0}{T},$$

co prowadzi do:

$$n_0 = 1 + \frac{\lambda p_0 T - \lambda T_0 (b+1) p_a}{2 T_0 L p_a a}. \quad (7)$$

Należy podkreślić, że relacja ta ma charakter modelowy: powiedzieliśmy, że ciśnienie jest proporcjonalne do gęstości gazu, wpływ zaś temperatury oceniliśmy z równania stanu gazu doskonałego. Wpływ obu założeń można by oszacować, odwołując się do innych równań stanu. Wydaje się jednak, że w odniesieniu do gęstości można bezpiecznie założyć słuszność proporcjonalności tej wielkości do ciśnienia. Podobnie procedura przeskalowania współczynników

A i B – wzór (4) – o czynnik zbliżony do jedności, uwzględnij główny przyczynnik prowadzący do zmiany wartości współczynników, a błąd jaki to podejście wprowadza będzie istotnie mniejszy od błędów, jakich można się spodziewać od strony innych efektów.

Dane o współczynniku załamania powietrza

Wartość współczynnika załamania n_0 powietrza w warunkach normalnych, $t = 0^\circ\text{C}$, $p_0 = 760$ mm Hg i dla światła lasera He-Ne, jest równa $n_0 = 1 + 2,921 \cdot 10^{-4}$. Podana wartość odpowiada współczynnikowi załamania powietrza suchego. W rzeczywistości powietrze zawsze zawiera parę wodną. Nasycona para wodna ma w warunkach normalnych współczynnik załamania $n_w = 1 + 2,5 \cdot 10^{-4}$. Wpływ pary na zmianę współczynnika załamania powietrza jest mały, ale dostrzegalny. Przy założeniu, że wartość $n - 1$ jest proporcjonalna do gęstości substancji, współczynnik załamania mieszaniny pary wodnej i powietrza wynosi:

$$n_{pw} = n_0 + (n_w - n_0) \frac{\rho_w}{\rho_p},$$

gdzie ρ_w i ρ_p to gęstości pary wodnej i powietrza. W temperaturze 20°C mamy nasyconą parę wodną o $\rho_w = 17$ g/m³ oraz $\rho_p = 1290$ g/m³, co daje $n_0 - n_{pw} \approx 10^{-7}$. Jest to zbyt mała różnica, aby można było ją wykryć w tym doświadczeniu.

Wykonanie pomiarów

Na początek: połącz interferometr na stabilnej podstawie na środku stołu, na wejściu umieść jakiś jasny obiekt (np. ekran komórki) i spójrz nań przez interferometr. Postaraj się zaobserwować dwa obrazy pochodzące od dwóch ramion interferometru. Czy potrafisz stwierdzić czy ramiona są równej długości?

- Suwmiarką zmierz długość komórki próżniowej w jej rogach. Wykonując pomiary długości poszczególnych krawędzi zachowaj ostrożność, by nie porysować okienek. Zwróć uwagę na to, że komórka nie jest dokładnie prostokątna.
- Ustaw interferometr i ekran tak, aby wyraźnie widzieć *jednocześnie* prążki i manometr.
- Zamknij zawór Z_D dozujący powietrze. Po zakręceniu stawia on opór – nie siłuj się z nim!
- Włącz pompę próżniową i otwórz elektromagnetyczny zawór Z_O odcinający (umieszczony na podstawie przełącznik przestaw w położenie dolne – winna zapalić się lampka kontrolna).
- W ciągu maksimum 10-20 s wskazówka manometru powinna osiągnąć położenie oznaczone jako -1 . Jeśli mimo długotrwałego pompowania wskazówka manometru nie wskazuje tego położenia, to układ jest nieszczelny; najczęstszą przyczyną jest pozostawienie otwartego zaworu Z_D – dokręć go. Po uzyskaniu właściwej próżni należy zamknąć zawór Z_O odcinający (wyłącznik w położeniu górnym) i można wyłączyć pompę. Zwróć uwagę na zachowanie obrazu interferencyjnego w trakcie odpompowywania układu.

UWAGA: Otwieranie zaworu odcinającego Z_O częściej niż raz na minutę może spowodować jego uszkodzenie.

- Odkręć nieco zawór Z_D – obserwuj obraz i manometr; słuchaj swojego układu.
- Zamknij zawór Z_D i odpompuj komórkę. Za pomocą śruby umieszczonej w obudowie zwierciadła Z_2 ustaw na ekranie jakiś charakterystyczny obraz interferencyjny (np. wybierz taki, w którym w wybranym miejscu obrazu pojawia się minimum interferencyjne).
- Ustal procedurę pomiaru, która umożliwi sporządzenie zależności dodatkowej fazy wprowadzanej przez gaz od jego ciśnienia wskazywanego przez manometr. Głównym elementem tej procedury winna być rejestracja wskazania manometru, gdy odtwarza się na ekranie wybrany wcześniej obraz interferencyjny. Rejestrując ciśnienie należy jednocześnie notować numer prążka. Pomiar należy prowadzić aż do momentu, gdy ciśnienie powietrza w komórce zrówna się z ciśnieniem atmosferycznym. Ponieważ manometr jest niedokładny, wyznacz także całkowitą fazę od próżni aż do ciśnienia atmosferycznego.
- Wykonaj kilka serii pomiarowych, uzyskaj precyzję pomiaru fazy nie gorszą niż 2π .
- Odczytaj temperaturę powietrza w pokoju pomiarowym. Zakładamy, że temperatura powietrza w komórce jest równa temperaturze zewnętrznej.

- Na barometrze umieszczonym w korytarzu pracowni odczytaj panujące aktualnie ciśnienie atmosferyczne p_a . Barometr pokazuje ciśnienie w milimetrach słupa rtęci i wyposażony jest w noniusz – wykorzystaj to! Ciśnienie to potrzebne jest do wyskalowania użytego w doświadczeniu manometru, czyli wartość -1 wskazywana na manometrze i w konwencji tego manometru faktycznie oznacza wartość $-p_a$. Przyjmij, że skala manometru jest liniowa.
- Omów z asystentem jego szczególne wymagania.

Opcjonalnie – interferencja fal sferycznych

Zamiast obserwować interferencję fal płaskich można obserwować interferencję fal sferycznych.

- Zapamiętaj położenie środka obrazu (możesz przesunąć ekran). Wstaw soczewkę między laser a interferometr w takim miejscu, aby położenie środka obrazu się nie zmieniło. Oprawka soczewki ma śrubę którą można precyzyjnie przesuwać soczewkę w pionie, można też soczewkę odkręcić i przesunąć na statywie.
- Jeśli nie widać koncentrycznych prążków interferencyjnych lub nie są one na środku wiązki, poreguluj śrubami lustra Z_1 tak, aby wiązki z obu ramion wychodziły w tym samym kierunku.

Opcjonalne użycie fotodiody i oscyloskopu – dla żądnych wrażeń

Zawodne oko można zastąpić fotodiodą pożyczoną z ćwiczenia interferencja Younga i podłączoną do oscyloskopu. Sygnał z fotodiody jest proporcjonalny do natężenia światła, o ile jest mniejszy niż 3-4V i jeśli bateria działa. Jeśli sygnał jest zbyt duży najprościej odsunąć fotodiodę dalej. Podłączając fotodiodę do oscyloskopu możesz wykonać niektóre pomiary szybciej i/lub bardziej precyzyjnie, ale wymaga to namysłu. Nie obawiaj się mieć własnych pomysłów ani konsultacji z asystentem. Przed właściwymi pomiarami poświęć chwilę na właściwy dobór skali i podstawy czasu oraz przemyślenie związku opóźnienia fali optycznej przez gaz z wykresem ukazującym się na ekranie oscyloskopu.

Zasady bezpieczeństwa

- Nigdy nie patrz w wiązkę lasera.
- Przed włączeniem lasera zdejmij zegarek, pierścionki itp. objekty, którymi mógłbyś wiązkę lasera niechcący skierować sobie lub innym do oka.
- Prowadź wiązki w płaszczyźnie stołu. Przed schyleniem się wyłączaj laser.
- Utrzymuj wiązki pod kontrolą – nie stwarzaj zagrożenia dla innych.
- Używaj czystej białej kartki (wielkości kilka-kilkanaście cm) do śledzenia biegu wiązki.
- Nie dotykaj polerowanych powierzchni – luster, okienek, soczewek, lasera, płytki etc. Jeśli Ci się to niechcący zdarzyło, zawiadom o konieczności fachowego oczyszczenia optyki – wiele osób wydziela substancje żrące metal a nawet szkło!

Analiza wyników pomiarów

W rezultacie przeprowadzonych pomiarów otrzymuje się szereg wartości ciśnienia odpowiadających wartościom współczynnika załamania odległym od siebie o wielokrotność stałej $\lambda/(2L)$, przy czym, w rezultacie wielokrotnych pomiarów, dla jednej wartości numeru prążka interferencyjnego dysponujemy kilkoma wartościami ciśnienia. Analiza danych winna w sposób kompleksowy wykorzystać te dane i odnosić się do następujących kwestii:

- Ustalenia realistycznych, dopuszczalnych błędów granicznych wielkości bezpośrednio mierzonych i wyznaczenie odpowiadających im niepewności standardowych. Należy pamiętać, że zdolność rozdzielcza przyrządu nie zawsze gwarantuje realistyczne błędy graniczne. Oczywiście, możesz też od razu oszacować niepewności standardowe, bez przechodzenia przez etap błędów granicznych.
- Wyznaczenia ocen parametrów liniowej zależności (5) wraz z ich pełną macierzą kowariancji.
- Weryfikacji liniowej zależności (5) między ciśnieniem a numerem prążka interferencyjnego.
- Jeśli weryfikacja ta przebiegnie pomyślnie, to podaj ocenę współczynnika załamania sprowadzonego do warunków normalnych wraz z jej niepewnością.

W doświadczeniu, po odpompowaniu powietrza z komórki, manometr pokazuje wartość -1 . Jak jest to dyskutowane w części „Zasada pomiaru”, przy takim ciśnieniu, a więc dla $m = 0$, można z bardzo dobrym przybliżeniem przyjąć, że współczynnik załamania jest równy jedności. Jeśli narzucimy ten warunek na zależność $\pi(k) = ak + b$, to znajdziemy, że $b = -1$.

- Zweryfikuj tę wartość współczynnika b wybranym przez siebie testem.
- Gdy stwierdzisz, że istotnie uzyskana przez Ciebie ocena parametru b jest zgodna z sugerowaną wartością, przeprowadź weryfikację zależności $\pi(k) = ak - 1$.
- Podaj ocenę parametru a wraz z jej niepewnością.
- Jeśli weryfikacja ta przebiegnie pomyślnie, to wyznacz ocenę współczynnika załamania sprowadzonego do warunków normalnych wraz z jej niepewnością.

Literatura przedmiotu

- R.P. Feynman, R. Leighton i M. Sadas, *Feynmana wykłady z fizyki*, T.1, Część II, Rozdz. 30-7, PWN, Warszawa 1971;
- W. Demtroeder, *Spektroskopia laserowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1993;
- Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna* Część IV – Optyka, Warszawa, 1983;
- D. Halliday, R. Resnick i J. Walker, *Podstawy fizyki*, t. 4, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003;
- A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2013.

Dodatkowe uwagi odnośnie do raportu

W raporcie należy zamieścić, w stosownie dobranych tabelach, wszystkie surowe wyniki pomiarów tak, aby sięgając jedynie do raportu i bez potrzeby odwoływania się do dziennika doświadczenia można było wykonać pełną i niezależną analizę Twych danych. Zadbaj o wierne przeniesienie wszystkich wartości do raportu.

Istotne, w Twej opinii, kroki analizy danych podsumuj stosownymi tabelami z wynikami pośrednimi i zilustruj odpowiednimi rysunkami (które nie muszą być wykonane za pomocą komputerowego programu graficznego – nic nie umniejsza wartości Twej pracy, jeśli w raporcie umieścisz wykonany ręcznie, z dołożeniem wszelkiej staranności, rysunek np. na papierze milimetrowym).

Odwołując się do metody najmniejszych kwadratów wystarczy, że podasz jawną formę wielkości minimalizowanej, jako że postać ta jednoznacznie wyznacza oceny poszukiwanych współczynników modelowej zależności wraz z ich macierzą kowariancji i nie musisz cytować stosownych wzorów dla tych obiektów. Obok wykresu ukazującego dane doświadczalne, wraz z ich niepewnościami oraz dopasowaną zależnością modelową, do dobrej praktyki należy także przedstawienie reszt z tego dopasowania. Rysunek taki pokazuje, w powiększeniu, jakość dopasowania, a także dostarcza dodatkowego wglądu, którego nie znajdziemy ani na wykresie dopasowanej krzywej, ani w wartości minimalnej sumy kwadratów reszt: uzyskany wzór reszt może dostarczyć sugestii odnośnie do trafności wybranej zależności modelowej.

Nim przygotujesz raport, zaznajom się z uwagami zawartymi w opracowaniu *Instrukcja – Jak pisać raport końcowy* oraz z przykładową realizacją tych uwag w postaci *Przykładowy raport końcowy*. Materiały te zamieszczone są na stronie <http://anipw.igf.fuw.edu.pl> Pracowni wstępnej. Wymagania ukazane w tych opracowaniach będą bezwzględnie egzekwowane przy sprawdzaniu Twego raportu. W szczególności pamiętaj o konwencji odnoszącej się do precyzji przedstawiania niepewności, a co za tym idzie, również wartości wielkości zmierzonej.

Absolutnie zalecane jest także świadome przyjrzenie się redakcji tekstu, tabel, rysunków i wzorów, sposobów ich numerowania, tytułowania i opisywania w dowolnym, ale wydanym przez uznane wydawnictwo, akademickim podręczniku do fizyki, jak również zajrzenie do kilku publikacji w różnych czasopismach naukowych, co może Ci ułatwić podjęcie decyzji co do podziału Twego raportu na części.

Pytania i zadania definiujące wymagania do ćwiczenia

Problem 1. Jak zdefiniowana jest jednostka ciśnienia zwana torem?

Problem 2. Ciśnienie atmosferyczne na Mount Everest wynosi 230 mmHg. Ile to paskali?

Problem 3. Wyprowadź równanie $\rho = p\mu/(RT)$ stanu gazu doskonałego ze „szkolnej” jego postaci: $pV = nRT$, gdzie V jest objętością gazu, n liczbą jego moli, a R uniwersalną stałą gazową.

Problem 4. Podaj relację między prędkością c światła w próżni, prędkością v światła w ośrodku i współczynnikiem załamania n tego ośrodka.

Problem 5. Światło w próżni ma częstość ω . Ile ta częstość wynosi w ośrodku o współczynniku załamania n ?

Problem 6. Wyjaśnij, na czym polega zjawisko interferencji fali.

Problem 7. Dwie jednowymiarowe fale o identycznych amplitudach poruszają się w przeciwnych kierunkach. Wyznacz postać fali wypadkowej i omów jej zachowanie w czasie (falę, jaka powstaje w wyniku nałożenia dwóch fal biegnących w przeciwnych kierunkach nazywamy *falą stojącą*).

Problem 8. O ile zwiększa się faza fali płaskiej przy jej przejściu przez komórkę wypełnioną suchym powietrzem o temperaturze 0°C pod normalnym ciśnieniem, w relacji do fazy tejże fal przechodzącej przez tę samą komórkę, ale bez powietrza? Jakiej to odpowiada liczbie cykli, przez które przejdzie obraz interferencyjnych przy zmianie ciśnienia w komórce od próżni do normalnego ciśnienia powietrza w temperaturze 0°C ?

Problem 9. Jeśli płytką światłodzielącą odbija 50% energii padającego promieniowania i nie wprowadza żadnych strat, to jaki jest stosunek natężenia pola elektrycznego fali odbitej do fali padającej? Jak opiszesz poszczególne fale występujące na Rys. 1? Jak będą powiązane wektory falowe i fazy φ ? Nie wyprowadzaj wzorów, przedstaw warunki, które muszą być spełnione zgodnie z treścią powyżej i prawem odbicia.

Problem 10. Naszkić fronty falowe fal o wektorach falowych \mathbf{k}_1 i \mathbf{k}_2 na Rysunku 2. Korzystając ze związku (1), opisz kształt wzorów interferencyjnych na ekranie i wyznacz odległość między sąsiednimi minimami natężenia oświetlenia. Jaki musi być kąt α między wiązkami, aby odległość między tymi minimami wynosiła 1 mm, jeśli długość fali wynosi 500 nm?

Problem 11. Jak jest zbudowany i jak działa interferometr Michelsona?

Problem 12. Co się będzie działo, gdy zaczniemy obracać lustro Z_2 na Rysunku 3 wokół osi OY (prostopadłej do rysunku) przechodzącej przez punkt padania narysowanego promienia?

Problem 13. Niech interferometr będzie ustawiony idealnie jak na Rysunku 3, a drogi optyczne w obu ramionach niech będą idealnie równe. Jakiego wówczas obrazu spodziewasz się na ekranie? Następnie przesunijmy w myślach lustro Z_2 wzdłuż wiązki o $1/4$ długości fali. O ile zmieni się różnica faz między falami na wyjściu interferometru? Jak wpłynie to na obraz? W obu przypadkach prześledź przepływ energii z lasera wzdłuż toru promieni zaznaczonych na Rysunku 3.

Problem 14. Na rysunku 3 przekreślmy w interferometrze lustro Z_2 tak, aby obserwować na ekranie prążki o odległości 5 mm między maksimami. Wstawmy komórkę w ramię z lustrem Z_2 . Niech zmiana $\delta\varphi = L\delta k$ fazy przy wypełnianiu komórki powietrzem wynosi 3π . Jak będzie się zmieniał obraz na ekranie w miarę wzrostu ciśnienia gazu w komórce?

Problem 15. Na Rysunku 2 naszkicuj fronty falowe dwóch nakładających się fal sferyczne o różnych promieniach krzywizny $R_1 \gg R_2$. Korzystając z wyrażenia (2), wyznacz wzór na promienie okręgów o minimalnym lub maksymalnym natężeniu oświetlenia. Jaki wpływ na obraz będzie miała zmiana położenia ekranu?

Problem 16. W trakcie pomiarów z interferometrem bardzo łatwo jest zgubić, przez nieuwagę, pierwsze odtworzenie obrazu interferencyjnego i odnotować następne jako to pierwsze. Jak taki błąd odbije się na wykresie zależności wyznaczonej relacją (5)?

Pytania i zadania przybliżające, uzupełniające lub poszerzające treść ćwiczenia

Problem 17. Czym różni się światło zwykłej żarówki od światła lasera?

UZUPEŁNIENIE

Analiza statystyczna w tym ćwiczeniu odwołuje się, między innymi, do wielkości skorelowanych, dlatego poniższy passus poświęćmy temu problemowi.

Relacja deterministyczna

W analizie statystycznej danych związanych deterministycznie, dysponujemy formułą $\eta = \mu(x; \boldsymbol{\theta})$ wiążącą odpowiedź η układu na impuls x , będący zmienną niezależną, często zwaną zmienną kontrolowaną lub objaśniającą. W formule tej $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ to zestaw m nieznanymi parametrów. W rezultacie pomiaru dla ustalonej, i w najprostszym podejściu znanej dokładnie wartości x_i , w miejsce dokładnej wartości η_i , znajdujemy ocenę y_i , $i = 1, 2, \dots, n$, zmiennej zależnej, zwanej zmienną objaśnianą. W modelowym opisie statystycznym, obok wartości y_i traktowanych jako wartości wylosowane z pewnego, być może nieznanego rozkładu i być może zależnego od wartości x_i sygnałów, mamy także odchylenia standardowe σ_i charakteryzujące jakość pomiaru wielkości η_i . Należy podkreślić, że w praktyce, w miejsce odchylenia standardowego znamy, zazwyczaj, jedynie niepewności standardowe u_i . W pozostałej części tego UZUPEŁNIENIA będziemy przyjmowali modelowe założenie o znajomości odchylenia standardowego σ_i . Czytelnik powinien być świadom, że w praktycznych obliczeniach zastąpienie odchylenia standardowego niepewnościami to w istocie pewien rodzaj przybliżenia podyktowanego naszą bezsilnością w kwestii wyznaczenia odchylenia standardowego.

Sposobem oceny nieznanymi parametrów θ_i jest metoda najmniejszych kwadratów, w której, w warunkach statystycznej niezależności zmiennych objaśnianych, minimalizowana jest, względem nieznanymi parametrów, ważona odwrotnościami kwadratów odchylenia standardowego σ_i suma kwadratów odchylenia zmierzonych wartości y_i od wartości modelowych $\eta_i = \mu(x_i; \boldsymbol{\theta})$ (w skrócie: ważona suma kwadratów reszt):

$$R(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mu(x_i; \boldsymbol{\theta}))^2}{\sigma_i^2}.$$

We wszystkich naszych dalszych rozważaniach przyjmujemy, że zgodnie z intuicyjnie zrozumiałym wymogiem, liczba n pomiarów jest większa od liczby m nieznanymi parametrów.

Liniowa formuła deterministyczna

Zacznijmy od przypomnienia, że w kontekście metody najmniejszych kwadratów problemem liniowym nie nazywamy liniowej zależności między zmienną zależną (odpowiedzią η układu) a zmienną niezależną (sygnałem x), lecz zależność, w której relacja między zmienną niezależną a zmienną zależną jest *liniowa względem nieznanymi parametrów* i ma postać:

$$\eta = \mu(x; \boldsymbol{\theta}) = \varphi_1(x)\theta_1 + \varphi_2(x)\theta_2 + \dots + \varphi_m(x)\theta_m, \quad (8)$$

gdzie $\varphi_i(x)$ są w pełni znanymi, liniowo niezależnymi funkcjami – są to często kolejne potęgi wielkości x , ale mogą to być też np. funkcje Bessela lub wielomiany ortogonalne.

Dla n wartości x_i otrzymujemy n związków dla n wartości $\mu(x; \boldsymbol{\theta})$:

$$\mu(x_i; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x_i)\theta_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

odpowiadających wielkościom mierzonym y_i . Powyższe równania możemy zapisać zwięźle w formie macierzowej

$$\boldsymbol{\eta} = \Phi(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta},$$

gdzie

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu(x_1; \boldsymbol{\theta}) \\ \mu(x_2; \boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ \mu(x_n; \boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}, \quad \Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_m(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_m(x_n) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_m \end{pmatrix},$$

a jeśli jeszcze do tego zdefiniujemy:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

to i samą ważoną sumę kwadratów reszt będziemy mogli zgrabnie zapisać w postaci:

$$R(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{y} - \Phi \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{U}^{-1} (\mathbf{y} - \Phi \boldsymbol{\theta}).$$

Oceny parametrów i ich wariancje

Różniczkowanie sumy kwadratów reszt względem nieznanymi parametrów prowadzi do tzw. *równań normalnych* w postaci liniowego układu równań na te parametry:

$$\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi \hat{\boldsymbol{\theta}} = \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y},$$

a jeśli macierz Φ , wymiaru $n \times m$, zwana **macierzą planu**, jest rzędu m , czyli jej wszystkie kolumny są liniowo niezależne, to oceny $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ nieznanymi parametrów wyznaczamy ze związku:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y}. \quad (9)$$

W dalszej części tego UZUPEŁNIENIA stosować będziemy notację „z daszkiem” dla ukazania oceny dyskutowanej wielkości (w duchu tej notacji wielkości y_i zapisalibyśmy jako $\hat{\eta}_i$).

Jeśli pomiary są nieobciążone, czyli jeśli $E[\mathbf{y}] = \boldsymbol{\eta} = \Phi \boldsymbol{\theta}$, to i ocena $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ jest nieobciążona:

$$E[\hat{\boldsymbol{\theta}}] = (\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} E[\mathbf{y}] = (\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta},$$

a jej kowariancja wynosi:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= E\left[(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T \right] \\ &= E\left[\left((\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y} - (\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\eta} \right) \left((\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y} - (\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\eta} \right)^T \right] \\ &= (\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} E\left[(\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta})(\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta})^T \right] \mathbf{U}^{-1} \Phi (\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} = (\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1}. \end{aligned}$$

Macierz \mathbf{V} nazywamy macierzą kowariancji ocen $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Zauważmy, że alternatywnie elementy odwrotnej macierzy kowariancji możemy wyznaczyć z prostej relacji:

$$[\mathbf{V}^{-1}]_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial \theta_i \partial \theta_j}.$$

Jak widzimy w przypadku, gdy nieznanne parametry występują w formule w sposób liniowy, minimalizację można przeprowadzić analitycznie i uzyskać zamknięte wyrażenia zarówno na oceny $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ nieznanymi parametrów jak i ich macierz kowariancji \mathbf{V} . Gdy parametry $\boldsymbol{\theta}$ pojawiają się w zależności $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu}(x; \boldsymbol{\theta})$ w sposób nieliniowy, rozwiązanie problemu nie ma formy zamkniętej, a sama minimalizacja ważonej sumy kwadratów reszt wymaga, zazwyczaj, zastosowania wyspecjalizowanych metod numerycznych.

Musimy także zwrócić uwagę na fakt, że jeśli macierz \mathbf{U} utworzymy z niepewności standardowych wyników pomiarów wielkości y_i , a nie ich odchyłeń standardowych, to macierz \mathbf{V} przestaje być macierzą kowariancji, a staje się macierzą ocen tych wielkości.

Test zgodności χ^2 Pearsona w problemie liniowym

Ważnym obiektem problemu liniowego (8) jest suma kwadratów reszt w minimum:

$$R_{\min} = (\mathbf{y} - \Phi \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{U}^{-1} (\mathbf{y} - \Phi \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

w przypadku, gdy zmienne objaśniane y_i pomiarów opisane są rozkładem Gaussa $N(y_i; \eta_i, \sigma_i)$, gdzie $\eta_i = \boldsymbol{\mu}(x_i; \boldsymbol{\theta})$ jest wartością oczekiwaną zmiennej y_i o wariancji σ_i^2 . Ten specyficzny rozkład powoduje, że R_{\min} przedstawia wartość wylosowaną z rozkładu χ^2 o liczbie $n - m$ stopni swobody,

o ile rozważana zależność deterministyczna jest słuszna, co pozwala zbudować tzw. test χ^2 Pearsona i zweryfikować propozycję $\mu(x; \theta)$. Wynika to z następującego rozbicia:

$$\chi^2 = (y - \eta)^T U^{-1} (y - \eta) = (\theta - \hat{\theta})^T V^{-1} (\theta - \hat{\theta}) + (y - \Phi \hat{\theta})^T U^{-1} (y - \Phi \hat{\theta}),$$

w którym lewa strona to zmienna z rozkładu χ^2 z liczbą n stopni swobody, prawa zaś sumą dwóch składników, z których pierwszy ma rozkład χ^2 z liczbą m stopni swobody.

Oczywiście powinniśmy pamiętać, że stosowanie niepewności standardowych w miejsce odchyłeń standardowych w macierzy U osłabia siłę takiego testu.

Na miejscu będzie także uświadomienie sobie, że warunkiem stosowania testu Pearsona jest zarówno liniowy charakter (8) relacji $\eta = \mu(x; \theta)$ jak i gaussowski charakter pomiarów. Gdy któryś z tych warunków nie jest spełniony, test χ^2 nie ma zastosowania. Jedyne na co możemy w takiej sytuacji liczyć, to narastającą ze wzrostem liczby danych zbieżność wielkości R_{\min} do zmiennej χ^2 .

Przykład: zależność postaci $\eta(x) = ax + b$

Dla przykładu rozważmy dopasowanie do danych liniowej zależności w postaci linii prostej $\mu(x; \theta) = ax + b$, dla której parametry θ to nachylenie a i odcięta b , kiedy to macierz planu przyjmuje postać:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix},$$

a oceny \hat{a} i \hat{b} parametrów a i b znajdujemy ze związku (9):

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \frac{1}{SS_{xx} - S_x^2} \begin{bmatrix} S & -S_x \\ -S_x & S_{xx} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_{xy} \\ S_y \end{pmatrix} = \frac{1}{SS_{xx} - S_x^2} \begin{pmatrix} SS_{xy} - S_x S_y \\ S_y S_{xx} - S_x S_{xy} \end{pmatrix},$$

gdzie:

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad S_x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, \quad S_y = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2}, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}.$$

Obok ocen parametrów a oraz b znajdujemy macierz kowariancji tych ocen:

$$V[\hat{a}, \hat{b}] = \frac{1}{SS_{xx} - S_x^2} \begin{bmatrix} S & -S_x \\ -S_x & S_{xx} \end{bmatrix},$$

w której elementy diagonalne:

$$V[\hat{a}] = \sigma_a^2 = \frac{S}{SS_{xx} - S_x^2}, \quad V[\hat{b}] = \sigma_b^2 = \frac{S_{xx}}{SS_{xx} - S_x^2}$$

to wariancje ocen \hat{a} oraz \hat{b} , a wyraz pozadiagonalny

$$V[\hat{a}, \hat{b}] = \text{cov}[\hat{a}, \hat{b}] = C_{ab} = -\frac{S_x}{SS_{xx} - S_x^2},$$

zwany kowariancją, przedstawia tzw. *korelację* między obiema ocenami parametrów. Często, prezentując wyników dopasowania, podajemy także tzw. Pearsona współczynnik korelacji liniowej:

$$\rho = \frac{V[\hat{a}, \hat{b}]}{\sqrt{V[\hat{a}]V[\hat{b}]}} = -\frac{S_x}{\sqrt{SS_{xx}}},$$

opisujący siłę relacji między ocenami parametrów a i b . Ograniczony jest on w swych wartościach do przedziału $[-1; 1]$, przy czym im jego wartość bezwzględna jest bliższa jedności, tym siła tej relacji jest bliższa matematycznej zależności liniowej.

Wariancja zadanej zależności matematycznej

Istnienie wyrazów pozadiagonalnych w macierzy \mathbf{V} powoduje, że oceny $\hat{\theta}$ nieznanymi parametrów przestają być statystycznie niezależne i pewne ze „szkolnych” wzorów, te na przenoszenie niepewności (propagację błędów), wymagają korekty. I tak, jeśli jesteśmy zainteresowani oceną wielkości $\varphi = f(\theta, \zeta, \xi)$ wyrażonej przez parametry θ oraz, być może, zależnej od innych wielkości mierzonych ζ , jak również pewnych zadanych i znanych dokładnie wartości ξ , to ocenę tę znajdujemy, standardowo, ze związku $\hat{\varphi} = f(\hat{\theta}, \hat{\zeta}, \xi)$, w którym parametry θ , jak i inne wielkości mierzone ζ , zastępujemy ich ocenami. Poprawny wzór na odchylenie standardowe σ_φ oceny wielkości φ przyjmuje wtedy postać:

$$\sigma_\varphi^2 = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f}{\partial \theta_i} V_{ij} \frac{\partial f}{\partial \theta_j} + \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial f}{\partial \zeta_i} W_{ij} \frac{\partial f}{\partial \zeta_j},$$

gdzie $W_{ij} = V[\hat{\zeta}_i, \hat{\zeta}_j]$ jest macierzą kowariancji ocen $\hat{\zeta}_i$, $i = 1, 2, \dots, l$, wielkości mierzonych ζ_i .

Dla przykładu rozważmy sprowadzony do warunków normalnych współczynnik załamania n_0 (7). Jeśli oceny \hat{a} oraz \hat{b} współczynników a oraz b wyznaczone zostały np. metodą najmniejszych kwadratów i uzyskano niepewności u_a, u_b wraz z kowariancją C_{ab} , natomiast oceny \hat{L} , \hat{T} i \hat{p}_a długości L komórki, temperatury T i ciśnienia p_a metodą bezpośredniego pomiaru (za pomocą suwmiarki, termometru i barometru) z niepewnościami u_L, u_T oraz u_p , a wielkości λ, T_0 i p_0 uznamy za znane dokładnie, to ocenę współczynnika znajdziemy jako:

$$n_0 = \frac{\lambda p_0 \hat{T} - \lambda T_0 (\hat{b} + 1) \hat{p}_a}{2 T_0 \hat{L} \hat{p}_a \hat{a}} + 1,$$

a jego niepewność standardowa u_0 wynosi:

$$u_0^2 = \frac{\lambda^2}{4 T_0^2} \left(\left(\frac{p_0 \hat{T} - T_0 (\hat{b} + 1) \hat{p}_a}{\hat{L} \hat{p}_a \hat{a}} \frac{u_a}{\hat{a}} \right)^2 + \left(\frac{T_0}{\hat{L} \hat{a}} u_b \right)^2 + 2 \frac{p_0 \hat{T} - T_0 (\hat{b} + 1) \hat{p}_a}{\hat{L} \hat{p}_a \hat{a}^2} \frac{T_0}{\hat{L} \hat{a}} C_{ab} \right) + \frac{\lambda^2}{4 T_0^2} \left(\left(\frac{p_0 \hat{T} - T_0 (\hat{b} + 1) \hat{p}_a}{\hat{L} \hat{p}_a \hat{a}} \frac{u_L}{\hat{L}} \right)^2 + \left(\frac{p_0}{\hat{L} \hat{p}_a \hat{a}} u_T \right)^2 + \left(\frac{p_0 \hat{T}}{\hat{L} \hat{p}_a \hat{a}} \frac{u_p}{\hat{p}_a} \right)^2 \right),$$

jako że oceny długości komórki, temperatury i ciśnienia nie są skorelowane między sobą i z ocenami współczynników prostej w relacji (7), bo zostały uzyskane w pomiarach niezależnych od siebie jak i niezależnych od pomiarów wiodących do ocen współczynników prostej.

Opracował: Wojciech Skubiszak.

Uzupełnił: Roman J. Nowak i Wojciech Wasilewski, 2 lutego 2016.