

ZADANIE 21

DRGANIA PRĘTA

Cel ćwiczenia

Pobudzany do drgań cienki pręt stalowy zamocowany w imadle dostarcza modelowego układu rządzonego równaniem falowym. W modelu tym wyznaczana jest częstość drgania podstawowego i wyższych wzbudzeń, jak również zależność częstości tych drgań od długości pręta i od jego grubości. Celem ćwiczenia jest sprawdzenie słuszności modelowych związków.

Masz do dyspozycji:

- kilka stalowych prętów o różnej średnicy;
- generator drgań sinusoidalnych wraz z układem umożliwiającym pomiar częstości drgań;
- statyw z uchwytem do prętów i elektromagnesów;
- układ pobudzający pręt do drgań;
- układ rejestrujący drgania pręta;
- wzmacniacz sygnału wejściowego do oscyloskopu;
- oscyloskop;
- suwmiarkę lub śrubę mikrometryczną.

Wykonanie ćwiczenia

Pręt jest pobudzany do drgań elektromagnesem (z namagnesowanym rdzeniem) podłączonym do generatora RC o regulowanej częstości. Pomiar amplitudy drgań odbywa się za pomocą drugiego, identycznego, elektromagnesu, który przez wzmacniacz podłączony jest do wejścia oscyloskopu.

Należy wykonać pomiary:

- grubości wszystkich prętów;
- kolejnych częstości rezonansowych dla wybranego pręta przy ustalonej jego długości;
- zależności podstawowej częstości rezonansowej od długości pręta dla wybranego pręta;
- zależności podstawowej częstości rezonansowej od grubości pręta.

Uwagi praktyczne:

- Dla otrzymania ostrego rezonansu należy dbać, aby sprzężenie generatora z prętem nie było zbyt silne (nie umieszczać elektromagnesów, a szczególnie pobudzającego, zbyt blisko pręta).
- Przy ostrym rezonansie można łatwo ominąć niektóre mody. Aby tego uniknąć, można znaleźć częstość drgań podstawowych lekko odchylając i puszczając wolny koniec pręta (drgania własne). Częstości wyższych modów należy poszukiwać w okolicach odpowiadających proporcjom kwadratów liczb μ_i , gdzie $\mu_1 = 1,875$; $\mu_2 = 4,694$; $\mu_3 = 7,855$; $\mu_n = (n - 1/2)\pi$ dla $n > 3$.
- Innym powodem trudności w obserwacji niektórych drgań własnych może być umieszczenie jednego z elektromagnesów w węźle drgań.

Literatura

- F.C. Crawford, *Fale*, Warszawa, 1972. § 2.2
- H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna wspomaganą komputerem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, szereg wydań w latach 2003 ÷ 2012;
- Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2013.

ZADANIE 21

DRGANIA PRĘTA

Cel ćwiczenia

Pobudzany do drgań cienki pręt stalowy zamocowany w imadle dostarcza modelowego układu rządzonego równaniem falowym. W modelu tym wyznaczana jest częstość drgania podstawowego i wyższych wzbudzeń, jak również zależność częstości tych drgań od długości pręta i od jego grubości. Celem ćwiczenia jest sprawdzenie słuszności modelowych związków.

Wprowadzenie

Najczęściej spotykany przykład ruchu falowego to fala podlegająca **klasycznemu równaniu falowemu**, którego jednowymiarowa wersja ma postać:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0,$$

gdzie v jest tzw. prędkością fali, natomiast ψ to wielkość fizyczna podlegająca, w punkcie o współrzędnej x , dynamicznym zmianom w czasie t . Takimi wielkościami fizycznymi są np.: położenie cząsteczek powietrza lub ciśnienie w fali akustycznej, wychylenia poprzeczne struny gitary, podłużne wychylenie jednorodnego pręta o stałym przekroju na całej długości lub jego kąt skręcenia.

Rozważmy pręt ułożony wzdłuż osi X , a wychylenie z położenia równowagi odbywa się wzdłuż osi Y , a więc jest prostopadłe, wtedy równanie opisujące wychylenie y punktu, który w położeniu równowagi $y = 0$ znajdował się na osi X w punkcie x nie będzie już miało postaci klasycznego równania falowego, lecz będzie to

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad (1)$$

gdzie wielkość a jest zadana związkiem:

$$a = \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}},$$

w którym E jest modułem Younga, ρ gęstością masy, S polem przekroju poprzecznego pręta, a J to tzw. **geometryczny moment bezwładności** (moment bezwładności przekroju poprzecznego).

Wielkość ta dla pręta o przekroju prostokąta o rozmiarach $b \times h$, przy czym h jest wymiarem w kierunku osi Y (czyli kierunku ruchu pręta), wynosi:

$$J = \frac{bh^3}{12},$$

podczas gdy dla przekroju kołowego o średnicy d :

$$J = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Równanie (1) zwane jest często **równaniem fal giętych**.

Rozważmy, czy równanie (1) dopuszcza rozwiązania w postaci **fali harmonicznej**, czyli:

$$y(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)},$$

gdzie

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

gdzie wielkość k zwana jest **liczbą falową**, ω **częstością kołową** fali, a wyrażenie $kx - \omega t$ **fazą** fali. Wielkość λ to długość fali, T jej okres i obie wielkości ukazują na ściśle okresowy charakter zmienności wychylenia y w czasie i przestrzeni w fali harmonicznej. Wspomnimy też, że obok częstości kołowej ω , mierzonej w radianach na sekundę, do opisu zmienności w czasie stosowana jest też odwrotność okresu, czyli częstość $\nu = 1/T$ (bez dodatkowego przymiotnika) mierzona w Hertzach (Hz). W definicji fali harmonicznej równie dobrze możemy wykorzystać funkcję *sinus* lub *cosinus*, a odwołanie się do funkcji wykładniczej od czysto urojonego argumentu to tylko i wyłącznie kwestia

wygody. Podstawiając harmoniczną postać fali do równania znajdujemy, że jest ona jego rozwiązaniem, wszakże pod warunkiem, że częstość i liczba falowa związane są ze sobą relacją: $\omega^2 = a^2 k^4$, zwaną **związkiem dyspersyjnym**. Ponieważ dla częstości mamy dwa rozwiązania: $\omega = \pm ak^2$, możemy więc utworzyć dwa rozwiązania równania falowego:

$$y_1(x, t) = A \exp(i(kx - ak^2t)), \quad y_2(x, t) = B \exp(i(kx + ak^2t)).$$

Zauważmy, że dla klasycznego równania falowego związek dyspersyjny ma postać $\omega^2 = v^2 k^2$.

Przyjrzyjmy się teraz fali $kx - \omega(k)t$ harmonicznej. W chwili czasu t_0 , w punkcie opisanym współrzędną x_0 , faza ta wynosi $\varphi_0 = kx_0 - ak^2t_0$. Jeśli odczekamy czas Δt , to tę samą wartość fazy znajdziemy w punkcie $x = x_0 + ak\Delta t$, a więc przesunęła się ona o odcinek $ak\Delta t$, podróżując z prędkością $v_f = \omega/k = ak$. Prędkość tę nazywamy prędkością fazową i widzimy, że zależy ona od długości fali. Podobną prędkość, ale ujemną: $v_f = -ak$ otrzymujemy dla fali z fazą $kx + \omega(k)t$.

Wróćmy teraz do równania (1). Jest ono liniowe, więc suma fal harmoniczych o różnych częstościach także będzie rozwiązaniem równania falowego. Stąd wnioskujemy, że możemy utworzyć ogólne rozwiązanie postaci:

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - ak^2t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} B(k) e^{i(kx + ak^2t)} dk. \quad (2)$$

gdzie $A(k)$ oraz $B(k)$ to dowolne funkcje, których postać wyznaczamy z **warunków początkowych**:

$$y(x, t = t_0) = y_0(x) \quad \text{oraz} \quad \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} = v_0(x). \quad (3)$$

Wcześniej wskazaliśmy na fakt zależności prędkości fazowej od liczby falowej. Własność ta oznacza, że jeśli uformujemy grupę fal, np. w postaci rozwiązania (2), to w trakcie propagacji rozwiązane to będzie zmieniało swój kształt – będzie ulegało rozmyciu.

Zajmiemy się teraz rozwiązaniem równania (1). Zastosujemy w tym celu **metodę Fouriera**, czyli **rozdzielenia zmiennych**, tj. postulujemy rozwiązanie w postaci $y(x, t) = f(t)g(x)$ iloczynu dwóch funkcji, z których jedna zależy tylko od czasu, druga zaś tylko od położenia. Taką specyficzną postać rozwiązań nazywamy **falą stojącą**. Rozwiązanie to podstawiamy do równania, co prowadzi do:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\frac{a^2}{g} \frac{\partial^4 g}{\partial x^4}.$$

Ponieważ lewa strona zależy jedynie od czasu, prawa zaś od położenia, a to możliwe będzie tylko wtedy, gdy faktycznie obie strony są po prostu równe pewnej nieznannej stałej κ ; co wiedzie do separacji równań

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \kappa f, \quad \frac{\partial^4 g}{\partial x^4} = -\frac{\kappa}{a^2} g.$$

Widzimy, że otrzymane równanie rządzące zależnością czasową jest równaniem oscylatora harmonicznego, jeśli liczba κ jest ujemna lub równaniem, którego rozwiązania zachowują się wykładniczo, jeśli liczba ta jest dodatnia. Ta druga możliwość jest nie do utrzymania z fizycznego punktu widzenia, gdyż sankcjonuje narastającą w czasie wykładniczo amplitudę drgań, dla czego w warunkach postawionego zadania trudno znaleźć uzasadnienie. Z tego też powodu przyjmujemy, że nieznaną stałą jest ujemna, co zapiszemy jako $\kappa = -\omega^2$ i otrzymamy dwa równania:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f, \quad \frac{\partial^4 g}{\partial x^4} = \frac{\omega^2}{a^2} g.$$

Zależność od czasu znajdujemy w formie:

$$f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Dla dalszej wygody, współczynnik ω^2/a^2 w równaniu na funkcję g zamienimy wielkością

$$k = \sqrt{\omega/a}, \quad (4)$$

co daje równanie:

$$\frac{\partial^4 g}{\partial x^4} = k^4 g$$

o rozwiązaniu:

$$g(x) = C \cos kx + D \sin kx + E \cosh kx + F \sinh kx.$$

Rozwiązanie to nie ma charakteru okresowego w przestrzeni – psują je wyrażenia z funkcjami hiperbolicznymi. Choć wielkość k możemy, stosując dość luźny język, nazwać liczbą falową, to fale, które tu się pojawiają, nie są falami harmonicznymi.

Zajmiemy się teraz kwestią **warunków brzegowych**. W ćwiczeniu pręt jest zamocowany jest jednym końcem, np. tym, którego współrzędna określimy jako $x = 0$, w imadle, więc w każdej chwili czasu musimy mieć spełniony warunek $y(x = 0, t) = 0$, co daje:

$$C + E = 0.$$

Ponieważ pręt jest sztywny, więc przyjmiemy, że nie może on być zgięty (przeciwnie niż dla struny), a więc pochodna funkcji $y(x, t)$ musi znikać w punkcie $x = 0$ w każdej chwili czasu, a skoro:

$$\frac{d}{dx} g(x) = -Ck \sin kx + Dk \cos kx + Ek \sinh kx + Fk \cosh kx,$$

więc:

$$D + F = 0.$$

Musimy się jeszcze zająć drugim końcem pręta, opisanym współrzędną $x = L$. W doświadczeniu koniec ten pozostaje swobodny, więc nie mamy tu warunków ani na wartość funkcji ani na jej pochodną. Mamy, za to, warunek braku momentu siły i samej siły. Warunki te tłumacza się jako:

$$\left. \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \quad \text{oraz} \quad \left. \frac{d^3 g(x)}{dx^3} \right|_{x=L} = 0,$$

a ponieważ:

$$\frac{d^2}{dx^2} g(x) = -Ck^2 \cos kx - Dk^2 \sin kx + Ek^2 \cosh kx + Fk^2 \sinh kx,$$

$$\frac{d^3}{dx^3} g(x) = Ck^3 \sin kx - Dk^3 \cos kx + Ek^3 \sinh kx + Fk^3 \cosh kx,$$

więc:

$$-C \cos kL - D \sin kL + E \cosh kL + F \sinh kL = 0,$$

$$C \sin kL - D \cos kL + E \sinh kL + F \cosh kL = 0.$$

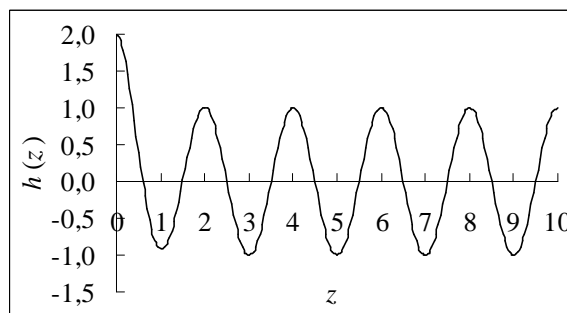
W ten sposób otrzymaliśmy układ czterech równań na cztery nieznane współczynniki. Ponieważ są to równania jednorodne, więc ich jedyne rozwiązania to rozwiązania zerowe, oznaczające brak drgań, chyba że równania te są liniowo zależne. Warunek liniowej zależności możemy narzucić, wymagając znikania wyznacznika układu równań, co prowadzi do równości:

$$\cos(kL) + \frac{1}{\cosh(kL)} = 0.$$

Wykres równoważnej funkcji

$$h(z) = \cos(\pi z) + \frac{1}{\cosh(\pi z)}$$

zamieszczony jest na Rys. 1, z którego widać, jak ze wzrostem argumentu z maleje rola składnika z funkcją hiperboliczną i zarówno wykres jak i zera funkcji $h(z)$ zbliżają się do wykresu i zer funkcji *cosinus*. Warunek znikania wyznacznika prowadzi do równania przestępnego, które musimy rozwiązać numerycznie. Pierwsze trzy zera wypadają w punktach: $k_1 L = \mu_1 = 1,875$, $k_2 L = \mu_2 = 4,694$ oraz $k_3 L = \mu_3 = 7,855$. Wartości, dla których występują następne zera funkcji można, z dokładnością do trzech cyfr znaczących po przecinku, przybliżyć przez zera funkcji *cosinus*, czyli $k_n L = (n - 1/2)\pi$ dla $n > 3$. Znajomość miejsc zerowych, przez związek (4) i relację $\omega = 2\pi\nu$, prowadzi do częstości

Rys. 1. Wykres funkcji $h(z)$

$$v_n = \frac{a\mu_n^2}{2\pi L^2},$$

która wynosi odpowiednio dla drgań pręta o przekroju prostokątnym:

$$v_n = \frac{\mu_n^2 h}{4\pi L^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}$$

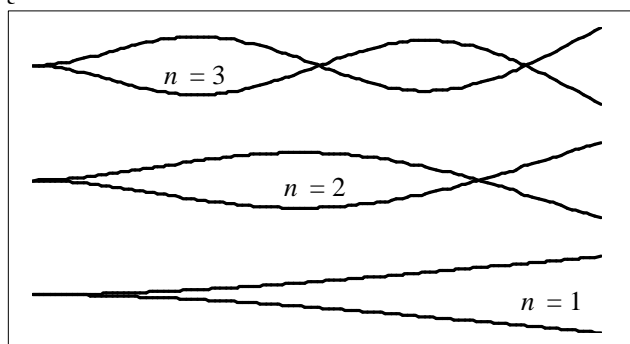
i o przekroju kołowym

$$v_n = \frac{\mu_n^2 d}{8\pi L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Częstość v_1 drgań nazywamy podstawową. Na koniec wróćmy do postaci rozwiązań, tj. funkcji $g(x)$. Ponieważ równania na współczynniki C , D , E oraz F uczyniliśmy liniowo zależnymi, więc aby je wyznaczyć, musimy jedno z równań odrzucić, a pozostałe rozwiązać w zależności od jednego wybranego współczynnika, do którego pozostałe współczynniki będą proporcjonalne. Ten wybrany współczynnik będziemy mogli włączyć do współczynników A i B w zależności czasowej, więc nie musimy go uwzględniać w postaci funkcji $g(x)$, która wynosi:

$$g_n(x) = \cos(k_n x) - \cosh(k_n x) - \frac{\cos(k_n L) + \cosh(k_n L)}{\sin(k_n L) + \sinh(k_n L)} (\sin(k_n x) - \sinh(k_n x)).$$

Wykres tej funkcji dla pierwszych trzech drgań własnych przedstawia Rys. 2. Jak widać, forma fali dla pręta jest nieco inna niż dla struny. Tu też widać węzły, czyli miejsca zerowania się funkcji $y(x,t)$. Występują one dla $x/L = 0,774$ w drugim modzie oraz dla $x/L = 0,500$ i $0,868$ w trzecim modzie. Nie są one równomiernie rozmieszczone, bo funkcja opisująca falę nie jest periodyczna w funkcji współrzędnej wzdłuż pręta.



Rys. 2. Kształt pręta dla trzech pierwszych modów jego drgań własnych

Dyskretna wartość liczby falowej k implikuje dyskretne wartości częstości kołowej ω , a liniowość równania falowego dla pręta dyktuje nam ogólną postać rozwiązania tego równania:

$$y(x,t) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \left(\cos(k_n x) - \cosh(k_n x) - \frac{\cos(k_n L) + \cosh(k_n L)}{\sin(k_n L) + \sinh(k_n L)} (\sin(k_n x) - \sinh(k_n x)) \right)$$

w którym nieznanne stałe A_n oraz B_n wyznaczamy z warunków początkowych (3).

Gdy w ustalonym punkcie x_0 pobudzamy pręt siłą harmoniczną $Q(t) = Q_0 \sin \omega t$, to do powyższego rozwiązanie swobodnego należy dodać wymuszony ruch postaci:

$$(C \cos kx + D \sin kx + E \cosh kx + F \sinh kx) \sin(\omega t).$$

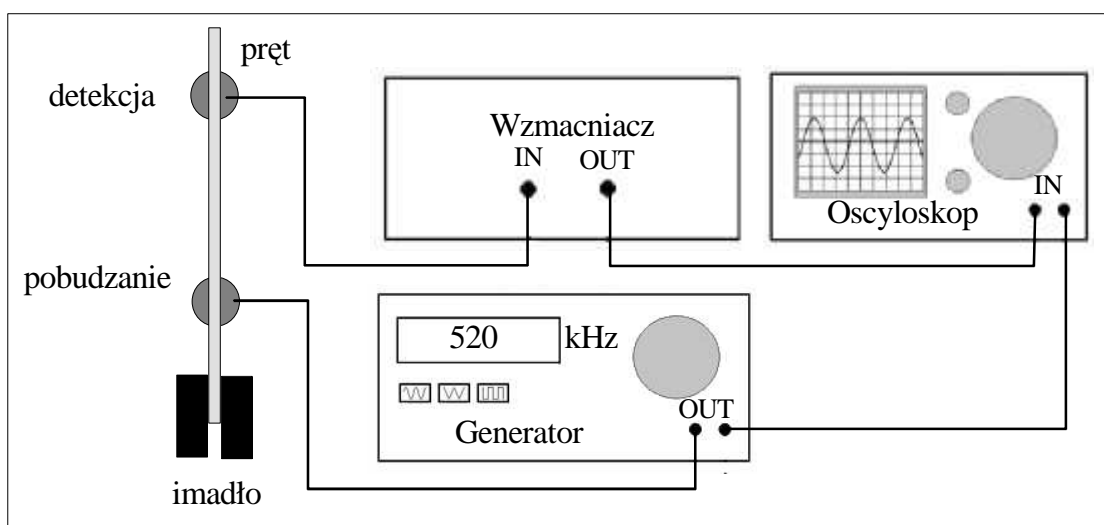
Współczynniki C, D, E oraz F , różne w obszarach $x < x_0$ i $x > x_0$, mają dość skomplikowaną postać, ale wszystkie mają osobliwość przy częstotliwości $\omega_n = ak_n^2$. Należy mieć świadomość, że powyższy opis, zarówno w odniesieniu do drgań swobodnych jak i wymuszonych, to obraz wyidealizowanego modelu. W każdym doświadczeniu prowadzonym w realnych warunkach występuje rozproszenie energii pierwotnie zmagazynowanej w pręcie i zanik drgań swobodnych, a zachowane są jedynie, dzięki stałemu dopływowi energii dostarczanej przez siłę zewnętrzną, drgania wymuszone, które nazywamy **rozwiązaniem stacjonarnym**. Jak powiedzieliśmy, gdy częstotliwość ω siły wymuszającej jest równa jednej z częstotliwości własnych ω_h pręta, to rozwiązania mają osobliwość. W ramach rozpatrywanego modelu interpretujemy to jako brak rozwiązań stacjonarnych. Możemy oczekiwać, że w rzeczywistości dyssypacja energii usuwa tę osobliwość, choć dalej prowadzi do pojawienia się wzrostu amplitudy drgań, ukazującego zjawisko **rezonansu** (winniśmy jednak mieć na uwadze fakt, że w warunkach silnego rezonansu wychylenia pręta mogą być na tyle duże, że zawiodą przybliżenia stosowane przy wyprowadzaniu równania falowego). Spodziewamy się, że rezonans taki objawi się najsilniej wtedy, gdy punkt x_0 przyłożenia siły znajdzie się w położeniu strzałki drgania własnego. Gdybyśmy mieli pecha i siłę wymuszającą o częstotliwości ω_h przyłożyli do punktu, który jest węzłem drgania własnego o tejże częstotliwości ω_h , to drgań nie spowodujemy.

Masz do dyspozycji:

- kilka stalowych prętów o różnej średnicy;
- generator drgań sinusoidalnych wraz z układem umożliwiającym pomiar częstotliwości drgań;
- układ pobudzający pręt do drgań;
- układ rejestrujący drgania pręta;
- wzmacniacz sygnału wejściowego do oscyloskopu;
- oscyloskop;
- statyw z uchwytem do prętów i elektromagnesów;
- suwmiarkę lub śrubę mikrometryczną.

Wykonanie ćwiczenia

Schemat układu pomiarowe przedstawia Rysunek 3. Pręt jest pobudzany do drgań elektromagnesem (z namagnesowanym rdzeniem) podłączonym do generatora RC o regulowanej częstotliwości. Pomiar amplitudy drgań odbywa się za pomocą drugiego identycznego elektromagnesu, który przez wzmacniacz podłączony jest do wejścia oscyloskopu.



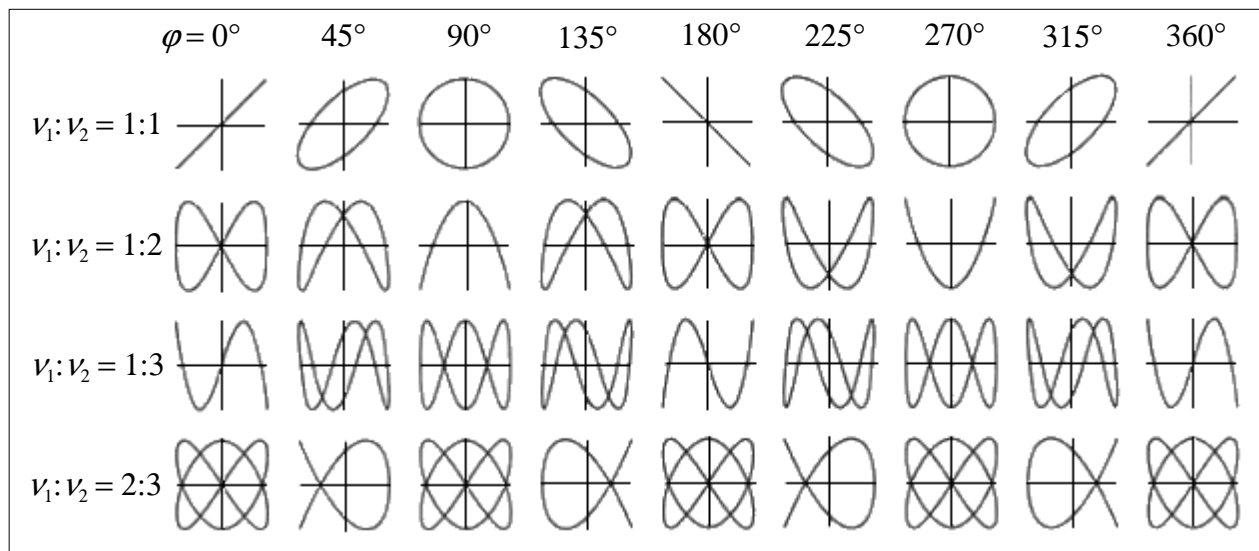
Rys.3. Schemat układu pomiarowego

Należy wykonać pomiary:

- grubości wszystkich prętów;
- kolejnych częstości rezonansowych dla wybranego pręta przy ustalonej jego długości;
- zależności podstawowej częstości rezonansowej od długości pręta dla wybranego pręta;
- zależności podstawowej częstości rezonansowej od grubości pręta.

Uwagi praktyczne:

- Częstość rezonansową odczytujemy na generatorze drgań. Decyzję co do jej wartości można podjąć w jednym z dwóch trybów pracy oscyloskopu, do którego podłączony jest, do wejścia Y, sygnał ze wzmacniacza. Zmieniając częstość drgań wymuszających możemy prowadzić obserwację amplitudy drgań pręta jako funkcję czasu – przy częstości rezonansowej amplituda ta powinna być największa. W drugim trybie, sygnał wymuszający drgania podłączamy do tzw. wejścia X oscyloskopu, podczas gdy sygnał ze wzmacniacza pozostaje podłączony do wejścia Y, a sam oscyloskop przełączamy w tzw. tryb XY. Wtedy też częstości drgań pręta złożone z częstością generatora utworzą na ekranie oscyloskopu figury, zwane figurami Lissajous, o przykładowych kształtach ukazanych na Rysunku 4.



Rys.4. Przykłady krzywych Lissajous dla różnych stosunków częstości i różnic faz .

- Dla otrzymania ostrego rezonansu należy zadbać, aby sprzężenie generatora z prętem nie było zbyt silne (nie umieszczać elektromagnesów, a szczególnie pobudzającego, zbyt blisko pręta).
- Przy ostrym rezonansie można łatwo ominąć niektóre mody. Aby tego uniknąć, można znaleźć częstość drgań podstawowych lekko odchylając i puszczając wolny koniec pręta (drgania własne). Częstości wyższych modów należy poszukiwać w okolicach odpowiadających proporcjom kwadratów liczb μ_i , gdzie $\mu_1 = 1,875$; $\mu_2 = 4,694$; $\mu_3 = 7,855$; $\mu_n = (n - 1/2)\pi$ dla $n > 3$.
- Zadbaj o to, by nie umieścić elektromagnesu wymuszającego drgania w węźle drgań.

Analiza wyników pomiarów

Celem analizy danych jest sprawdzenie stosowności modelowego wzoru:

$$\nu_i = \frac{\mu_i^2 h}{4\pi L^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}$$

wyrażającego częstość (w Hertzach) drgań pręta prostokątnego lub częstość

$$\nu_i = \frac{\mu_i^2 d}{8\pi L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

w przypadku pręta o przekroju kołowym. We wzorach tych h jest grubością pręta o przekroju prostokątnym (mierzoną w kierunku jego drgań), d jest średnicą pręta o przekroju kołowym,

L długością części drgającej pręta, E modułem Younga, $\rho = (7,87 \pm 0,01) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ gęstością pręta, a wartości liczb μ_i podane są wyżej.

Aby tego dokonać, analiza danych winna obejmować następujące elementy:

- ustalenie realistycznych, dopuszczalnych błędów granicznych wielkości bezpośrednio mierzonych i wyznaczenie odpowiadających im niepewności standardowych – pamiętaj, że zdolność rozdzielcza przyrządu nie musi gwarantować sensownych błędów granicznych (oczywiście, możesz też od razu oszacować niepewności standardowe, bez przechodzenia przez etap błędów granicznych);
- wyznaczenie, w każdym z kroków analizy, niezbędnych niepewności standardowych wielkości mierzonych pośrednio;
- weryfikację, z zastosowaniem metod statystycznej analizy danych, słuszności modelowej relacji między częstościami różnych drgań własnych a wartościami liczb μ_i ;
- wyznaczenie, z tych samych danych, oceny, wraz z niepewnością, modułu Younga materiału pręta, o ile uznasz taki krok za uzasadniony;
- weryfikację, z zastosowaniem metod statystycznej analizy danych, słuszności modelowej relacji między częstością drgania podstawowego a długością pręta;
- wyznaczenie, z tych samych danych, oceny, wraz z niepewnością, modułu Younga materiału pręta, o ile uznasz taki krok za uzasadniony;
- weryfikację, z zastosowaniem metod statystycznej analizy danych, słuszności modelowej relacji między częstością podstawowego drgania własnego a grubością pręta;
- wyznaczenie, z tych samych danych, oceny, wraz z niepewnością, modułu Younga materiału pręta, o ile uznasz taki krok za uzasadniony;
- stosowne wyznaczenie wartości modułu Younga ze wszystkich lub części pomiarów, o ile uznasz taki krok za uzasadniony.

Jeśli na którymś z etapów analizy prowadzisz dopasowanie modelowej zależności do danych metodą najmniejszych kwadratów, **obowiązkowo** podaj jawną formę wielkości minimalizowanej, jako że postać ta jednoznacznie definiuje, który z wariantów metody wybierasz, a więc jaką postać przybierają wzory na oceny nieznanymi współczynnikami modelowej zależności oraz ich niepewności standardowe i nie musisz cytować stosownych wzorów dla tych obiektów.

Dodatkowe uwagi odnośnie do raportu

W raporcie zamieść, w stosownie dobranych tabelach, wszystkie surowe wyniki pomiarów tak, aby sięgając jedynie do raportu i bez potrzeby odwoływania się do protokołu z doświadczenia można było wykonać pełną i niezależną analizę Twoich danych. Zadbaj o wierne przeniesienie zmierzonych wartości do raportu.

Nim przygotujesz raport, zaznajom się z uwagami zawartymi w opracowaniu *Instrukcja - Jak pisać raport końcowy* oraz z przykładową realizacją tych uwag w postaci *Przykładowy raport końcowy* jakie zamieszczone są na stronie <http://anipw.igf.fuw.edu.pl> Pracowni wstępnej. Wymagania ukazane w tych opracowaniach będą bezwzględnie egzekwowane przy sprawdzaniu Twego raportu. W szczególności pamiętaj o konwencji odnoszącej się do precyzji przedstawiania niepewności, a co za tym idzie, również wartości oceny wielkości zmierzonej.

Absolutnie zalecane jest świadome przyjrzenie się redakcji tekstu a także tabel, rysunków i wzorów, sposobów ich numerowania, tytułowania i opisywania w dowolnym, ale wydanym przez uznane wydawnictwo, akademickim podręczniku do fizyki, jak również zajrzenie do kilku publikacji w różnych czasopismach naukowych, co może ułatwić podjęcie decyzji w kwestii podziału Twego raportu na części.

Literatura

- F.C. Crawford, *Fale*, Warszawa, 1972. § 2.2
- H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna wspomagana komputerem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, szereg wydań w latach 2003 ÷ 2012;

- Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2013.

Pytania i zadania definiujące wymagania do ćwiczenia

Problem 1. W jaki sposób wyznacysz niepewność częstości drgania pręta?

Problem 2. Podaj postać prawa Hooke'a i zdefiniuj precyzyjnie wszystkie wielkości, które występują w jego sformułowaniu.

Problem 3. Równanie fali dźwiękowej, opisującej wychylenia ψ cząsteczek powietrza z położenia równowagi, ma postać $\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$, gdzie $A = 6,0 \cdot 10^{-2}$ mm, $k = 5,3 \text{ m}^{-1}$ oraz $\omega = 1800 \text{ s}^{-1}$.

- Oblicz stosunek amplitudy drgań cząsteczek ośrodka i długości fali.
- Oblicz maksymalną prędkość drgań cząsteczek ośrodka i jej stosunek do prędkości fali.
- Naskicuj na wykresie kierunki prędkości cząsteczek powietrza w chwili $t = 0$.

Problem 4. W jednorodnym ośrodku sprężystym utworzono falę stojącą $\psi(x,t) = A\cos(kx)\cos(\omega t)$. Naskicuj na wykresie wychylenie ψ cząsteczek ośrodka z położenia równowagi dla chwil czasu: $t = 0$ oraz $t = T/2$, gdzie T jest okresem fali oraz ich prędkości w chwili $t = T/4$.

Problem 5. W strunie o długości $L = 120$ cm wywołano falę stojącą. W dwóch punktach struny odległych od siebie o $l = 15$ cm, amplituda A fali jest równa 3,5 mm. Ile wynosi maksymalna amplituda fali? Której harmonicznej odpowiada ta fala?

Problem 6. Wyznacz moduł Younga stalowego pręta o gęstości $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$, o długości $L = 25$ cm i średnicy $d = 2$ mm, jeśli zamocowany na jednym końcu drga z częstością podstawową $\nu = 23$ Hz.

Pytania i zadania przybliżające, uzupełniające lub poszerzające treść ćwiczenia

Problem 7. Pokaż, że funkcja $y(x,t)$ zadana związkami (2) jest rozwiązaniem równania fal giętych.

Problem 8. Pokaż, że jeśli funkcje $f_1(x,t)$ oraz $f_2(x,t)$ są rozwiązaniem równania fal giętych, to funkcja $f(x,t) = af_1(x,t) + bf_2(x,t)$, gdzie a oraz b to dowolne stałe, jest także rozwiązaniem tego równania.

Problem 9. Dane są dwie podłużne fale $\psi_1(x,t) = A\sin(k_1x - \omega_1t)$ oraz $\psi_2(x,t) = B\sin(k_2x - \omega_2t)$ rozchodzące się w ośrodku sprężystym. Znajdź różnicę fazy fali wypadkowej względem fazy fali A i fali B . Jakie warunki muszą spełniać k_1 , ω_1 , k_2 , ω_2 aby fala wypadkowa była falą stojącą?

Problem 10. W powietrzu rozchodzą się dwie podłużne fale: jedna wzdłuż osi X i ma postać $\psi_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ i druga, wzdłuż osi Y , zadana wzorem $\psi_2(y,t) = A\cos(ky - \omega t)$. Opisz ruch cząsteczek ośrodka w płaszczyźnie XY .

Problem 11. Wyznacz rozwiązanie równania fal giętych, jeśli w chwili $t = 0$ nieskończenie długiemu prętowi nadano kształt

$$y_0(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

gdzie A i σ to zadane stałe, a następnie ją uwolniono bez prędkość początkowej.

Problem 12. Wyznacz związek dyspersyjny dla równania

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

gdzie $i^2 = -1$, i podaj ogólną postać jego rozwiązania.

Problem 13. Pokaż, że tor punktu o współrzędnych $x(t) = A\sin(\omega t)$, $y(t) = A\cos(2\omega t)$, to parabola.

Problem 14. Struna o masie m , zamocowana na obu końcach, drga z częstością podstawową ω , przy czym maksymalne wychylenie struny wynosi A . Wyznacz maksymalną energię kinetyczną struny oraz jej średnią energię kinetyczną w czasie jednego okresu.

Problem 15. Równanie falowe ma postać

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Ile wynosi prędkość fali w wzdłuż osi X ? A wzdłuż osi Y ?

Opracował: Jan Gaj.

Uzpełnił: Roman J. Nowak, 18 listopada 2014.