ZADANIE 8
WAHADŁA SPRZĘŻONE

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczeni współczynnika sprężystości sprężyny dwiema metodami: dynamiczną – mierząc okresy różnych trybów drgań wahadeł sprzężonych, a także metodą statyczną – przez pomiar wydłużenia sprężyny pod wpływem siły ciężkości.

Masz do dyspozycji

- dwa wahadła sprzężone sprężyną; wahadła mają nakrętki pozwalające zmienić położenia środka ciężkości wahadła, a więc i jego momentu bezwładności;
- miarkę metrową lub papier milimetrowy;
- nitkę;
- zapalniczkę;
- szalkę wagi;
- statyw;
- odważniki;
- ostrze pryzmatyczne do wyznaczania środka ciężkości.

Wykonanie ćwiczenia

- Dokonaj symetryzacji wahadeł (punktów zaczepienia sprężyny, okresów wahań).
- Dokonaj pomiaru okresu drgań wahadeł.
- Dokonaj pomiar okresu drgań wahadeł sprzężonych dla ruchu w przeciwfazie.
- Dokonaj pomiar okresu dudnień i okresu drgań wahadeł przy występowaniu dudnień.
- Za pomocą statywu unieruchom jedno z wahadeł i wykonaj pomiar okresu drgań drugiego.
- Wykorzystując pryzmatyczne ostrze, wykonaj pomiar odległość środka ciężkości wahadeł od ich osi obrotu.
- Za pomocą statywu, szalki, odważników i papieru milimetrowego (otrzymasz go w sekretariacie Pracowni) lub miarki metrowej wykonaj pomiary niezbędne do statycznego wyznaczenia stałej sprężystości.

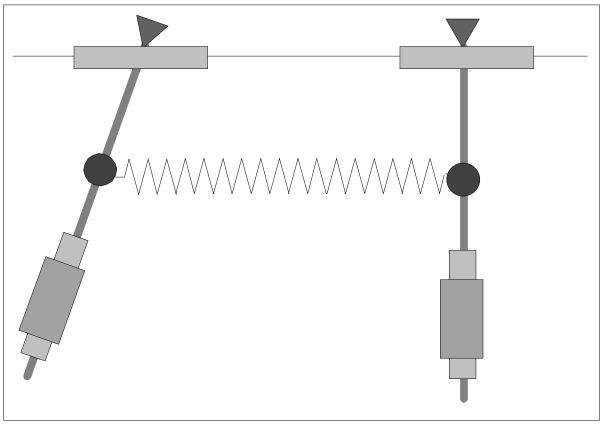
Literatura

- F.C. Crawford, *Fale*, PWN, Warszawa 1972, str. 48 – 52, 100 – 102;
- C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, *Mechanika*, PWN, Warszawa 1969, Rozdział 7;
- H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna wspomagana komputerem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, szereg wydań w latach 2003 ÷ 2012;
- A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2013.

ZADANIE 8
WAHADŁA SPRZĘŻONE

I. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczeni współczynnika sprężystości sprężyny i jest pretekstem do poznania i opisu zjawisk występujących podczas wahań dwóch wahadeł sprzężonych za pomocą sprężyny, jak to schematycznie ukazuje Rysunek 1. Dynamiczna metoda pomiaru współczynnika sprężystości odwołuje się do pomiar okresów różnych trybów drgań takich wahadeł. Drugi sposób, zwany statycznym, wykorzystuje wydłużenie sprężyny pod działaniem siły ciężkości.



Rys. 1. Schemat wahadeł sprzężonych

II. Podstawy teoretyczne

W eksperymencie odwołujemy się do modelu dwóch wahadeł sprzężonych za pomocą sprężyny. Wahadła są jednakowe, tzn. mają ten sam moment bezwładności $I_1 = I_2 = I$, tę samą masę m i tę samą odległość r środka ciężkości od osi obrotu. Wahadła połączone są sprężyną podlegającą prawu Hooke'a o współczynniku sprężystości k. W położeniu równowagi sprężyna nie jest napięta a jej punkty przyczepienia do wahadeł leżą w odległości a od osi obrotu, tej samej dla obu wahadeł. Ruch każdego z wahadeł jest płaskim ruchem obrotowym wokół ustalonej osi. Równania Newtona ruchu takiego układu wraz z ich rozwiązaniami w ogólnym jak i w każdym z niżej dyskutowanych przypadków są szczegółowo przedstawione w **DODATKU**. Układ taki łatwo jest operacyjnie wprowadzić w kilka trybów drgań, które odpowiadają wychylenia opisane symbolami φ_1 oraz φ_2.

a). **Drganie własne – drgania w fazie**. Wychylając o ten sam kąt oba wahadła w tę samą stronę i zwalniając je jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowej, uzyskujemy zsynchronizowany, zgodny w fazie ruch obu wahadeł z częstością ω_1 i okresem T_1 tak, jakby nie były one połączone sprężyną i drgały jedynie pod wpływem siły ciężkości:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}\psi_{10}\cos(\omega_1 t), \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{2}\psi_{10}\cos(\omega_1 t), \quad \omega_1^2 = \frac{mgr}{I}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

b). **Drganie własne – drgania w przeciwfazie**. Wychylając o ten sam kąt oba wahadła w przeciwną stronę i zwalniając je jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowej, uzyskujemy synchroniczny ruch, w którym wahadła drgają w przeciwfazie, a ruch każdego odbywa się z częstością ω_2 i okresem T_2:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}\psi_{20}\cos(\omega_2 t), \quad \varphi_2(t) = -\frac{1}{2}\psi_{20}\cos(\omega_2 t), \quad \omega_2^2 = \frac{mgr + 2ka^2}{I}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}.$$

c). **Dudnienia**. Uruchamiamy wahadła tak, ze jedno z nich, np. pierwsze, jest wychylone o pewien kąt, w dowolną stronę, a drugie utrzymujemy w położeniu równowagi i oba zwalniamy jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowych. Wtedy ruch przyjmie postać:

$$\varphi_1(t) = A_1(t)\cos(\Omega_s t), \quad A_1(t) = \varphi_{10}\cos(\Omega_d t),$$
$$\varphi_2(t) = A_2(t)\sin(\Omega_s t), \quad A_2(t) = \varphi_{10}\sin(\Omega_d t),$$

przy czym:

$$\Omega_s = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}, \quad \Omega_d = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}, \quad T_s = \frac{2\pi}{\Omega_s} = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2}, \quad T_d = \frac{2\pi}{\Omega_d} = \frac{2T_1T_2}{T_1 - T_2}.$$

Jest to ruch, w którym amplituda $A_i(t)$ szybkich drgań z okresem T_s modulowana jest wolnozmiennym w czasie, harmonicznym drganiam z okresem T_d. Zjawisko periodcznej zmiany amplitudy drgń nazywamy **dudnieniem**, w tym przypadku dudnieniem z częstością Ω_d.

d). W końcu ostatni typ ruchu jednego z wahadeł, np. pierwszego, gdy drugie jest unieruchomione, za pomocą statywu, w pozycji pionowej. Wtedy drganie $\varphi_2(t)$ jest tożsamościowo równe zeru, a ruch pierwszego przyjmuje postać drgań harmonicznych z częstością ω_0 i okresem T_0:

$$\varphi_1(t) = \varphi_{10} \sin(\omega_0 t), \quad \omega_0^2 = \frac{mgr + ka^2}{I}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

III. Wykonanie pomiarów

III.1. Wstęp

Część pomiarów dotyczy okresów wahadeł, dlatego poświęcimy teraz nieco uwagi tym pomiarom. Przydatna przy tym będzie wiedza i umiejętności uzyskany przy wykonywaniu pierwszego ćwiczenia na Pracowni Wstępnej. Przypominamy, że okres wahadła to czas, jaki upłynął od chwili, gdy minęło ono pewne położenie z określoną prędkością do chwili, gdy wróci do tego położenia z tą samą, co do wartości i kierunku, prędkością. Na przykład powinniśmy mierzyć okres, gdy wahadło przechodzi przez położenie równowagi. Zgodnie z założeniami rozważanego modelu małych drgań, należy zawsze wychylać wahadło o małe kąty (kilka stopni). Jak wiemy, w trakcie jednego pomiaru należy mierzyć czas wielu wahnięć łącznie. Gdy wahadło mija ustalone położenie, włączmy stoper i mówimy „zero”, po pełnym wahnięciu mówimy „jeden”, itd. Aż do ustalonej liczby. W tym przypadku podczas jednego pomiaru wystarczy mierzyć czas np. 10 drgań. Pomiary powtarzamy ok. 10 razy.

III.2.Wyposażenie

- dwa wahadła sprzężone sprężyną; wahadła mają nakrętki pozwalające zmienić położenia środka ciężkości wahadła, a więc i jego momentu bezwładności;
- miarkę metrową lub papier milimetrowy;
- nitkę;
- zapalniczkę;
- szalkę wagi;
- statyw;
- odważniki;
- ostrze pryzmatyczne do wyznaczania środka ciężkości.

III.3. Planowanie pomiarów

Kluczowym elementem modelu stanowiącego podstawę doświadczenia jest równość okresów drgań obu wahadeł. Ponieważ modyfikując wahadła nigdy nie doprowadzimy do sytuacji, w której będą one miały dokładnie taki sam okres, musimy pogodzić się faktem marginalnie różnych okresów drgań – zawsze jednak pozostanie pytanie o dopuszczalny rozmiar tego marginesu. Rozwiązanie tej trudności możemy znaleźć na następującej drodze. Każdy z pomiarów sprzężonych wahadeł wymagać będzie pewnego czasu. Jeśli rozważymy swobodnie drgające, niesprzężone wahadła, które w identycznym czasie utracą, w zauważalnym stopniu, synchroniczność swego ruch, jednokrotny pomiar wielkości, z której zamierzamy wyznaczyć wybrany okres drgań w układzie sprzężony, będzie najpewniej bezwartościowy. Ponieważ najdłuższym okresem drgań charakteryzują się dudnienia, więc musimy zadbać o zachowanie synchroniczności przynajmniej przez czas, jaki zamierzamy poświęcić pojedynczemu pomiarowi wielkości, z której będziemy wyznaczać właśnie okres dudnień.

Przypuśćmy, że planujemy wykonać pewną liczbę okresów T_d, co zajmie nam pewien, w tej chwili nieznany, czas t. Aby ten czas ocenić, sprawdźmy wstępnie zgodność okresów drgań obu wahadeł. W tym celu uruchommy oba wahadła, niesprzężone, wychylając je w tę samą stronę i zwalniając jednocześnie, bez prędkości początkowej. Obserwujmy ich ruch przez czas odpowiadający kilkudziesięciu ich okresów, zwracając uwagę na synchroniczność ich ruchu. W razie potrzeby dokonajmy niezbędnych regulacji nakrętką na wahadle.

Nim przystąpimy do pomiaru okresu dudnień, powinniśmy jeszcze zastanowić się nad sprzężeniem. Siłę sprzężenia możemy regulować wybierając odległości a punktu zamocowania sprężyny do wahadła od osi obrotu. Zamocowanie to możemy przesuwać wzdłuż prętów wahadeł – pamiętajmy o umieszczeniu zamocowań obu końców sprężyny w tej samej odległości od osi obrotu wahadła. Jeśli odległość a będzie duża, to przy ściskaniu sprężyna może się wygiąć w łuk, a więc niezgodnie z przyjętym w równaniach modelem. Duża wartość parametru a spowoduje, że okres dudnień był mały, a to utrudni nam to zarówno pomiar okresu drgań szybkich jak i dudnień. Z drugiej strony, jeśli wartość parametru a będzie zbyt mała, to okres dudnień będzie wyjątkowo długi i ze względu na występujące straty energii, ruch układu ustanie nim wykonamy pomiar. Tak dobierzmy punkt przyczepienia sprężyny do wahadła, aby w trakcie jednego okresu dudnienia wystąpiło kilka do kilkunastu drgań szybkich. Wynikiem tego postepowania będzie oszacowanie czasu t, jaki zamierzamy spędzić na pojedynczym pomiarze zaplanowanej liczby dudnień.

Teraz wróćmy do rozprzęgniętych wahadeł i ponownie uruchommy je, wychylając w tę samą stronę i zwalniając jednocześnie, bez prędkości początkowej. Obserwujmy ruch wahadeł przez oszacowany czas t, zwracając uwagę na synchroniczność i dokonując, w razie potrzeby, stosownych regulacji.

III.4. Wyznaczanie okresów drgań.

a) Uruchamiamy wahadła jak w przypadku II.a. W tym przypadku lepiej jest rozłączyć wahadła i badać ruch dowolnego z nich (wszak sprawdziliśmy, że są jednakowe). Mierzymy okres T_1.

b) Uruchamiamy wahadła jak w przypadku II.b. W chwili $t_0 = 0$ oba nieruchome wahadła wychylone są od pionu o ten sam kąt, ale w przeciwne strony. Teoretycznie nie ma znaczenia, czy wahadła są zbliżone do siebie, czy też oddalone, wygodniej jest jednak zrealizować pierwszy przypadek. Zbliżamy wahadła ku sobie, co powoduje skurczenie sprężyny. Ponieważ ma ona tendencję do wyginania się w łuk, należy na tyle zbliżyć wahadła, aby wygięcie to nie wystąpiło, w przeciwnym razie zmienia się współczynnik sprężystości. Związujemy nitką końce zsuniętych wahadeł. W równowadze oba nieruchome wahadła będą symetrycznie wychylone ku sobie. Po przepaleniu nitki obserwujemy dowolne z wahadeł i mierzymy okres T_2.

c) Uruchamiamy wahadła jak w przypadku II.c. W chwili $t_0 = 0$ oba wahadła powinny być nieruchome. Jedno z nich wychylamy o niewielki kąt, a drugie utrzymujemy w położeniu pionowym. Zwalniamy oba wahadła jednocześnie bez nadawania im prędkości początkowych i obserwujemy dudnienia. Pomiar okresów T_s i T_d odbywa się na podstawie obserwacji ruchu jednego z wahadeł.

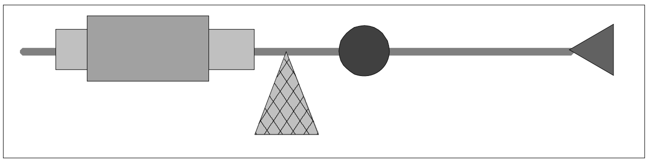
   Pomiar okresu T_s: liczymy tu drgania jednego z wahadeł nie zważając na to, że odbywają się one ze zmienną amplitudą. Ze względu na warunki doświadczenia nie zawsze można mierzyć czas trwania dużej liczby drgań bez obawy popełnienia większego błędu – może się bowiem zdarzyć, że wahadło zatrzyma się w trakcie pomiaru. W układzie zrealizowanym w Pracowni wahadło zatrzymuje się co kilka lub kilkanaście drgań w zależności od położenia punktu zaczepienia sprężyny. W trakcie jednego pomiaru mierzymy czas trwania np. 5 drgań. Pomiar powtarzamy ok. 10 razy.

   Pomiar okresu T_d dudnień: znów obserwujemy ruch dowolnego wahadła. Należy pamiętać, że od jednego zatrzymania się wahadła do ponownego mija tylko pół okresu. Wygodnie jest rozpocząć pomiar, gdy wahadło zatrzymuje się. W trakcie jednego pomiaru mierzymy czas np. 5 okresów. Ze względu na błąd spowodowany trudnością ustalenia momentu zatrzymania się wahadła, pomiary powtarzamy większą niż dotychchcas liczbę razy, np. 20.

d) Okres T_0 mierzymy obserwując ruch dowolnego z wahadeł, podczas gdy drugie unieruchomione jest w pozycji pionowej za pomocą statywu.

III.5. Wyznaczanie współczynnika sprężystości sprężyny metodą dynamiczną

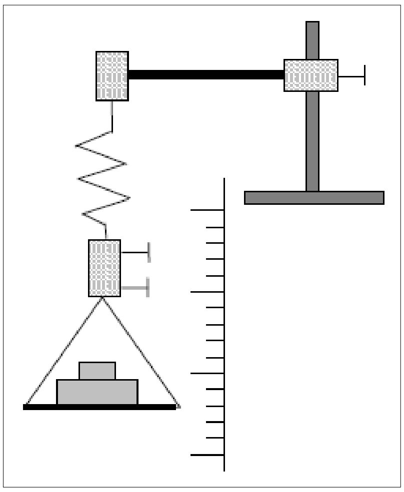
Metoda ta odwołuje się do zmierzonych częstości drgań, które zależą od wartości współczynnika. W stosownych wzorach na częstość występuje odległość środka masy wahadła od osi obrotu. Znajdujemy ją równoważąc wahadło ułożone w poziomej pozycji na pryzmatycznym ostrzu, jak ukazuje to Rysunek 2. Wahadła należy w tym celu zdjąć ostrożnie z łożysk, a po pomiarze ułożyć precyzyjnie ponownie w łożyskach. Masa *m* wahadła podana jest na nalepce na wahadle.



Rys. 2. Wyznaczanie środka ciężkości

III.6. Wyznaczanie współczynnika sprężystości sprężyny metodą statyczną

W celu uzyskania oceny współczynnika odwołujemy się do prawa Hooke'a. Współczynnik wyznaczamy mierząc przyrost długości sprężyny pod wpływem znanego obciążenia – patrz Rysunek 3.



Rys.3. Wyznaczanie współczynnika sprężystości

IV. Analiza wyników pomiarów

Analiza danych winna zawierać następujące elementy:

- symetryzacja wahadeł;
- ustalenie realistycznych, dopuszczalnych błędów granicznych wielkości bezpośrednio mierzonych i wyznaczenie odpowiadających im niepewności standardowych – pamiętaj, że zdolność rozdzielcza przyrządu nie musi gwarantować sensownych wartości błędów granicznych (oczywiście, możesz też od razu oszacować niepewności standardowe, bez przechodzenia przez etap błędów granicznych);
- wyznaczenie ocen wszystkich okresów drgań wraz z niepewnościami;
- konfrontację ocen okresów T_s oraz T_d drgań wyznaczonych bezpośrednio z pomiarów okresów w zjawisku dudnień z ocenami okresów drgań wyznaczonych w sposób pośredni z pomiarów drgań własnych;
- prezentację, wykorzystującą zgromadzone dane, optymalnego, w mniemaniu autora raportu, sposobu wyznaczenia współczynnika sprężystości sprężyny metodą dynamiczną;
- ocenę, wraz z jej niepewnością, współczynnika sprężystości sprężyny wynikającą z wybranej metody dynamicznej;
- prezentację, wykorzystującą zgromadzone dane, optymalnego, w mniemaniu autora raportu, sposobu wyznaczenia współczynnika sprężystości sprężyny metodą statyczną;
- ocenę, wraz z jej niepewnością, współczynnika sprężystości sprężyny wynikającą z wybranej metody statycznej;
- weryfikację zgodności ocen współczynnika uzyskanych na dwóch drogach;
- ostateczną ocenę, wraz z jej niepewnością, współczynnika sprężystości wynikającą z wykonanych pomiarów.

Jeśli na którymś z etapów analizy prowadzisz dopasowanie modelowej zależności do danych metodą najmniejszych kwadratów, **obowiązkowo** podaj jawną postać wielkości minimalizowanej, jako że postać ta jednoznacznie wyznacza oceny poszukiwanych współczynników modelowej zależności wraz z ich macierzą kowariancji i nie musisz cytować stosownych wzorów dla tych obiektów. Pamiętaj, że niezbędnym elementem tego podejścia jest uzasadnienie wyboru zmiennej zależnej i niezależnej, a także sprawdzenie, jeśli to możliwe, zgodności danych z modelem metodą testu χ^2. Pamiętaj też, że wersja metody najmniejszych kwadratów, którą poznałeś na wykładzie i która jest powszechnie prezentowana w wielu książkach i na sieci WWW, wymaga wyników pomiarowych, z których każdy uzyskany jest w niezależnym akcie pomiarowym. **Nie mają takiego**

charakteru wielkości uzyskane np. w wyniku odejmowania jednej ustalonej wartości od wszystkich wyników pomiarów, jeśli wartość odejmowana pochodzi z pomiaru.

Obok wykresu ukazującego dane doświadczalne, wraz z ich niepewnościami oraz dopasowaną zależnością modelową, do dobrej praktyki należy także przedstawienie reszt z tego dopasowania. Rysunek taki pokazuje, w powiększeniu, jakość dopasowania, a także dostarcza dodatkowego wglądu, którego nie znajdziemy ani na wykresie dopasowanej krzywej, ani w wartości minimalnej sumy kwadratów reszt: uzyskany wzór reszt może dostarczyć sugestii odnośnie do trafności wybranej zależności modelowej.

V. Dodatkowe uwagi odnośnie do raportu

W raporcie zamieść, w stosownie dobranych tabelach, wszystkie surowe wyniki wykonanych pomiarów tak, aby sięgając jedynie do raportu i bez potrzeby odwoływania się do protokołu z doświadczenia można było wykonać pełną i niezależną analizę Twych danych. Zadbaj o wierne przeniesienie zmierzonych wartości do raportu.

Nim przygotujesz raport, zaznajom się z uwagami zawartymi w opracowaniu *Instrukcja - Jak pisać raport końcowy* oraz z przykładową realizacją tych uwag w postaci *Przykładowy raport końcowy*. Materiały te zamieszczone są na stronie http://anipw.igf.fuw.edu.pl Pracowni wstępnej. Wymagania ukazane w tych opracowaniach będą bezwzględnie egzekwowane przy sprawdzaniu Twego raportu. W szczególności pamiętaj o konwencji odnoszącej się do precyzji przedstawiania niepewności, a co za tym idzie, również wartości wielkości zmierzonej.

Absolutnie zalecane jest także świadome przyjrzenie się redakcji tekstu, a także tabel, rysunków i wzorów, sposobów ich numerowania, tytułowania i opisywania w dowolnym, ale wydanym przez uznane wydawnictwo, akademickim podręczniku do fizyki, jak również zajrzenie do kilku publikacji w różnych czasopismach naukowych, co może ułatwić podjęcie decyzji co do podziału Twego raportu na części.

VI. Literatura uzupełniająca

- F.C. Crawford, *Fale*, PWN, Warszawa 1972, str. 48 - 52, 100 – 102;
- C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, *Mechanika*, PWN, Warszawa 1969, Rozdział 7;
- H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna wspomagana komputerem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, szereg wydań w latach 2003 ÷ 2012;
- A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2013.

VII. Pytania i zadania definiujące wymagania do ćwiczenia

Problem 1. Podaj postać prawa Hooke'a i zdefiniuj precyzyjnie wszystkie wielkości, które występują w jego sformułowaniu.

Problem 2. Współczynnik α rozszerzalności cieplnej stali wynosi $1{,}2\cdot10^{-5}$ stopień$^{-1}$, a jej moduł Younga E to 20 GPa. Jakie ciśnienie p należy przyłożyć do podstaw stalowego walca, aby jego długość nie uległa zmianie przy podwyższeniu temperatury o 100°? Współczynnik rozszerzalności cieplnej definiujemy jako $\alpha = \Delta L/\Delta t$, gdzie ΔL to zmiana długości stowarzyszona ze zmianą Δt temperatury.

Problem 3. Wyprowadź równanie ruchu pojedynczego wahadła w polu grawitacyjnym.

Problem 4. Omów jakościowo charakter ruchu zadany rozwiązaniem równania $\ddot{x} = kx$, gdzie zadana stała k jest dodatnia.

Problem 5. Wytłumacz, na czym polega zjawisko dudnienia.

Problem 6. Co to są drgania własne?

Problem 7. Pokaż, że tor punktu o współrzędnych $x(t) = A\sin(\omega t)$, $y(t) = A\cos(2\omega t)$, to parabola.

Problem 8. Wyznacz współczynnik sprężystości układu złożonego z dwóch sprężyn o współczynnikach sprężystości k_1 i k_2, jeśli sprężyny połączono a) szeregowo, b) równolegle.

Problem 9. Precyzja pomiaru przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego jest ograniczona z uwagi na trudność w pomiarze długości wahadła. Potrzeba takiego pomiaru jest wyeliminowana w tzw. metodzie Bessla, w której mierzy się okres drgań tego samego wahadła, ale

o dwóch różnych jego długościach, przy czym wyznaczana jest jedynie różnica długości obu wahadeł, którą można zmierzyć z lepszą dokładnością niż długość każdego z wahadeł. Znając okres T_1 oraz T_2 drgań wahadła o różnych długościach, jak również różnicę ΔL ich długości, wyznacz przyspieszenie ziemskie, zakładając przybliżenie małych wychyleń z położenia równowagi.
Problem 10. Wróćmy do zjawiska dudnienia w ruchu wahadeł. Oblicz energię kinetyczną każdego z wahadeł i uśrednij ją po czasie jednego okresu szybkich drgań zakładając, że w tym przedziale czasu amplituda modulująca (ukazująca dudnienia) jest stała. Naszkicuj wykres zależności energii każdego z wahadeł od czasu. Ile wynosi suma energii obu wahadeł?
Problem 11. Rozważ układ sprzężonych wahadeł jak w ćwiczeniu, ale o różnych masach, różnych odległościach środka ciężkości od punktu podparcia, a tym samym i momentach bezwładności. Dla uproszczenia przyjmij, że odległość punktu zaczepienia sprężyn od punku podparcia wahadeł jest taka sama. Napisz równania ruchu oraz wyznacz częstości własne.
Wskazówka: Przy drganiach własnych każdy element układu drga z tą samą częstością, dlatego rozważ rozwiązania układu równań w postaci $\varphi_1(t) = A\exp(\omega t)$, $\varphi_2(t) = B\exp(\omega t)$.

VIII. Pytania i zadania przybliżające, uzupełniające lub poszerzające treść ćwiczenia

Problem 12. Jednorodny, sprężysty pręt o długości L, masie m i module Younga E obraca się w poziomej płaszczyźnie ze stała prędkością kątową ω wokół jednego z końców. Znajdź wydłużenie pręta.
Problem 13. O ile zmieni się objętość jednorodnego, sprężystego pręta o długości L pod wpływem siły F rozciągającej pręt wzdłuż jego osi? Przyjmij, że przy wydłużeniu pręta następuje zmniejszenie jego średnicy, przy czym względna zmiana $\Delta D/D$ średnicy D pręta jest proporcjonalna do względnej zmiany $\Delta L/L$ jego długości L: $\Delta D/D = \nu\Delta L/L$. Współczynnik proporcjonalności ν to tzw. współczynnik Poissona.
Problem 14. Wyobraźmy sobie, że odcinek jednorodnego drutu w kształcie walca o długości L, polu powierzchni poprzecznej S, masie m, wykonany z materiału o module Younga E, zawiesiliśmy w ziemskim polu ciężkości. Wyznacz całkowitą długość drutu. Przyjmij, że materiał, z którego wykonany jest drut, stosuje się do prawa Hooke'a. Wyznacz długość i objętość drutu oraz gęstość liniową jego masy, zakładając, że obok wydłużenia drutu następuje zmniejszenie jego średnicy, przy czym względna zmiana $\Delta D/D$ średnicy D drutu jest proporcjonalna do względnej zmiany $\Delta L/L$ jego długości L: $\Delta D/D = \nu\Delta L/L$. Współczynnik proporcjonalności ν to tzw. współczynnik Poissona.
Problem 15. Na każdym z dwóch prostych, równoległych i odległych o D prętów nanizany jest koralik o masie m, który może poruszać się wzdłuż pręta bez tarcia. Koraliki połączone są sprężyną o długości swobodnej L i stałej sprężystości k. Wyznacz ich ruch w przybliżeniu małych drgań. Rozważ przypadki $L = D$, $L > D$, a także $L < D$.
Problem 16. Dwa jednakowe ładunki, każdy o wartości q i masie m, mogą poruszać się bez tarcia po okręgu o promieniu R. Wyznacz ich ruch w przybliżeniu małych drgań.
Problem 17. Interesujący przykład układu o dwóch stopniach swobody znajdujemy w układzie dwóch cząstek elementarnych zwanych mezonami K^0 i $\bar{K}^0$. Są to cząstki nietrwałe i ich ewolucja czasowa rządzona jest zespolonym równaniem pierwszego rzędu (równaniem Schrödingera)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D & -iEe^{-i\varphi} \\ -iEe^{i\varphi} & D \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},$$

w którym funkcje ψ_1 i ψ_2, w ogólności zespolone, opisują odpowiednio mezon K^0 i $\bar{K}^0$, natomiast D, E oraz φ to zadane liczby, w ogólności zespolone. Interpretacja tych funkcji odwołuje się do ich kwadratu modułu: $|\psi_1|^2$ oraz $|\psi_2|^2$, które mają sens prawdopodobieństwa obserwacji, odpowiednio cząstki K^0 oraz $\bar{K}^0$. Wyznacz rozwiązanie spełniające warunek początkowy $\psi_1(t = 0) = 1$ oraz $\psi_2(t = 0) = 0$ i unormowane do jedności, czyli spełniające warunek: $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1$. Naszkicuj zależność kwadratu modułu funkcji ψ_1 oraz ψ_2 od czasu.

DODATEK – Szczegółowy opis ruchu wahadeł sprzężonych

W ćwiczeniu rozważamy jednakowe wahadła, tzn. mają one ten sam moment bezwładności $I_1 = I_2 = I$, tę samą masę m i tę samą odległość r środka ciężkości od osi obrotu. Wahadła połączone są sprężyną, której punkty zaczepienia leżą w odległości a od osi obrotu, tej samej dla obu wahadeł. Przyjmujemy też, że sprężyna podlega prawu Hooke'a o współczynniku sprężystości k, a w położeniu równowagi nie jest napięta. Ruch każdego z wahadeł jest płaskim ruchem obrotowym wokół ustalonej osi, a równania ruchu mają postać:

$$I_i \frac{d^2\varphi_i}{dt^2} = \sum_j D_{i,j}, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

gdzie φ_i jest kątem wychylenia i-tego wahadła z położenia równowagi, I_i jest jego momentem bezwładności względem osi obrotu, natomiast $D_{i,j}$ momentem j-tej siły działającej na i-te wahadło względem osi obrotu wahadła. Przejdziemy teraz do wyznaczenia jawnej postaci momentów sił.

Na każde z wahadeł działają dwie siły:

- siła ciężkości $P = mg$ przyłożona w odległości r od osi obrotu, o momencie $D = mgr\sin\varphi$;
- siła sprężystości $F = -k\delta$ przyłożona w odległości a od osi obrotu, gdzie δ jest wydłużeniem sprężyny. Wyznaczymy wartość tej siły.

Rysunek 4 ukazuje oba wahadła: jedno odchylone o kąt φ_1, a drugie o kąt φ_2. Współrzędne punktu zaczepienia sprężyny do wahadła pierwszego (lewego) wynoszą:

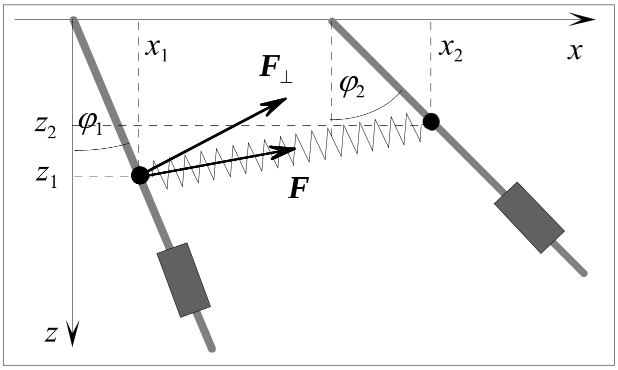
$$x_1 = a\sin\varphi_1,$$

$$z_1 = a\cos\varphi_1,$$

natomiast współrzędne zaczepienia sprężyny do wahadła drugiego (prawego), to:

$$x_2 = L + a\sin\varphi_2$$

$$z_2 = a\cos\varphi_2.$$



Rys. 4. Siła sprężysta i jej moment

gdzie L jest długością swobodną sprężyny. Z obu par współrzędnych wyznaczamy odległość między punktami zaczepienia:

$$\sqrt{(\Delta z)^2 + (\Delta x)^2} = \sqrt{\left(L + a(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)\right)^2 + a^2(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)^2}.$$

Ograniczymy się do małych wychyleń tak, aby spełnione były relacje:

$$\cos\varphi_1 \approx 1 \approx \cos\varphi_2, \quad \sin\varphi_1 \approx \varphi_1, \quad \sin\varphi_2 \approx \varphi_2,$$

a wtedy wydłużenie sprężyny wynosi:

$$\delta = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2} - L \approx a(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Jeśli, jak na Rysunku 4, przyjmiemy, że $\varphi_2 > \varphi_1$, to $\delta > 0$ i siła działająca na lewe wahadło wynosi $ka(\varphi_2 - \varphi_1)$ i wychyla je w prawo z położenia równowagi. Na drugie wahadło działa siła przeciwnie skierowana o tej samej wartości.

Pozostaje nam wyznaczenie momentu siły sprężystej. Rysunek 4 ukazuje siłę sprężystą $\boldsymbol{F}$ skierowana wzdłuż sprężyny oraz jej rzut $\boldsymbol{F}_\perp = \boldsymbol{F}\cos\alpha$ na kierunek prostopadły do wahadła, gdzie kąt α jest kątem miedzy siłą $\boldsymbol{F}$ a jej rzutem. Wyznaczymy teraz ten kąt. Wektor $\boldsymbol{A} = (A_x, A_z)$ łączący punkty zaczepienia sprężyn i skierowany od wahadła 1 do wahadła 2 ma składowe:

$$A_x = L + a\sin\varphi_2 - a\sin\varphi_1 = L + a(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1),$$

$$A_z = a\cos\varphi_2 - a\cos\varphi_1 = a(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1),$$

a skoro wektor prostopadły do dowolnego wektora (a_x, a_z) zadany jest przez $\pm(a_z, -a_x)$, więc wektor $\boldsymbol{B} = (B_x, B_z)$ prostopadły do osi wahadła lewego wynosi (wybieramy znak „+"; znak „–" wyznacza wektor skierowany przeciwnie):

$$B_x = \cos\varphi_1, \quad B_z = -\sin\varphi_1.$$

Kąt α wyznaczamy za pomocą iloczynu skalarnego:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{AB} = \frac{\left(L + a\left(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\right)\right)\cos\varphi_1 - a\left(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\right)\sin\varphi_1}{\sqrt{\left(L + a\left(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\right)\right)^2 + a^2\left(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\right)^2}}.$$

Ponieważ interesują nas małe kąty φ_1 oraz φ_2, więc rozwijamy ten wynik wokół punktu $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ i otrzymujemy, że najniższy (zerowy) wyraz rozwinięcia daje $\cos\alpha = 1$. W rezultacie, interesująca nas składowa momentu siły działającej na wahadło 1 wynosi $ka^2(\varphi_2 - \varphi_1)$. Identyczny wynik, lecz z przeciwnym znakiem, znajdujemy dla momentu siły działającej na wahadło 2.

Teraz już możemy wypisać postać równań ruchu wahadeł:

$$\begin{cases} I\dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -mgr\varphi_1 + ka^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right), \\ I\dfrac{d^2\varphi_2}{dt^2} = -mgr\varphi_2 - ka^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right). \end{cases} \tag{2}$$

Równania te łatwo rozprzęgniemy, gdyż dodając je stronami, otrzymujemy:

$$I\frac{d^2\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)}{dt^2} = -mgr\left(\varphi_1 + \varphi_2\right),$$

a odejmując stronami, znajdujemy:

$$I\frac{d^2\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}{dt^2} = -mgr\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - 2ka^2\left(\varphi_1 - \varphi_2\right),$$

wprowadzają zaś nowe zmienne:

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2,$$

otrzymamy dwa oddzielne równania oscylatorów harmonicznych:

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\omega_1^2\psi_1, \quad \omega_1^2 = \frac{mgr}{I}, \tag{3}$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -\omega_2^2\psi_2, \quad \omega_2^2 = \frac{mgr + 2ka^2}{I}. \tag{4}$$

Widzimy, że ruch wahadeł w pełni opisany jest przez dwie nowe współrzędne: $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ i dwie częstości ω_1 i ω_2. Współrzędne $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ nazywamy **współrzędnymi normalnymi**, drgania opisane tymi współrzędnymi nazywamy **drganiami własnymi** układu lub **modami** układu, a częstości ω_1 i ω_2 **częstościami własnymi** układu. Częstości te wyznaczają **okresy własne** drgań:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}.$$

Zauważmy, że częstość ω_1 jest częstością pojedynczego, nie sprzężonego wahadła oraz $T_1 > T_2$.

Pojęcie drgań własnych układu rozszerzamy na układ n ciał. W tym celu rozważmy odpowiednik układu równań (1) dla n ciał. Prawe strony tych równań zależą od współrzędnych φ_i, przy czym rozważamy tu przypadek, w którym zależność ta jest liniowa (gdy nie jest to prawda, to po zlinearyzowaniu otrzymujemy przybliżony opis w postaci tzw. *małych drgań*). Jeśli zdołamy znaleźć takie przekształcenie liniowe zmiennych φ_i w nowy zestaw takich n zmiennych ψ_i, że dla każdej z tych nowych zmiennych jej równanie ruchu przyjmuje postać równania pojedynczego oscylatora harmonicznego, to mówimy, że znaleźliśmy **drgania własne** układu, czyli jego **współrzędne normalne** i **częstości własne**.

Rozwiązania równań ruchu

Ogólne rozwiązania równań (3) i (4):

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \psi_{10}\cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{\psi}_{10}}{\omega_1}\sin(\omega_1 t), \\ \psi_2(t) &= \psi_{20}\cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{\psi}_{20}}{\omega_2}\sin(\omega_2 t), \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie ψ_{i0} to wartości „wychyleń” ψ_i w chwili $t = 0$, natomiast $\dot{\psi}_{i0}$ to „prędkości” drgań ψ_i w chwili $t = 0$, wiodą nas do ogólnych rozwiązań układu równań (2):

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \frac{1}{2}\left(\psi_1(t)+\psi_2(t)\right) = \frac{1}{2}\left(\psi_{10}\cos(\omega_1 t)+\frac{\dot{\psi}_{10}}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)+\psi_{20}\cos(\omega_2 t)+\frac{\dot{\psi}_{20}}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)\right),\\
\varphi_2(t) &= \frac{1}{2}\left(\psi_1(t)-\psi_2(t)\right) = \frac{1}{2}\left(\psi_{10}\cos(\omega_1 t)+\frac{\dot{\psi}_{10}}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)-\psi_{20}\cos(\omega_2 t)-\frac{\dot{\psi}_{20}}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Mamy tu, zgodnie z regułą, cztery stałe dowolne: dwa położenia początkowe:

$$\begin{cases}
\varphi_1(t=0)=\varphi_{10}=\dfrac{1}{2}\left(\psi_{10}+\psi_{20}\right),\\
\varphi_2(t=0)=\varphi_{20}=\dfrac{1}{2}\left(\psi_{10}-\psi_{20}\right),
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\psi_{10}=\varphi_{10}+\varphi_{20},\\
\psi_{20}=\varphi_{10}-\varphi_{20},
\end{cases}$$

i dwie prędkości początkowe:

$$\begin{cases}
\left.\dfrac{d\varphi_1(t)}{dt}\right|_{t=0}=\dot{\varphi}_{10}=\dfrac{1}{2}\left(\dot{\psi}_{10}+\dot{\psi}_{20}\right)\\
\left.\dfrac{d\varphi_2(t)}{dt}\right|_{t=0}=\dot{\varphi}_{20}=\dfrac{1}{2}\left(\dot{\psi}_{10}-\dot{\psi}_{20}\right)
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\dot{\psi}_{10}=\dot{\varphi}_{10}+\dot{\varphi}_{20},\\
\dot{\psi}_{20}=\dot{\varphi}_{10}-\dot{\varphi}_{20}.
\end{cases}$$

Wypiszmy jeszcze rozwiązania dla indywidualnych wahadeł wyrażone przez ich położenia i prędkości początkowe:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \frac{1}{2}\left(\left(\varphi_{10}+\varphi_{20}\right)\cos(\omega_1 t)+\frac{\dot{\varphi}_{10}+\dot{\varphi}_{20}}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)+\left(\varphi_{10}-\varphi_{20}\right)\cos(\omega_2 t)+\frac{\dot{\varphi}_{10}-\dot{\varphi}_{20}}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)\right),\\
\varphi_2(t) &= \frac{1}{2}\left(\left(\varphi_{10}+\varphi_{20}\right)\cos(\omega_1 t)+\frac{\dot{\varphi}_{10}+\dot{\varphi}_{20}}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)-\left(\varphi_{10}-\varphi_{20}\right)\cos(\omega_2 t)-\frac{\dot{\varphi}_{10}-\dot{\varphi}_{20}}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Spośród tych ogólnych rozwiązań wybierzemy pewne trzy szczególne.

a). **Drganie własne – drgania w fazie**. Wybierzmy drgania własne (5) w formie:

$$\psi_1(t)=\psi_{10}\cos(\omega_1 t),\quad \psi_2(t)=0,$$

a wtedy:

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{2}\psi_{10}\cos(\omega_1 t),\quad \varphi_2(t)=\frac{1}{2}\psi_{10}\cos(\omega_1 t)$$

Ruch taki uzyskujemy wychylając o ten sam kąt oba wahadła w tę samą stronę i zwalniając je jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowej. Uzyskujemy zsynchronizowany, zgodny w fazie ruch obu wahadeł z częstością ω_1, tak jakby nie były połączone sprężyną i drgały jedynie pod wpływem siły ciężkości.

b). **Drganie własne – drgania w przeciwfazie**. Wybierzmy drgania własne (5) w formie:

$$\psi_1(t)=0,\quad \psi_2(t)=\psi_{20}\cos(\omega_2 t),$$

a wtedy:

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{2}\psi_{20}\cos(\omega_2 t),\quad \varphi_2(t)=-\frac{1}{2}\psi_{20}\cos(\omega_2 t).$$

Ruch taki uzyskujemy wychylając o ten sam kąt oba wahadła w przeciwną stronę i zwalniając je jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowej. W tym ruchu wahadła synchronicznie zbliżają się i oddalają od siebie.

c). **Dudnienia**. Dobierzmy teraz takie uruchomienie obu wahadeł, kiedy to jedno wahadło, np. pierwsze, jest wychylone o pewien kąt, a drugie utrzymujemy w położeniu równowagi i oba zwalniamy jednocześnie, bez nadawania im prędkości początkowych. Wtedy rozwiązanie (6) przyjmie postać:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \frac{1}{2}\varphi_{10}\left(\cos(\omega_1 t)+\cos(\omega_2 t)\right)=\varphi_{10}\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right),\\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{2}\varphi_{10}\left(\cos(\omega_1 t)-\cos(\omega_2 t)\right)=\varphi_{10}\sin\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right).\end{aligned} \tag{8}$$

Zdefiniujmy nowe częstości:

$$\Omega_s=\frac{\omega_2+\omega_1}{2},\quad \Omega_d=\frac{\omega_2-\omega_1}{2},\quad \Omega_s\Omega_d=\frac{1}{4}\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)=\frac{ka^2}{2I},$$

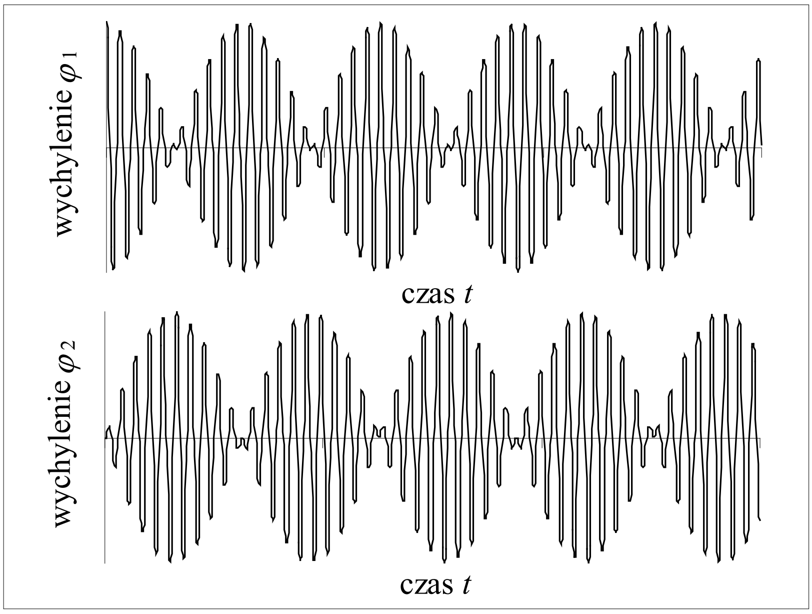
i związane z nimi okresy drgań:

$$T_s=\frac{2\pi}{\Omega_s}=\frac{2T_1T_2}{T_1+T_2},\quad T_d=\frac{2\pi}{\Omega_d}=\frac{2T_1T_2}{T_1-T_2}.$$

Ponieważ $\Omega_s > \Omega_d$, więc $T_s < T_d$, a to czyni, że rozwiązania (8) możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned}\varphi_1(t)&=A_1(t)\cos(\Omega_s t),\quad A_1(t)=\varphi_{10}\cos(\Omega_d t),\\ \varphi_2(t)&=A_2(t)\sin(\Omega_s t),\quad A_2(t)=\varphi_{10}\sin(\Omega_d t).\end{aligned}$$

Wychylenia φ_1 oraz φ_2 zapisane w takiej formie przedstawiają ruch z częstością Ω_s i amplitudą $A_i(t)$. Interpretacja taka staje się tym bardziej wyraźna, im wielkości A_i są wolniej zmienne w czasie, a więc im bardziej częstość Ω_s jest większa od częstości Ω_d. Ilustrację amplitudy takich drgań przedstawia Rysunek 5, ukazujący wychylenia φ_1 i φ_2, gdy częstość Ω_s jest 20 razy większa od częstości Ω_d. Zjawisko periodycznej zmiany amplitudy nazywamy dudnieniem, w tym wypadku dudnieniem z częstością Ω_d. W czasie ruchu energia przekazywana jest między wahadłami: gdy jedno z nich spoczywa, wówczas drugie wykonuje drgania z maksymalną amplitudą, następnie oba drgają z pośrednimi amplitudami, a potem drugie zatrzymuje się w położeniu równowagi, podczas gdy pierwsze drga z maksymalną amplitudą.



Rys. 5. Ilustracja zjawiska dudnień

Powyżej, dudnienia uzyskaliśmy składając dwa *cosinusoidalne*, zgodne w fazie drgania wzdłuż tego samego kierunku i o tej samej amplitudzie. Podobne wyrażenie otrzymamy składając dwa drgania *sinusoidalne*.

d) Obok tych trzech, na zakończenie rozważmy jeszcze ruch jednego z wahadeł, np. pierwszego, gdy drugie jest unieruchomione, za pomocą statywu, w pozycji pionowej. Wtedy drganie $\varphi_2(t)$ jest tożsamościowo równe zeru, a pierwsze z równań ruchu (2) przyjmuje postać

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}=-\omega_0^2\varphi_1,\quad \omega_0^2=\frac{mgr+ka^2}{I}$$

właściwą dla równania oscylatora harmonicznego drgającego z okresem

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Opracował: NN.
Uzupełnił: Roman J. Nowak, Andrzej Witowski, 2916 stycznia 2017.