PODSTAWY ANALIZY DANYCH POMIAROWYCH CZ. 1

Niepewności pomiarowe

Niepewność wyniku pomiaru odzwierciedla brak dokładnej wiedzy na temat wartości wielkości mierzonej. Wynik pomiaru jest jedynie oszacowaniem (estymatą) wartości wielkości mierzonej z powodu niepewności wynikającej z efektów losowych i niedoskonałej korekty wyniku dla efektów systematycznych. Dlatego też podając wynik pomiaru wielkości fizycznej, należy koniecznie podać także pewną ilościową informację o jakości tego wyniku, tak aby korzystający z tego wyniku mógł ocenić jego wiarygodność. Bez takiej informacji wyniki pomiarów nie mogą być porównywane ani między sobą, ani z wartościami odniesienia. Jako estymator niepewności pomiarowej najczęściej przyjmuje się odchylenie standardowe wyników pomiarów. Niepewność względna pomiaru jest niepewnością pomiaru podzieloną przez wartość bezwzględną wartości mierzonej, gdy wartość mierzona nie jest równa zero.

Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe rozkładu prawdopodobieństwa

W przypadku zmiennej losowej dyskretnej przyjmującej N wartości x_i, każdej otrzymanej z prawdopodobieństwem p_i, wartość oczekiwana rozkładu wyrażona jest

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i, \tag{1}$$

zaś za miarę rozrzutu uzyskanych wartości przyjmujemy odchylenie standardowe (σ). Wariancja (kwadrat odchylenia kwadratowego), zdefiniowana jest poprzez zależność:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} p_i (x_i - \mu)^2. \tag{2}$$

W przypadku zmiennej losowej ciągłej wartość oczekiwana rozkładu wyrażona jest

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx, \tag{3}$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa, a wariancja wyrażona jest poprzez zależność:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx. \tag{4}$$

Niepewności statystyczne pomiarów

Ponieważ pomiar niesie informację tylko o części obserwacji z populacji (N pomiarów) za **ocenę prawdziwej** wartości wielkości fizycznej, którą mierzymy, najczęściej przyjmuje się **średnią arytmetyczną**:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{5}$$

Poszczególne obserwacje różnią się co do wartości z powodu przypadkowych zmian wielkości wejściowych lub oddziaływań przypadkowych. **Odchylenie standardowe eksperymentalne** s_x obserwacji, estymujące odchylenie standardowe rozkładu prawdopodobieństwa wielkości x, jest zdefiniowane poprzez zależność:

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2. \tag{6}$$

Inna często spotykana nazwa tej wielkości to **odchylenie standardowe z próby** lub też **statystyczna niepewność standardowa pojedynczego pomiaru**.

Za miarę **niepewności standardowej średniej** przyjmujemy wielkość $s_{\bar{x}}$, zdefiniowaną jako:

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2. \tag{7}$$

Niepewność średniej arytmetycznej zwana jest również **odchyleniem standardowym średniej**.

Korelacje między wielkościami mierzonymi

W przypadku gdy pomiar określa jednocześnie więcej niż jedną wielkość mierzoną, estymaty tych wielkości i ich niepewności są tylko częścią wiedzy, którą musimy posiąść. Wiedzę na temat zależności między mierzonymi wielkościami możemy uzyskać badając tzw. momenty mieszane, czyli kowariancje i korelacje. Estymatorem kowariancji wielkości x i y jest

$$S_{xy} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \tag{8}$$

$S_{xy} > 0$ oznacza, że wraz ze wzrostem wartości jednej z wielkości, wzrastają wartości drugiej, $S_{xy} < 0$ oznacza, że wraz ze wzrostem wartości jednej z wielkości, maleją wartości drugiej. Wartość kowariancji równa zeru świadczy o braku zależności między wielkościami. Ponieważ wartość kowariancji zależy od wartości badanych wielkości, do dyskusji wzajemnych zależności między zmiennymi często wygodniej jest użyć unormowanego i bezwymiarowego współczynnika korelacji zdefiniowanego jako

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{s_x s_y}. \tag{9}$$

Współczynnik korelacji może przyjmować wartości z przedziału $\langle -1,1 \rangle$, przy czym $r_{xy} > 0$ oznacza korelację dodatnią (wraz ze wzrostem wartości jednej z wielkości, wzrastają wartości drugiej), $r_{xy} < 0$ oznacza korelację ujemną (wraz ze wzrostem wartości jednej z wielkości, maleją wartości drugiej), $r_{xy} = 0$ oznacza brak zależności, a $r_{xy} = \pm 1$ oznacza dokładną zależność liniową.

Niepewności pomiarowe przyrządu

W specyfikacji technicznej większości przyrządów pomiarowych zazwyczaj podawana jest **rozszerzona niepewność standardowa** (Δ). Jest to wielkość podawana przez producenta przyrządu, który gwarantuje, że jeśli w wyniku pomiaru otrzymamy wartość x, to prawdziwa (dokładna) wartość wielkości mierzonej, z bardzo dużym prawdopodobieństwem, mieści się w przedziale $[x - \Delta, x + \Delta]$. Inne często spotykane nazwy tej wielkości to **dopuszczalny graniczny błąd wskazania** oraz **dokładność**.

Zakładając, że prawdopodobieństwo, że prawdziwa wartość wielkości mierzonej, mieści się w przedziale $[x - \Delta, x + \Delta]$ wynosi 1, a każda z wartości w tym przedziale jest równie prawdopodobna, związana z tym **niepewność standardowa przyrządu** wyraża się wzorem:

$$\sigma_\Delta = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}. \tag{10}$$

W przypadku dobrej klasy przyrządów pomiarowych w specyfikacji technicznej urządzenia jest bezpośrednio podane odchylenie standardowe pomiaru (np. w przypadku wag używanych na pracowni jest ono podane pod nazwą **powtarzalności**) i to ono powinno być użyte jako wartość niepewności standardowej przyrządu.

Uogólniona niepewność standardowa

Dla pomiarów bezpośrednich, w przypadku występowania wielu niepewności definiuje się uogólnioną niepewność pomiarową jako pierwiastek sumy kwadratów niepewności składowych. W przypadku oceny wartości mierzonej na podstawie N pomiarów przy wykorzystaniu przyrządu o dokładności Δ, **uogólnioną niepewność standardową** (u) wielkości mierzonej bezpośrednio wyznaczamy z zależności

$$u^2 = s_{\bar{x}}^2 + \sigma_\Delta^2 = s_{\bar{x}}^2 + \frac{1}{3}\Delta^2. \tag{11}$$

Złożona niepewność standardowa

Jeśli szukana wielkość nie jest wyznaczona w pomiarze bezpośrednio, tylko za pomocą pomiarów pośrednich, jej niepewność możemy wyznaczyć poprzez obliczenie **złożonej niepewności standardowej**. Przyjmijmy, że wielkość y wyznaczamy pośrednio, korzystając z zależności matematycznej $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, gdzie wielkości x_i są mierzone bezpośrednio. Ocenę wielkości y otrzymujemy podstawiając uzyskane oceny wartości wielkości x_i. **Jeśli wielkość x_i wyznaczamy na podstawie serii pomiarów, to do zależności matematycznej podstawiamy wartość średnią serii.** Niepewność u_y oceny y obliczana jest za pomocą wzoru na przenoszenie niepewności

$$u_y^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u_i\right)^2, \tag{12}$$

gdzie u_i są niepewnościami x_i.

Średnia ważona arytmetyczna

Jeżeli ta sama wielkość została zmierzona N niezależnymi metodami, w wyniku czego otrzymano N wartości x_i wraz z niepewnościami u_i, wówczas najlepszą oceną poszukiwanej wielkości jest **średnia ważona arytmetyczna** $\bar{x}_w$, zaś ocenę niepewności dokonujemy na podstawie niepewności wewnętrznej u_{int} i zewnętrznej u_{ext}, średniej ważonej gdzie:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{u_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{u_i^2}}, \tag{13}$$

$$u_{int}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{u_i^2}}, \tag{14}$$

$$u_{ext}^2 = \frac{u_{int}^2}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i - \bar{x}_w}{u_i} \right)^2. \tag{15}$$

Praktyka nakazuje unikać zaniżania niepewności i w sytuacji gdy niepewności zewnętrzna i wewnętrzna są różne za niepewność średniej należy przyjąć większą z obliczonych wartości. Warto jednak zwrócić uwagę, że jeżeli niepewność zewnętrzna jest znacząco mniejsza od wewnętrznej może to oznaczać, że użyte niepewności cząstkowych wyników są przeszacowane, natomiast jeśli niepewność zewnętrzna jest znacznie większa od wewnętrznej może to sugerować niedoszacowanie tych niepewności.