Wykład 4 – układy logiczne.

Prawa de Morgana:

$$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$$

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$$

Własności operacji logicznych;

$$\left.\begin{aligned} a \vee b &= b \vee a \\ a \wedge b &= b \wedge a \end{aligned}\right\} \text{przemienność}$$

$$\left.\begin{aligned} a \vee (b \vee c) &= (a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c \\ a \wedge (b \wedge c) &= (a \wedge b) \wedge c = a \wedge b \wedge c \end{aligned}\right\} \text{łączność}$$

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge b \vee a \wedge c \quad \text{rozdzielność}$$

$$\overline{(\bar{x})} = x$$

$$x \vee x \wedge y = x \wedge (1 \vee y) = x$$

$$x \vee \bar{x} \wedge y = \left\{\begin{aligned} x = 1 &: 1 \vee 0 \wedge y = 1 \\ x = 0 &: 0 \vee 1 \wedge y = y \end{aligned}\right\} = x \vee y$$

$$(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) = (x \vee \bar{x}) \wedge y = y$$

$$(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y) = \underbrace{x \wedge \bar{x}}_{0} \vee y \wedge \bar{x} \vee x \wedge y \vee y \wedge y =$$

$$= y \wedge (\bar{x} \vee x \vee y) = y \wedge (1 \vee y) = y$$

Zapis funkcji logicznej na podstawie tabelli prawdy.

a	b	y = f(a, b)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Szukamy „1" i robimy alternatywę koniunkcji lub szukamy „0" i robimy koniunkcję alternatyw. (formy kanoniczne).

I. Zapis jako alternatywa koniunkcji:

Są 2 „jedynki”:

dla $a=0,\ b=0$: $\bar{a}\wedge\bar{b}$

dla $a=1,\ b=0$: $a\wedge\bar{b}$

$$f=(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee(a\wedge\bar{b})=\bar{b}$$

II. Zapis jako koniunkcja alternatyw:

Są 2 „zera”:

dla $a=0,\ b=1$: $a\vee\bar{b}$

dla $a=1,\ b=1$: $\bar{a}\vee\bar{b}$

$$f=(a\vee\bar{b})\wedge(\bar{a}\vee\bar{b})=\bar{b}$$

Zapis kanoniczny nie musi być najprostszy i najwygodniejszy do realizacji elektronicznej.

Minimalizacja metodą tablic Karnaugha:

Każdej linii z tabelki prawdy przypisujemy komórkę tablicy Karnaugha. Komórki ustawione tak, żeby ich adresy różniły się zmianą tylko 1 bitu:

ab	00	01	11	10
	1	0	0	1

Sąsiadujące komórki różnią się tylko jedną zmienną, tutaj a. Normalnie zsumowalibyśmy iloczyny dla komórek, dla których są 1-ki:

$$f=\bar{a}\wedge\bar{b}\ \vee\ a\wedge\bar{b}$$

Z konstrukcji tabeli wynika, w tych sumach jeden z argumentów będzie miał raz wartość 0, a raz 1. Wcześniej udowodniliśmy, że $(x\wedge y)\vee(\bar{x}\wedge y)=y$. Czyli tutaj możemy zignorować a i od razu napisać: $f=\bar{b}$

Drugi przykład:

a	b	f
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

ab	00	01	11	10
	0	0	1	1

różnią się b, czyli $f = a$

Dla funkcji 3 zmiennych:

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Tradycyjnie – sumujemy 1-ki

$$f = (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c)$$

Tablica Karnaugha:

c \ ab	00	01	11	10
0				1
1	1	1		1

różnią się c. c pomijamy $a = 1, b = 0$: $a \wedge \bar{b}$

różnią się b, b pomijamy $a = 0, c = 1$: $\bar{a} \wedge c$

$$f = \bar{a} \wedge c \vee a \wedge \bar{b}$$

Inny przykład:

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0

Tu zmieniają się a i c, nie zmienia się b.
Czyli $f = b$

c \ ab	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	1

$f = b \vee (a \wedge c)$

c \ ab	00	01	11	10
0		1	1	
1		1		

$f = b \wedge \bar{c} \vee \bar{a} \wedge b = b \wedge (\bar{a} \vee \bar{c})$