Wykład 1

Podstawy obwodów elektrycznych, elementy bierne

7, 14 marca 2023

Wstęp

1. Prąd stały

1.1 Prawo Kirchhoffa

1.2 Przykłady prostych obwodów

2. Prąd zmienny

2.1 Podstawowe elementy

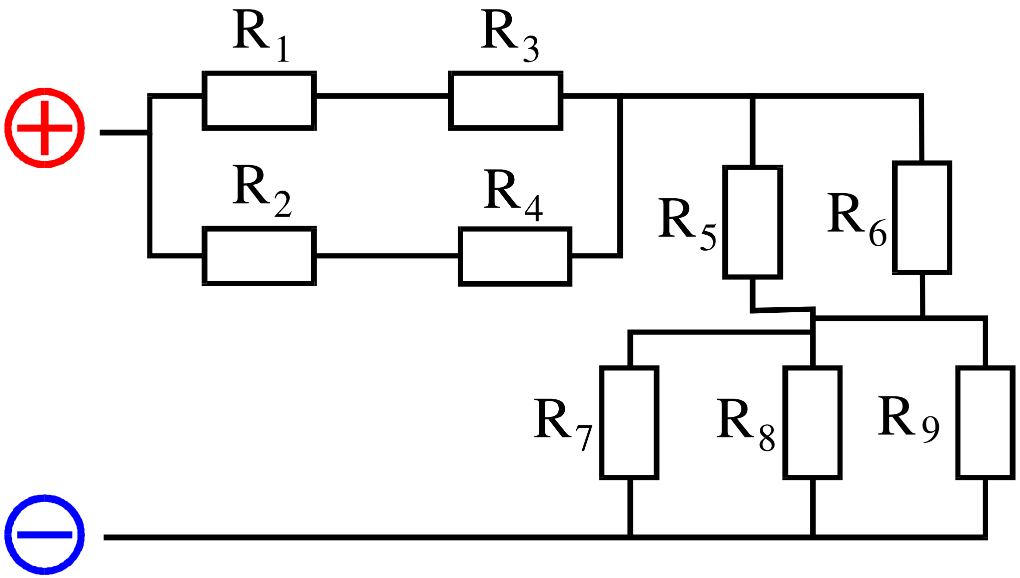
2.2 Obwody RC i RL

2.3 Impedancja

2.4 Filtry

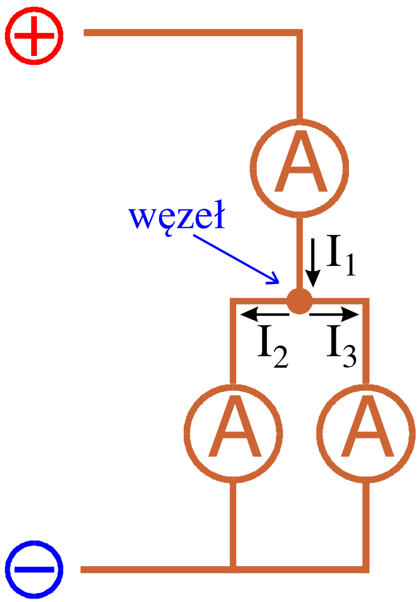
2.5 Obwody rezonansowe

Obwody prądu stałego



Zasada zachowania ładunku a przepływ prądu

Ładunek nie znika, ani nie powstaje, zatem ładunek, który dopłynął do węzła, musi z niego wypłynąć.



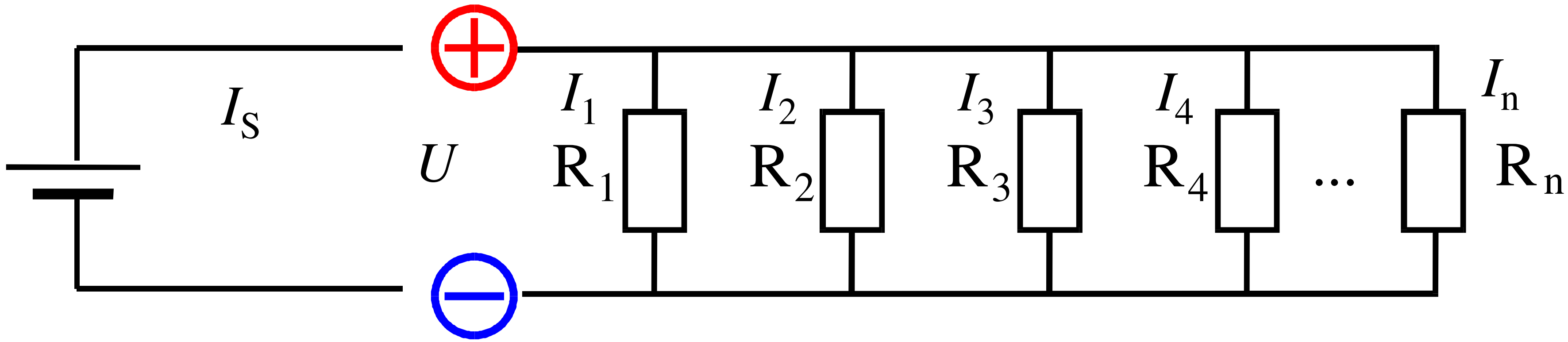
I prawo Kirchhoffa:

Suma natężeń prądów dopływających i odpływających z węzła wynosi zero.

$$\Sigma_j I_j = 0$$

Prądy dopływające traktujemy jako dodatnie, odpływające jako ujemne.

Równoległe łączenie oporników



$$I_S = \sum_{k=1}^{n} I_k$$

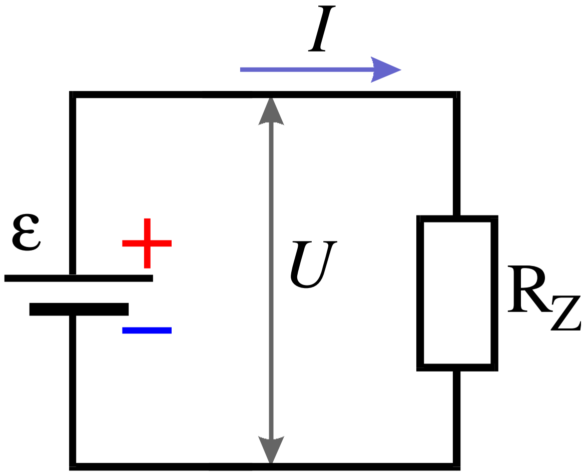
$U = \text{const}$

$$\frac{I_S}{U} = \sum_{k=1}^{n} \frac{I_k}{U}$$

$$\frac{1}{R_S} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$

Przy połączeniu równoległym, sumują się przewodnictwa, 1/R.

Obwód elektryczny z zasilaniem



Zewnętrzne napięcie elektryczne, *U*:
spadek potencjału na części obwodu elektrycznego nie zawierającej źródeł prądu.

Siła elektromotoryczna, *ε*:
energia elektryczna uzyskana przez jednostkowy ładunek na odcinku obwodu zawierającym źródło prądu, a nie zawierającym rezystancji.

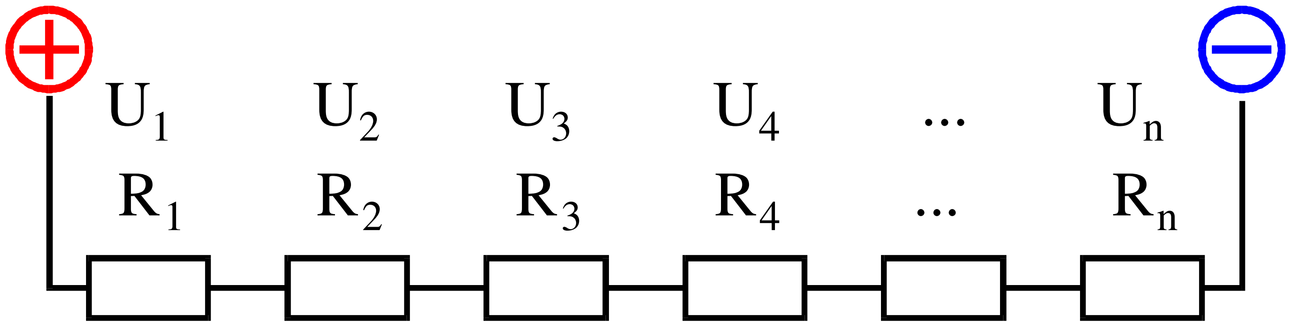
Zasada zachowania energii a rozkład napięć

Energia ładunku w polu zależy od potencjału w danym miejscu, a nie od drogi jaką przebył.

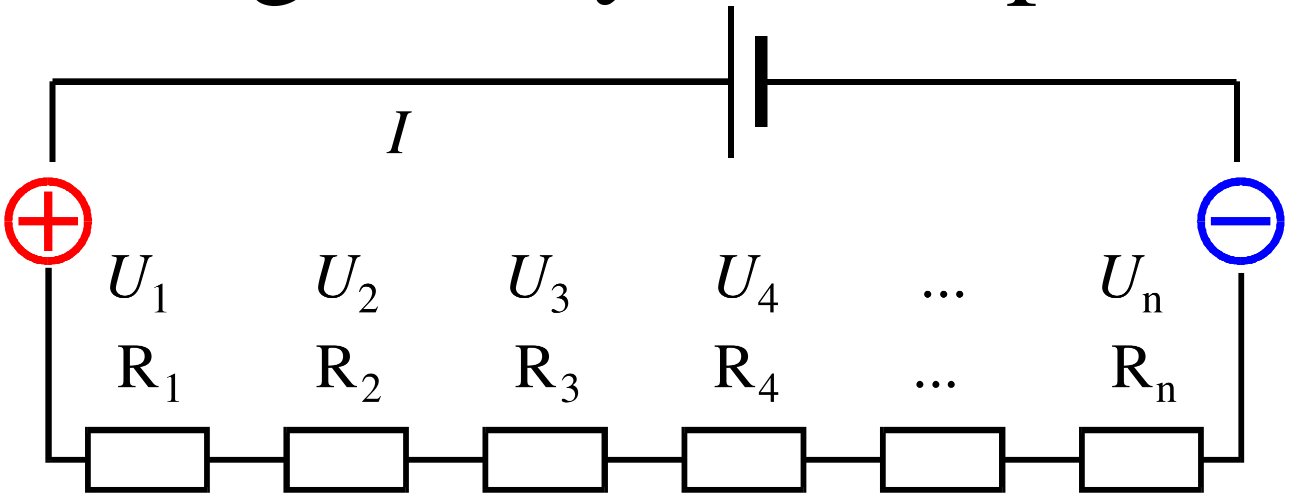
II prawo Kirchhoffa:

Suma napięć na oporach w obwodzie zamkniętym jest równa sumie sił elektromotorycznych.

$$\Sigma_j U_j = \Sigma_k \varepsilon_k$$



Szeregowe łączenie oporników



$$U_S = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

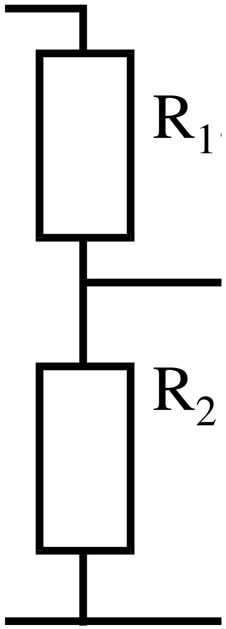
$I = \text{const}$

$$\frac{U_S}{I} = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{I}$$

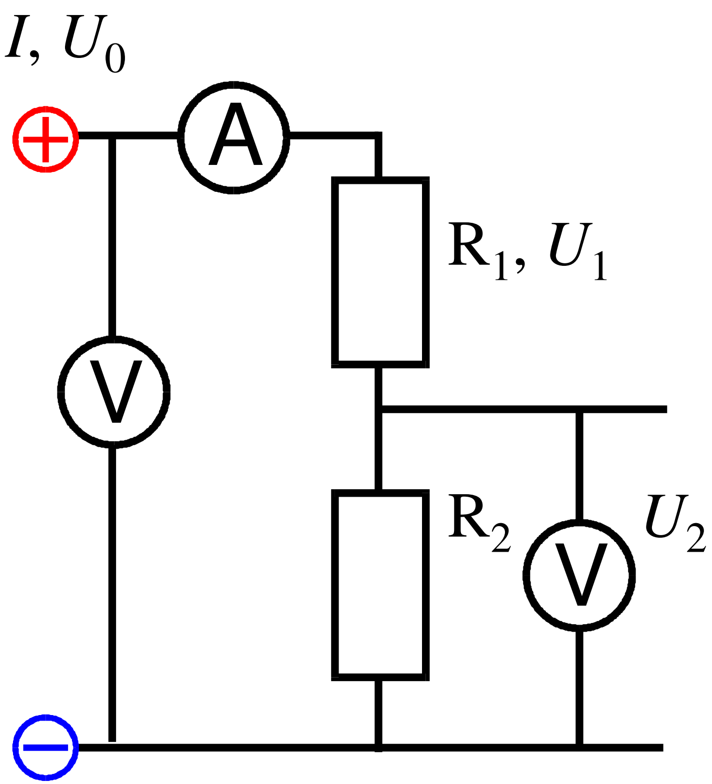
$$R_S = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

Przy połączeniu szeregowym, opory sumują się.

Przykłady obwodów - dzielnik napięcia



Przykłady obwodów - dzielnik napięcia



Całkowity opór obwodu

$$R_S = R_1 + R_2$$

Natężenie prądu płynącego przez obwód:

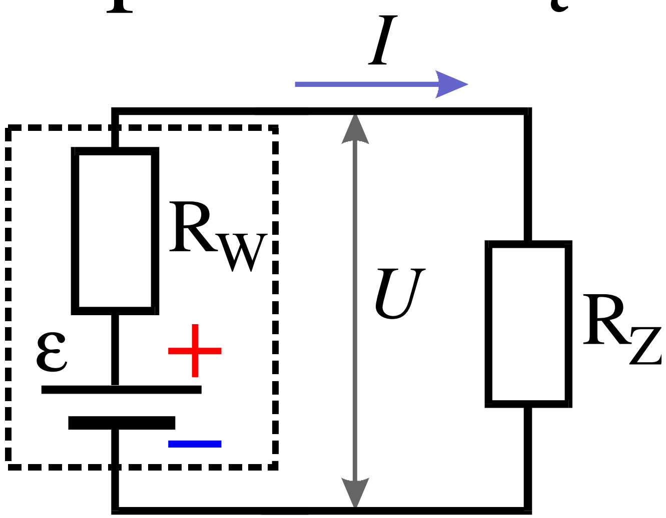
$$I = U_0/(R_1 + R_2)$$

Zakładamy, że do wyjścia nie płynie prąd.
Napięcie na wyjściu wynosi:

$$U_2 = R_2 * I$$

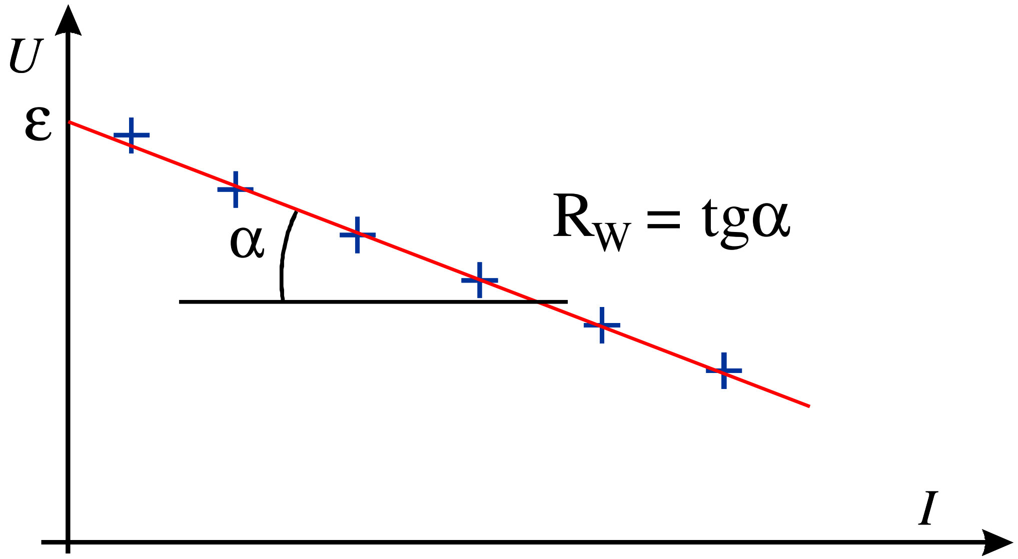
$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0$$

Opór wewnętrzny



Rzeczywiste źródła napięcia musimy przedstawić w postaci obwodu zastępczego złożonego z idealnego źródła o sile elektromotorycznej ε i z oporu wewnętrznego R_W. Napięcie na zewnątrz takiego źródła będzie wynosiło:

$$U = \varepsilon - R_W I$$



Opór właściwy

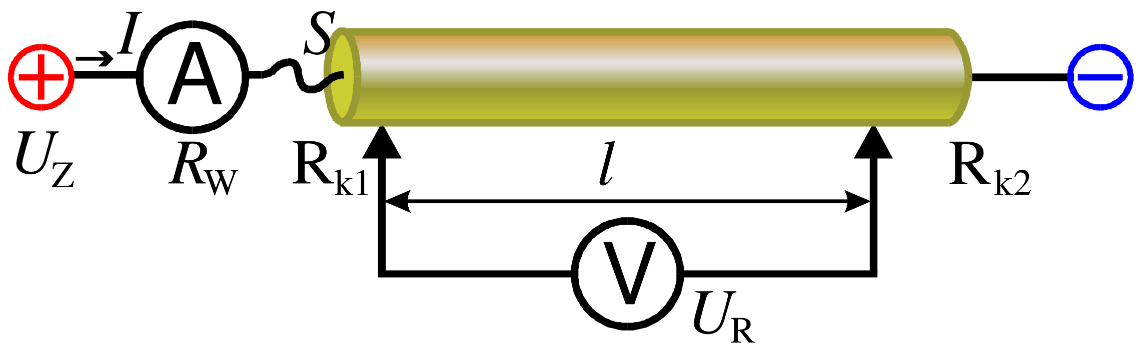
Opór właściwy, ρ, pozwala na obliczenie oporu ciała o długości l i powierzchni przekroju S:

$$\rho = R{*}S/l, \qquad R = \rho{*}l/S.$$

Jednostki: omometr [Ωm], omocentymetr [Ωcm].

Odwrotnością oporu właściwego jest **przewodnictwo właściwe**:

$$\sigma = 1/\rho.$$



Gęstość prądu, j, dla prądu I płynącego przez przewodnik o powierzchni S:

$$j = I/S.$$

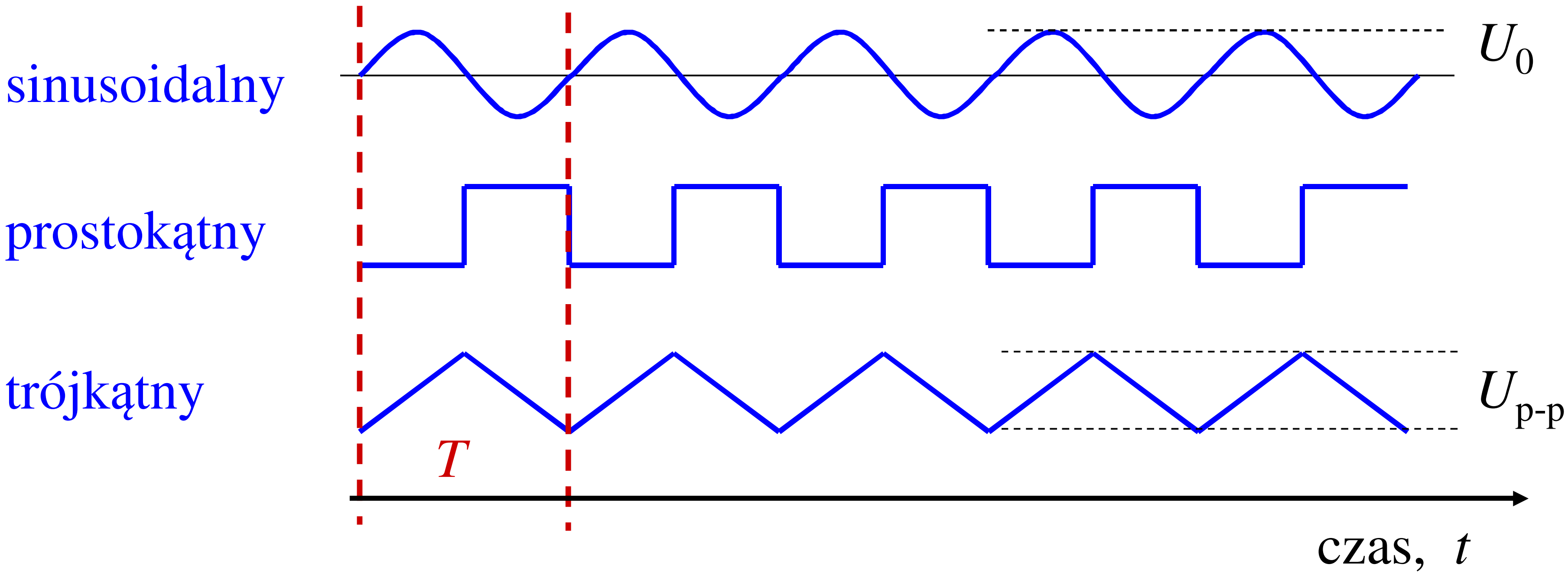
Jednostki: A/m^2, A/cm^2.

Obwody prądu zmiennego

Prąd zmienny jest najważniejsza formą zastosowań elektryczności. Dzięki niemu funkcjonuje większość urządzeń w naszych domach.

Temat jest dość trudny i do pełnego zrozumienia wymaga znajomości trygonometrii, rachunku różniczkowego i liczb zespolonych. Na tym kursie zajmiemy się jedynie najprostszymi przykładami z tej tematyki takimi jak: obwód RC i RLC czy filtry.

Przebiegi zmiennoprądowe



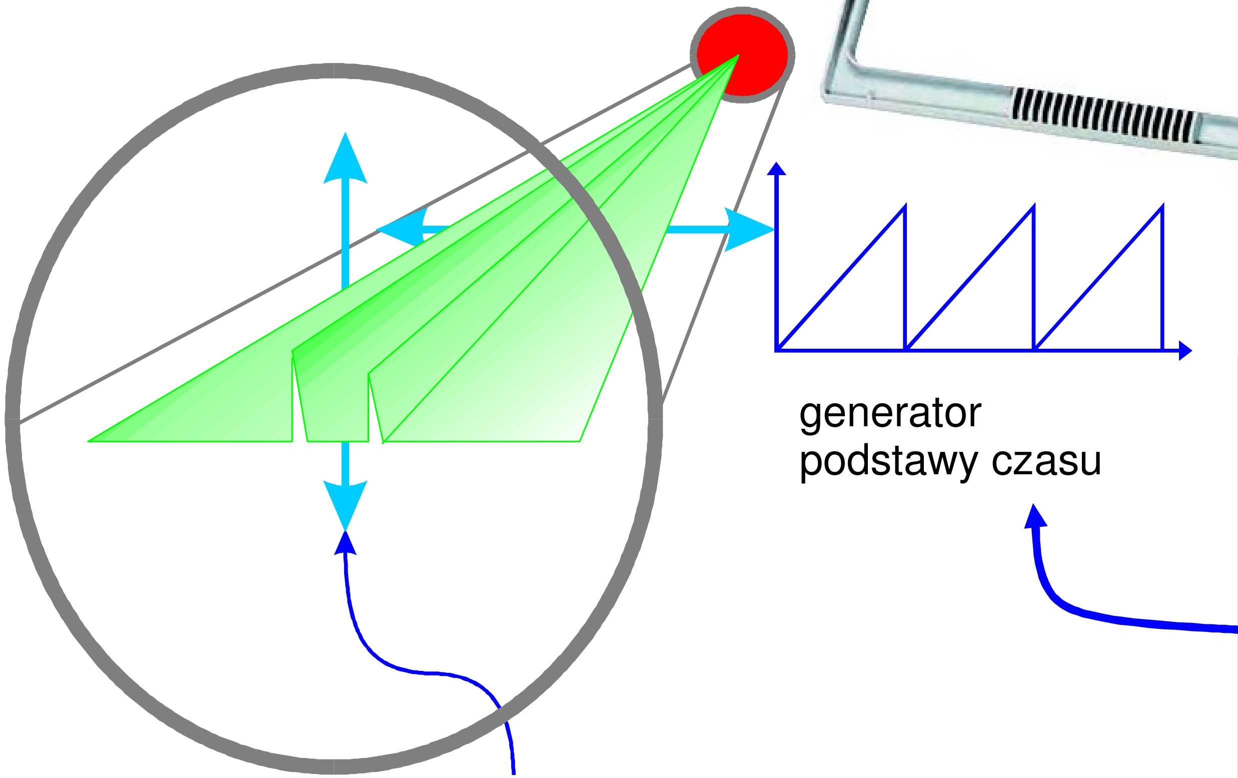
T - okres zmienności

$f = \dfrac{1}{T}$ - częstość

U_0 - amplituda napięcia

$U_{p\text{-}p}$ - napięcie międzyszczytowe "peak to peak",
dla przebiegów symetrycznych $U_{p\text{-}p} = 2 * U_0$

Oscyloskop

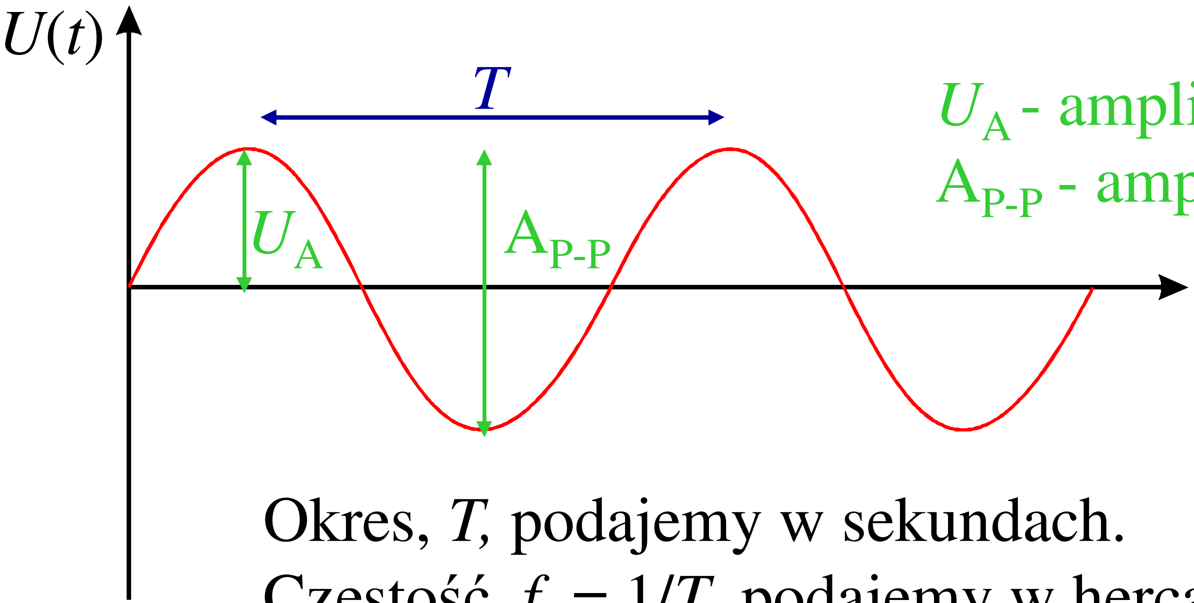


Warunkiem udanego pomiaru jest dobre ustawienie wyzwalania. Podstawa czasu jest wyzwalana, gdy sygnał osiągnie zadany poziom.

Na ekranie oscyloskopu oś pozioma staje się osią czasu.

Prąd przemienny

$$U = U_A \sin(\omega \cdot t)$$



U_A - amplituda,
$A_{P\text{-}P}$ - amplituda peak-to-peak.

Okres, T, podajemy w sekundach.
Częstość, $f = 1/T$, podajemy w hercach, 1 Hz = 1/s.

Częstość (kołową): $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, podajemy w s^{-1} = 1/s.

$$\omega = 2\pi f$$

f = 50 Hz, ω =314 s^{-1} (pulsacja)

Moc prądu

Moc prądu:

$P = I*U$.

Prawo Ohma:

$I = U/\mathrm{R}$.

Możemy otrzymać inne wyrażenia na moc prądu:

$$P = U^2/\mathrm{R} = I^2\mathrm{R}.$$

W przypadku prądu przemiennego:

$$P = U_\mathrm{A}^2\langle\sin^2(\omega t)\rangle_T/\mathrm{R}.$$

$$\langle\sin^2(\omega t)\rangle_T = 1/2$$

$$P = \frac{U_\mathrm{A}^2}{2\cdot\mathrm{R}}$$

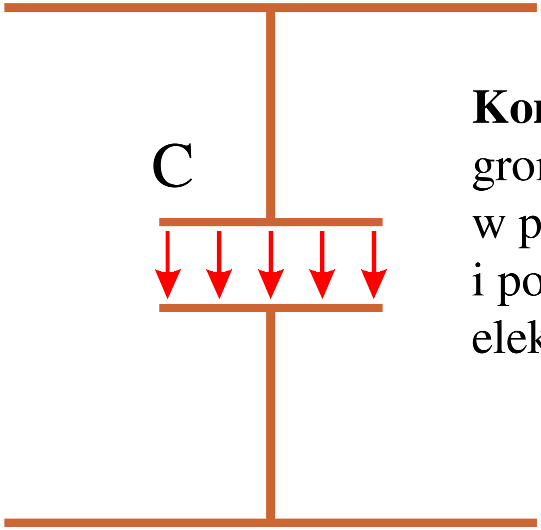
Wprowadzamy napięcie skuteczne, $U_\mathrm{S} = \dfrac{U_\mathrm{A}}{\sqrt{2}}$, takie że $P = \dfrac{U_\mathrm{S}^2}{\mathrm{R}}$.

Mierniki podają wartość skuteczną. $\sqrt{2} = 1{,}414$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$;

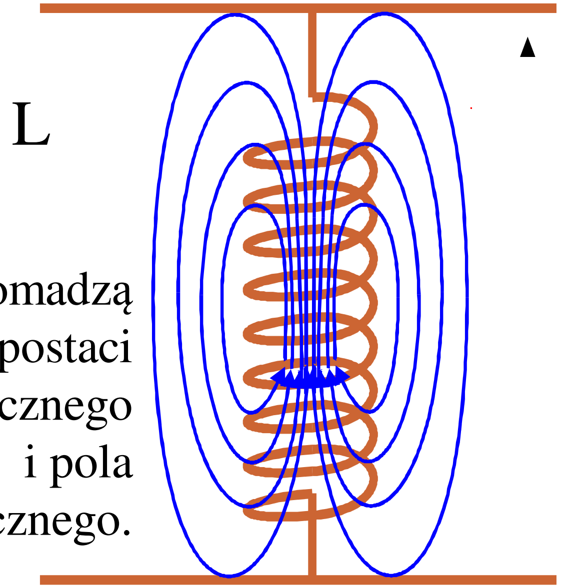
$U_\mathrm{S} = 230$ V, $U_\mathrm{A} = 325$ V

Kondensator i cewka

W obwodach elektrycznych występują dwa rodzaje elementów, które mogą gromadzić energię.



Kondensatory gromadzą energię w postaci ładunku i pola elektrycznego.



Cewki gromadzą energię w postaci prądu elektrycznego i pola magnetycznego.

Indukcja elektromagnetyczna

Na podstawie prawa Ampera, przepływ prądu, *I*, indukuje w cewce pole:

$$B = \alpha I$$

α - współczynnik.

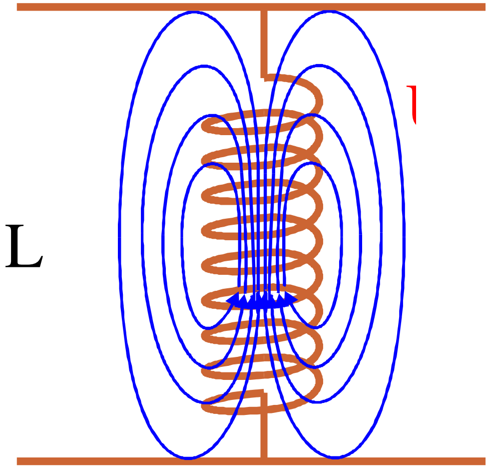
Prawo indukcji Faradaya: $$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

ε - siła elektromotoryczna,

Φ - strumień pola magnetycznego, $\Phi = B * S$.

W przypadku cewki można się spodziewać, że powstanie siła elektromotoryczna wywołana samoindukcją.

Cewka



$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi = B * S$$

$$B = \alpha I$$

Można się spodziewać, że w przypadku cewki powstanie siła elektromotoryczna wywołana samoindukcją:

$$\varepsilon = L\frac{dI}{dt}$$

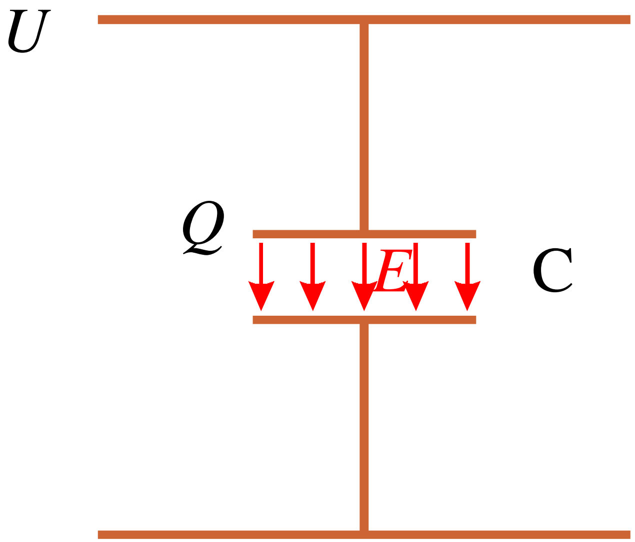
Współczynnik L nazywamy **indukcyjnością cewki**.

Indukcyjność mierzymy w henrach H, 1 H = Vs/A

Energia zgromadzona w cewce, przez którą płynie prąd o natężeniu I:

$$E_L = \frac{LI^2}{2}$$

Pojemność



Pojemność kondensatora to ładunek jaki może zgromadzić przy jednostkowym napięciu.

$$C = \frac{Q}{U}$$

Jednostką pojemności jest farad, [F].
Ładunek na kondensatorze:

$$Q = C * U.$$

Natężenie prądu to ładunek przepływający w jednostkowym czasie:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

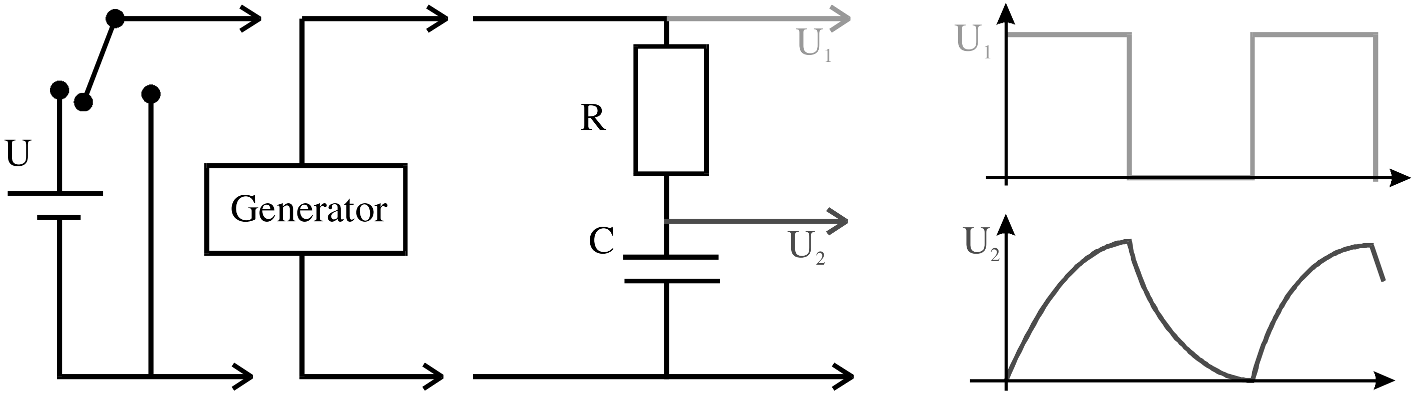
Prąd w obwodzie z kondensatorem będzie równy:

$$I = C\frac{dU}{dt}$$

Napięcie na kondensatorze będzie całką z prądu dopływającego do kondensatora:

$$U(t) = \frac{1}{C}\int I(t)dt$$

Ładowanie kondensatora



$$I = \frac{U_1 - U_2}{R}$$

Prąd jest równy pochodnej z napięcia na kondensatorze:

$$\frac{\mathrm{d}U_2}{\mathrm{d}t} = \frac{I}{C}; \qquad \frac{\mathrm{d}U_2}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{U_1}{RC}}_{\text{stałe}} - \underbrace{\frac{U_2}{RC}}_{\text{zmienne}};$$

Rozładowywanie (U_1= 0):

U(t) = U(0) exp(-t/RC)

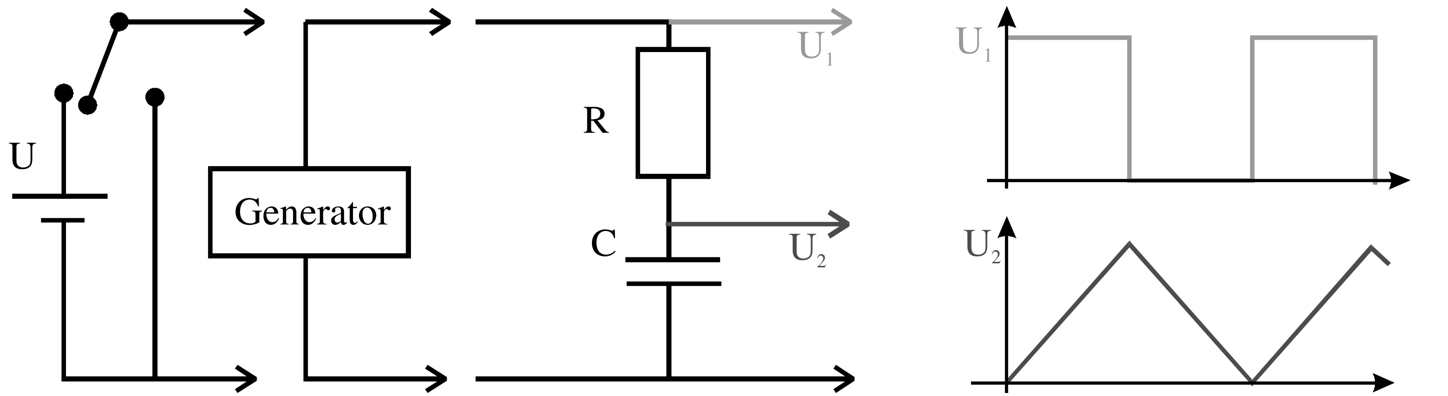
Ładowanie napięciem U_1:

U(t) = U_1(1 - exp(-t/RC))

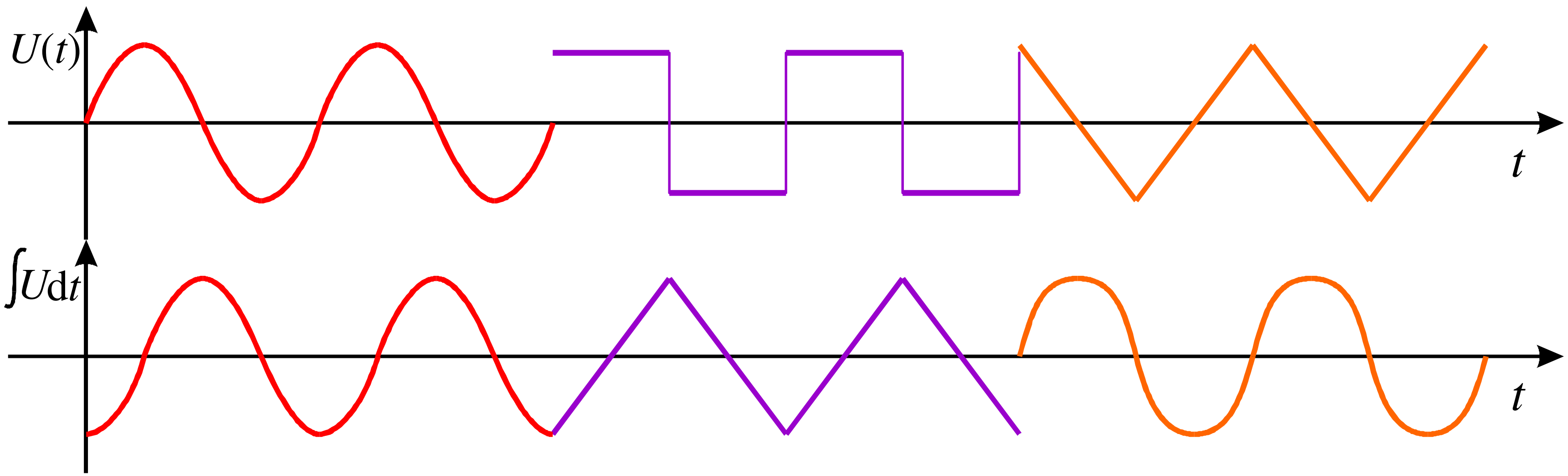
Kondensator całkuje

Napięcie na kondensatorze będzie całka z prądu dopływającego do kondensatora:

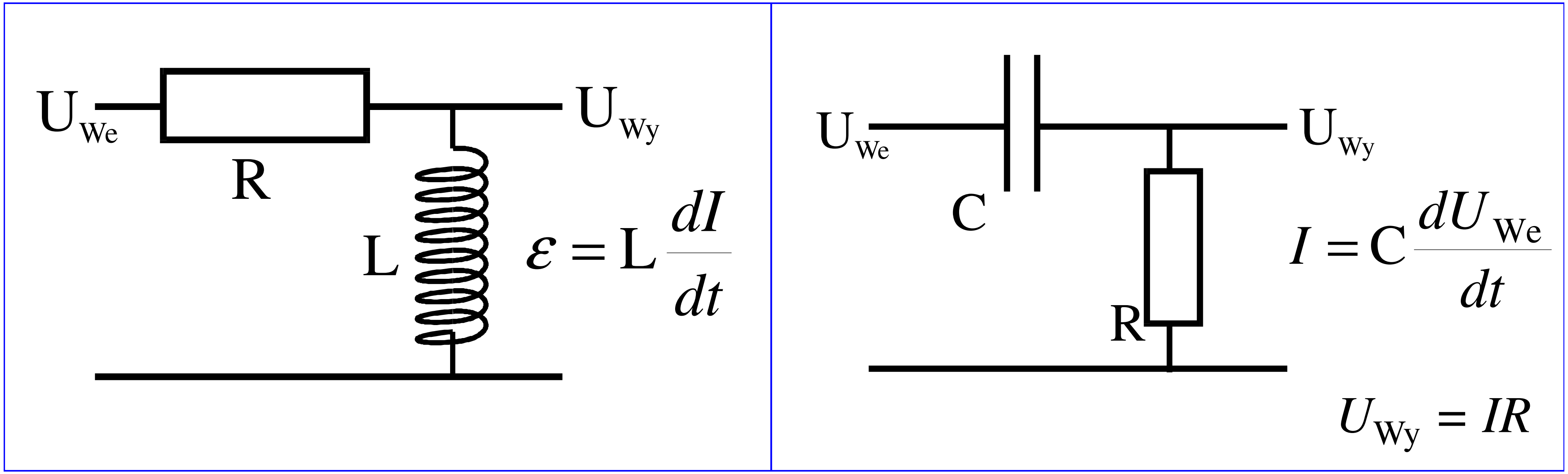
$$U(t) = C^{-1}\int I(t)dt$$

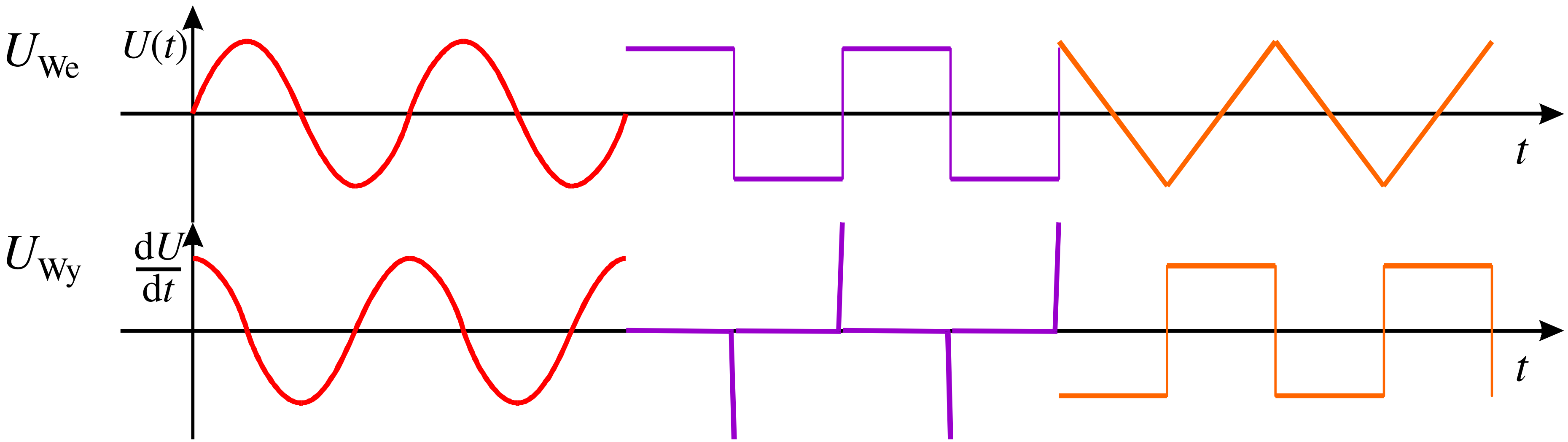


RC >> T

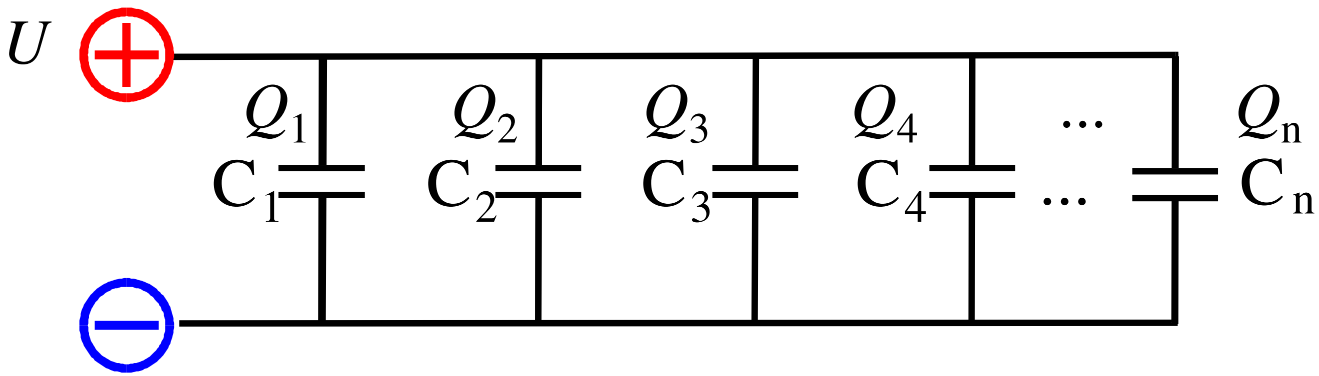


Różniczkowanie przebiegu trójkątnego





Łączenie kondensatorów



$$Q_S = \sum_{k=1}^{n} Q_k$$

$U = \text{const}$

$$\frac{Q_S}{U} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{U}$$

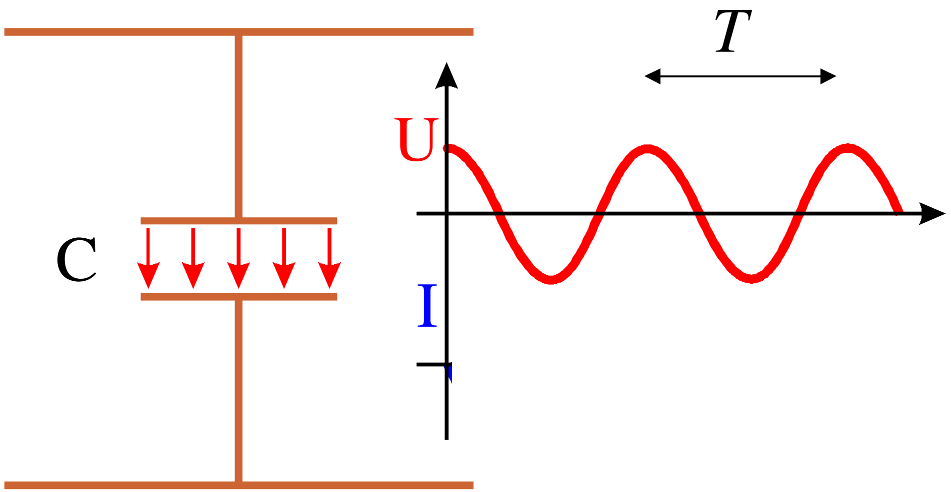
$$C_S = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

Przy połączeniu równoległym, pojemności sumują się.

$$\frac{1}{C_S} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}$$

Przy połączeniu szeregowym, sumują się odwrotności pojemności.

Prąd przemienny i kondensator

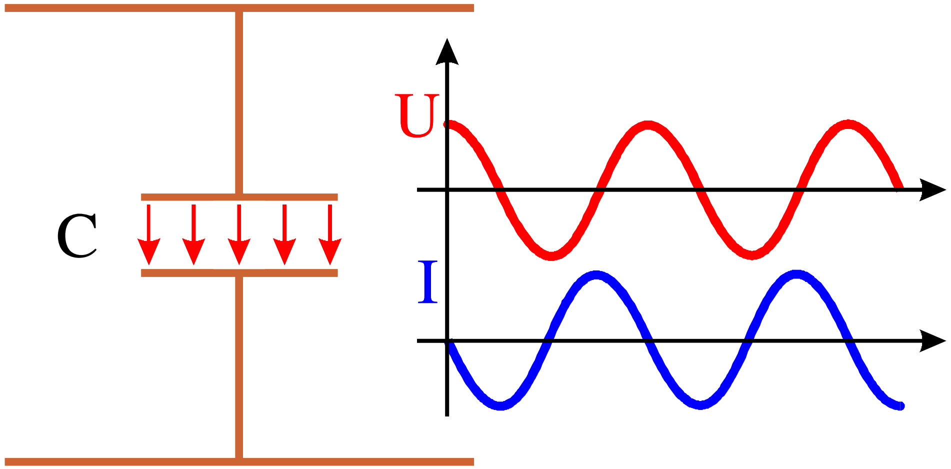


$$U = U_0 \cos(\omega t)$$

$$Q = C * U \quad \Longrightarrow \quad Q = U_0 C \cos(\omega t)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \Longrightarrow \quad I = -U_0 C \omega \sin(\omega t)$$

Prąd przemienny i kondensator



$$U = U_0 \cos(\omega t)$$

$$I = U_0 C \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$Q = C * U \quad \Longrightarrow \quad Q = U_0 C \cos(\omega t)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \Longrightarrow \quad I = -U_0 C \omega \sin(\omega t)$$

$$-\sin(\omega t) = \cos(\omega t + \pi/2) \quad \Longrightarrow \quad I = U_0 C \omega \cos(\omega t + \pi/2)$$

Prąd jest przesunięty w fazie (przyspieszony) o $\frac{\pi}{2}$ (= 90°) względem napięcia.

Liczby zespolone

$i^2 = -1$

$$z = x + iy$$

$$z = x + iy = Ae^{i\alpha}$$

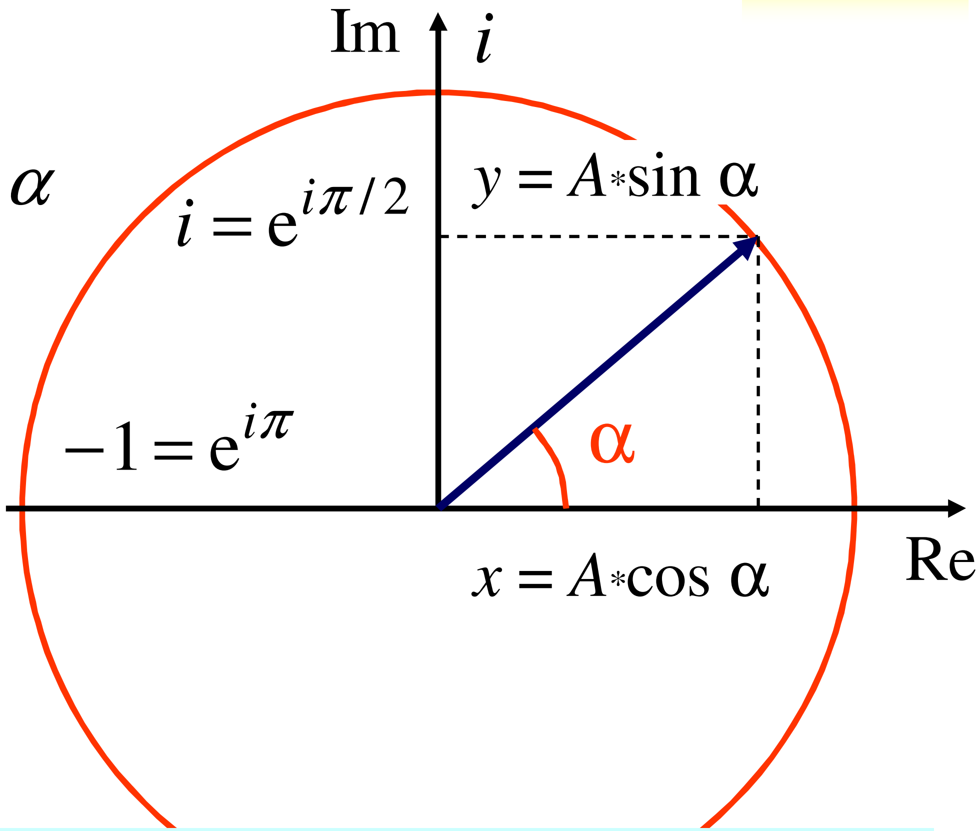
$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$|z| = A = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}(y/x)$$

$$x = \mathrm{Re}(z) = A\cos\alpha$$

$$y = \mathrm{Im}(z) = A\sin\alpha$$

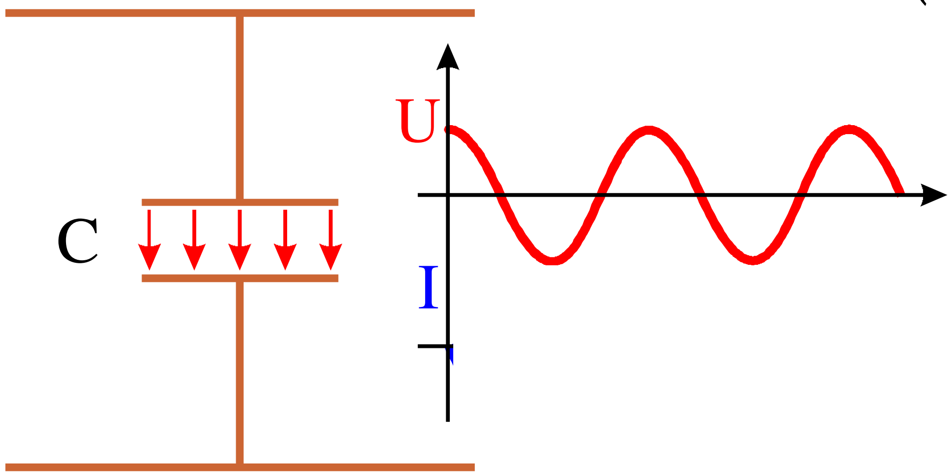


$$w = z^* = a - ib \qquad |w| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \varphi = \text{-}\mathrm{arctg}(b/a) = \text{-}\alpha$$

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} \qquad |w| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \varphi = \text{-}\mathrm{arctg}(b/a) = \text{-}\alpha$$

Prąd przemienny i liczby zespolone

$$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\omega t}\right) \qquad \sin(\omega t) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i\omega t}\right)$$



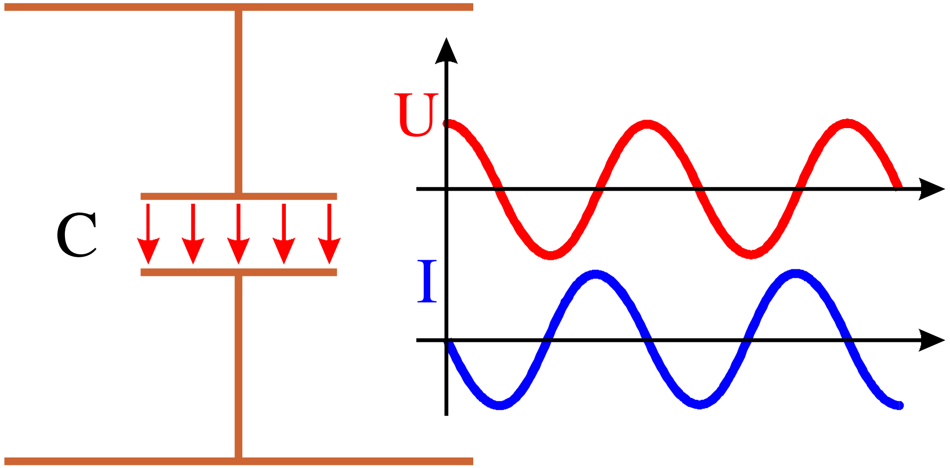
$$U = U_0\,\mathrm{e}^{i\omega t}$$

$$Q = \mathrm{C} * U \quad \Longrightarrow \quad Q = U_0 \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{i\omega t}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \Longrightarrow \quad I = U_0 \mathrm{C} i \omega\,\mathrm{e}^{i\omega t}$$

Prąd przemienny i liczby zespolone

$$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\omega t}\right)$$



$$U = U_0\,\mathrm{e}^{i\omega t}$$

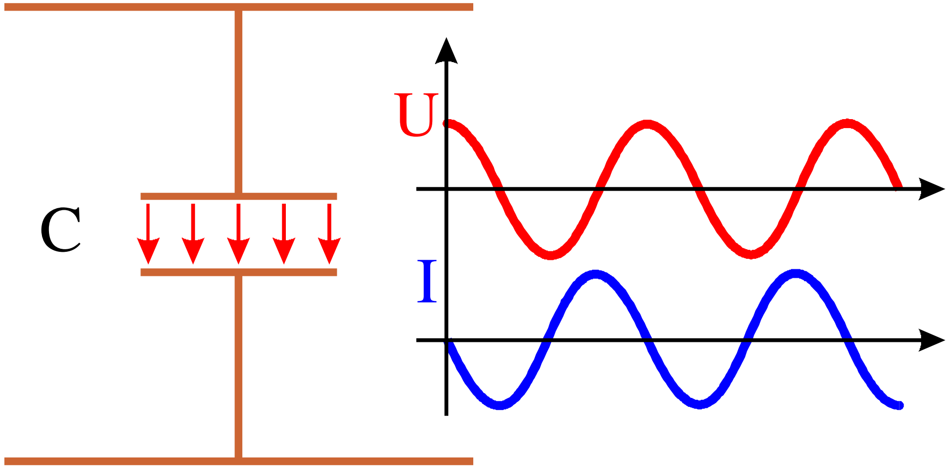
$$I = U_0 i\omega \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{i\omega t}$$

$$Q = \mathrm{C} * U \quad \Longrightarrow \quad Q = U_0 \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{i\omega t}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \Longrightarrow \quad I = U_0 \mathrm{C} i\omega\,\mathrm{e}^{i\omega t}$$

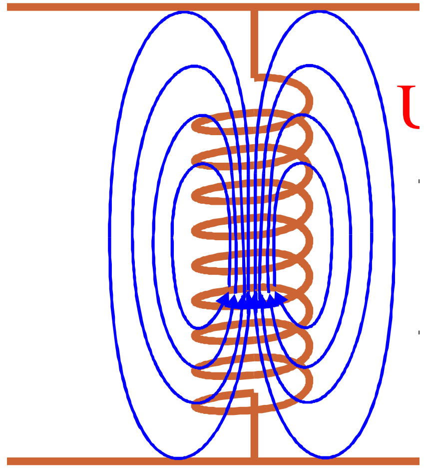
$$R = \frac{U}{I}$$

Impedancja



$$U = U_0 e^{i\omega t}$$

$$I = i\omega C \cdot U_0 e^{i\omega t}$$



Prawo Ohma:

Napięcie jest proporcjonalne do natężenia : $U = Z * I$

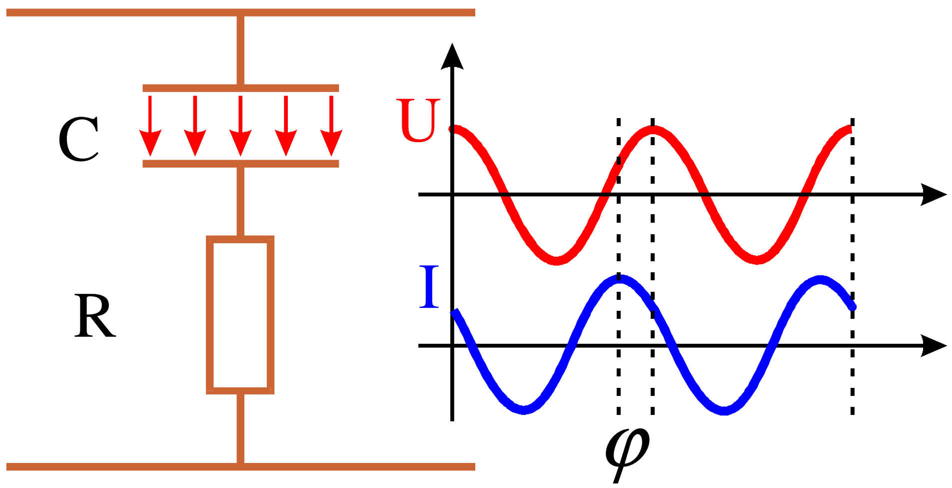
Impedancja kondensatora: $Z = \dfrac{1}{i\omega C}$ $\quad$ $Z = i\omega L$

Zawada czyli wartość bezwzględna impedancji:

$$|Z| = \frac{1}{\omega C} \qquad |Z| = \omega L$$

Przesunięcie fazowe w obwodzie RC

Impedancja opornika wynosi R.



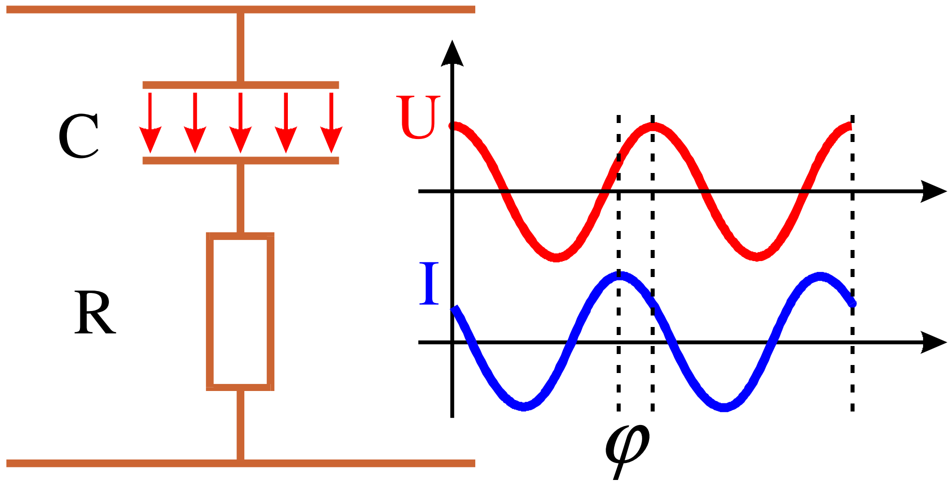
$$U = U_0 e^{i\omega t}$$

$$I = U / Z$$

Impedancja: $Z = Z_C + Z_R = \dfrac{1}{i\omega C} + R$

Przesunięcie fazowe w obwodzie RC

Impedancja opornika wynosi R.



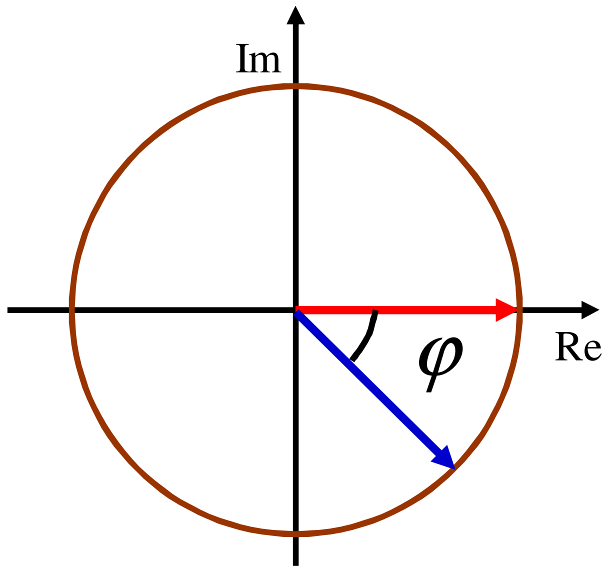
$$U = U_0 \mathrm{e}^{i\omega t}$$

$$I = |I| \mathrm{e}^{-i\varphi} \mathrm{e}^{i\omega t} = |I| \mathrm{e}^{i(\omega t - \varphi)}$$

Impedancja: $Z = \dfrac{1}{i\omega C} + R = |Z| e^{i\varphi}$

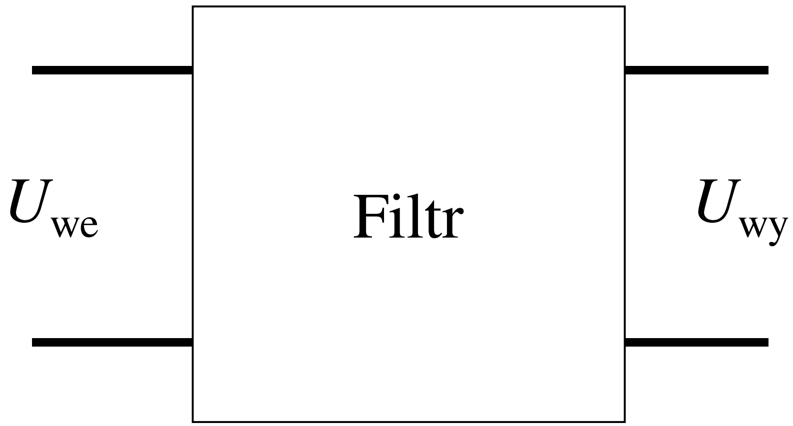
Zawada: $|Z| = \sqrt{\dfrac{1}{\omega^2 C^2} + R^2}$

Faza: $\mathrm{tg}(\varphi) = -\dfrac{1}{\omega C R}$



Napięcie spóźnia się względem natężenia.

Filtry



Charakterystyki

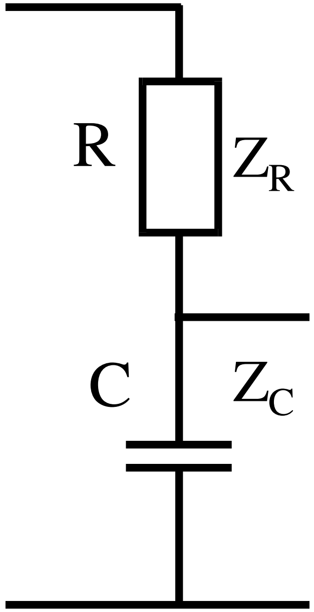
Napięciowa: **transmitancja** filtru to stosunek amplitud napięcia na wyjściu i wejściu.

$$T(\omega) = \frac{|U_{Wy}|}{|U_{We}|}$$

Fazowa: przesunięcie fazy napięcia na wyjściu.

$$\varphi(\omega)$$

Obwód RC jako filtr



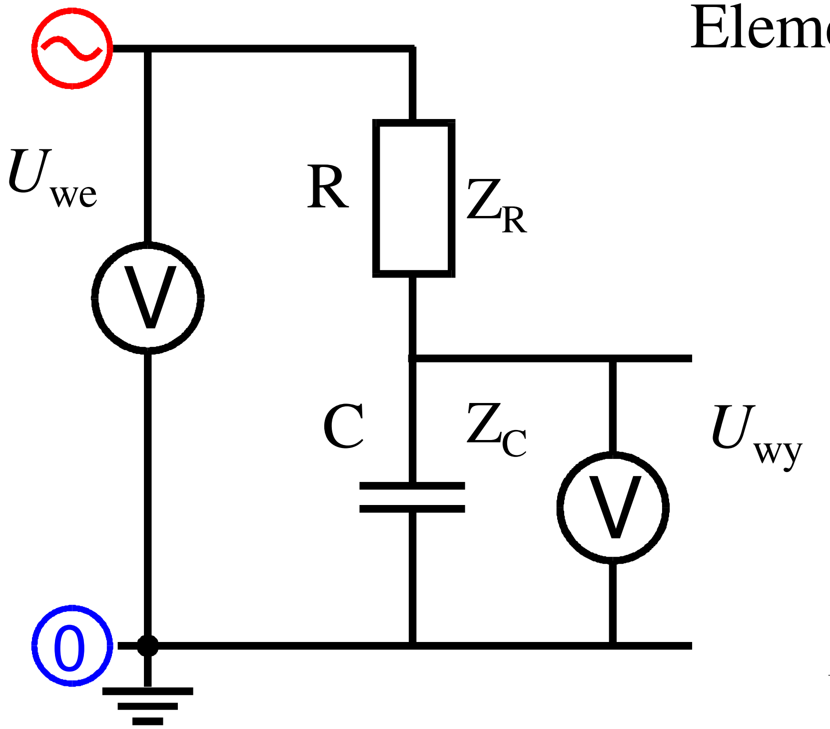
Elementy R i C tworzą dzielnik napięcia:

$$U_{\mathrm{Wy}} = U_{\mathrm{We}} \frac{\mathrm{Z_C}}{\mathrm{Z_S}}$$

$$\mathrm{Z_R} = \mathrm{R} \qquad Z_{\mathrm{C}} = \frac{1}{i\omega C}$$

$$Z_{\mathrm{S}} = \frac{1}{i\omega C} + R$$

Obwód RC jako filtr



Elementy R i C tworzą dzielnik napięcia:

$$U_{Wy} = U_{We} \frac{Z_C}{Z_S}$$

$$Z_R = R \qquad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

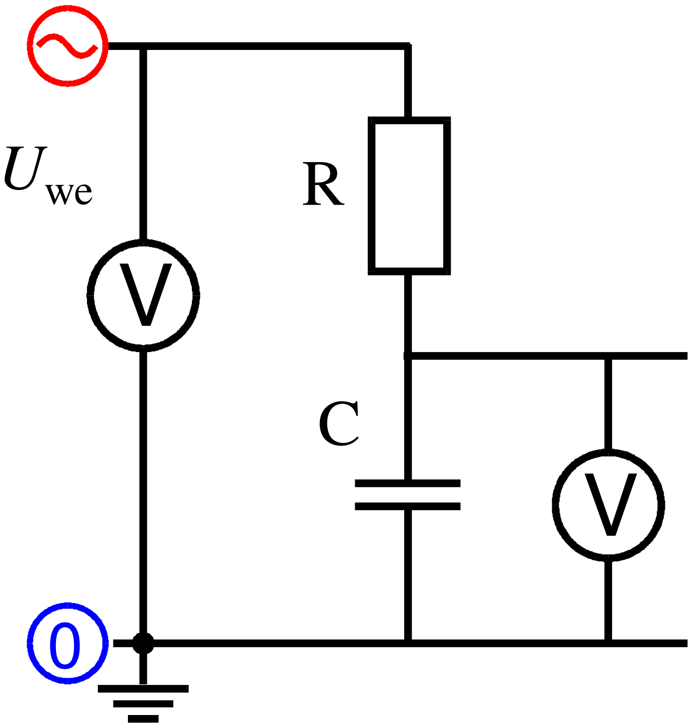
$$Z_S = \frac{1}{i\omega C} + R$$

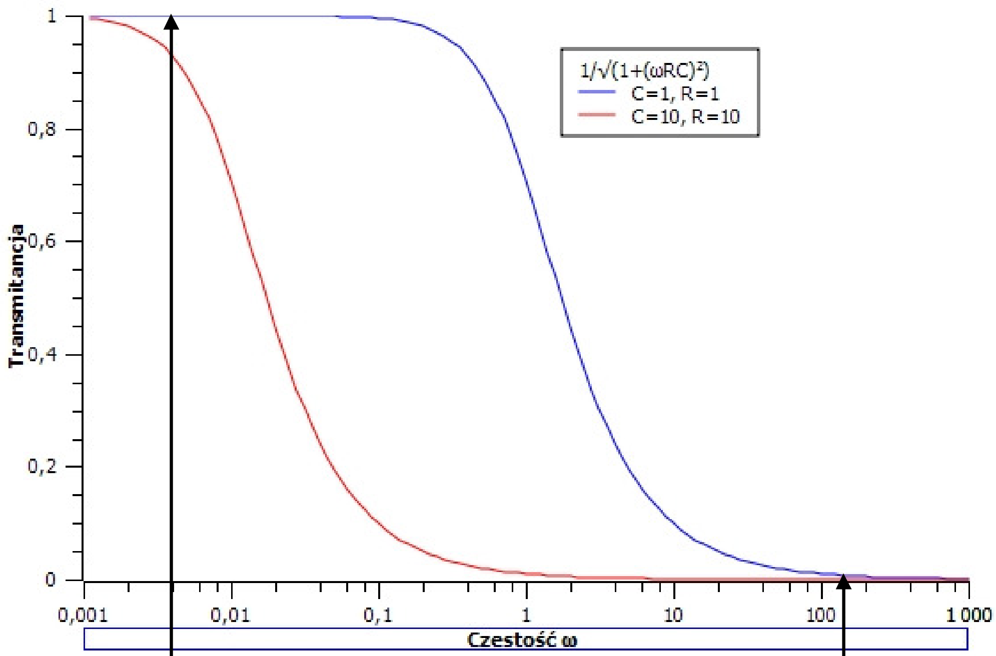
$$\frac{U_{Wy}}{U_{We}} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

Transmitancja: $$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Faza: $$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}(\omega C R)$$

Obwód RC jako filtr dolnoprzepustowy





$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$$

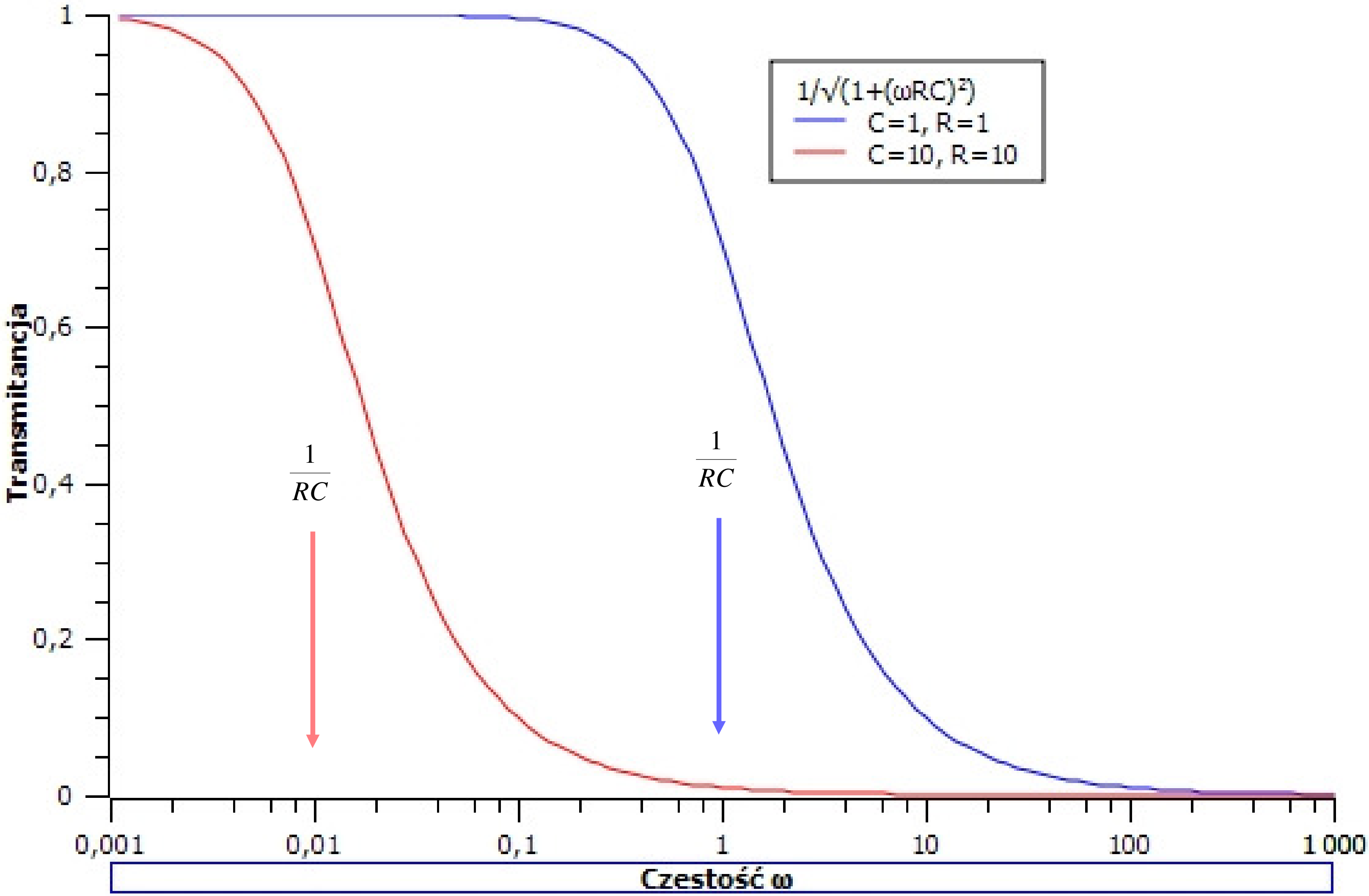
$$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}(\omega CR)$$

$$\tau = RC$$

Transmitancja = 1,
te częstości są
przepuszczane.

Transmitancja = 0,
te częstości są
zatrzymywane.

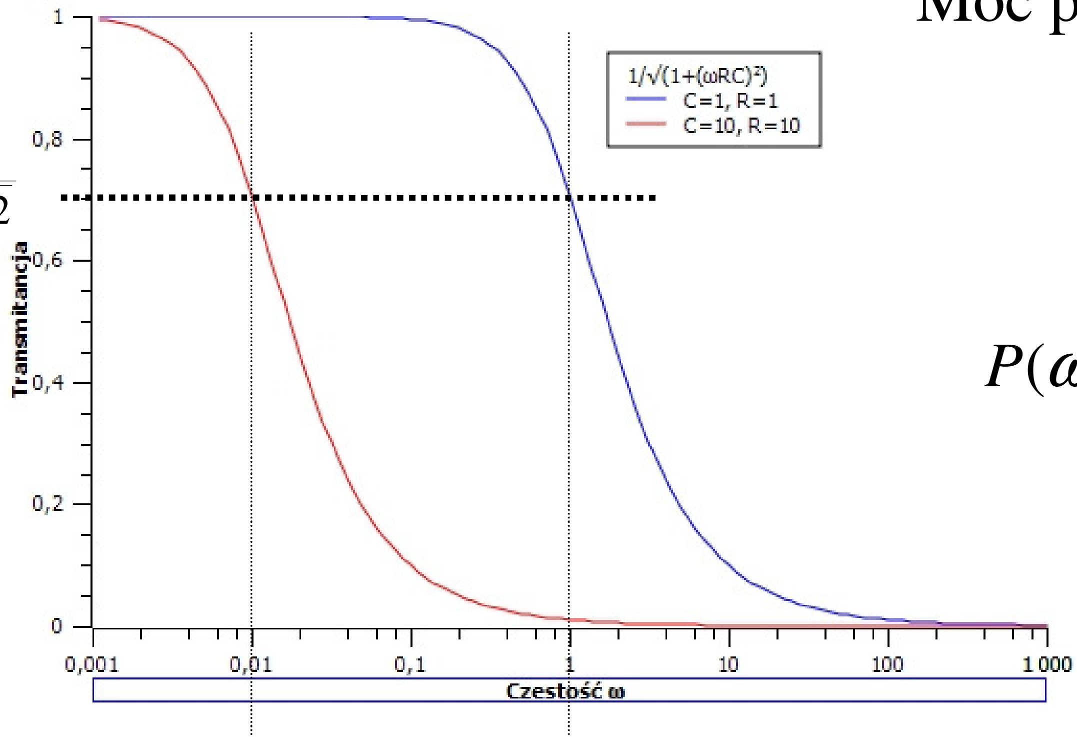
Widmo filtru dolnoprzepustowego



Na osi poziomej widma narysowano częstość w skali logarytmicznej.

Częstość graniczna

$T = \frac{1}{\sqrt{2}}$



Moc przepuszczana przez filtr:

$$P = \frac{U_{\mathrm{wyj}}^2}{2\mathrm{R}_{\mathrm{Zewn}}}$$

$$P(\omega) = \frac{U_{wej}^2}{2\mathrm{R}_{\mathrm{Zewn}}\left(1+\omega^2\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\right)}$$

Częstość graniczna, ω_G, to taka, dla której przepuszczana jest połowa mocy.

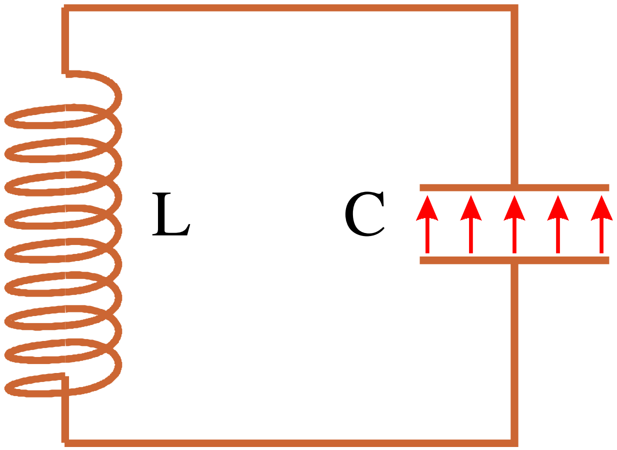
$$U(\omega_G) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dla filtra RC, dolnoprzepustowego, oznacza to ωRC = 1:

$$\omega_G = 1/RC,$$

$$f_G = \frac{1}{2\pi RC}$$

Obwód LC, impedancja



$$Z_S = Z_L + Z_C$$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{-i}{\omega C}$$

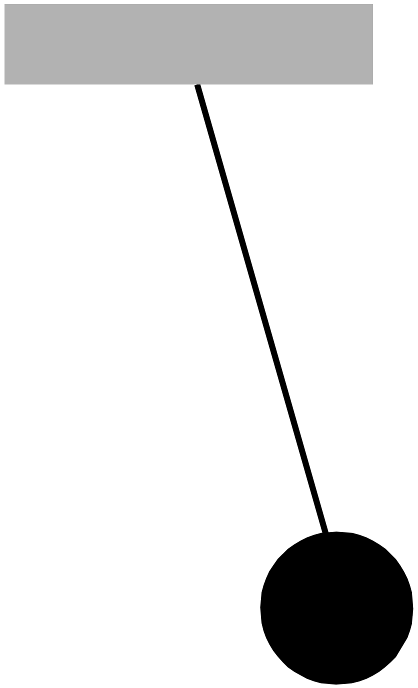
$$Z_L = i\omega L$$

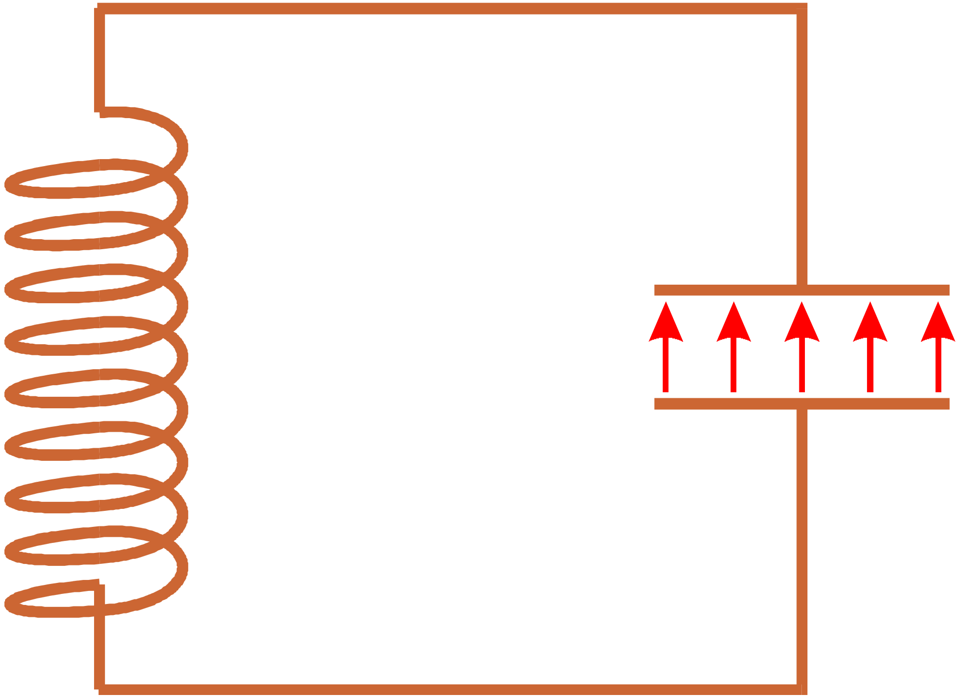
$$Z_S(\omega) = i\,\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}$$

Gdy $\omega^2 = 1/LC$, to $Z_S = 0$.

Zerowy opór sugeruje, że prąd może płynąć bez napięcia.

Obwód drgający, LC

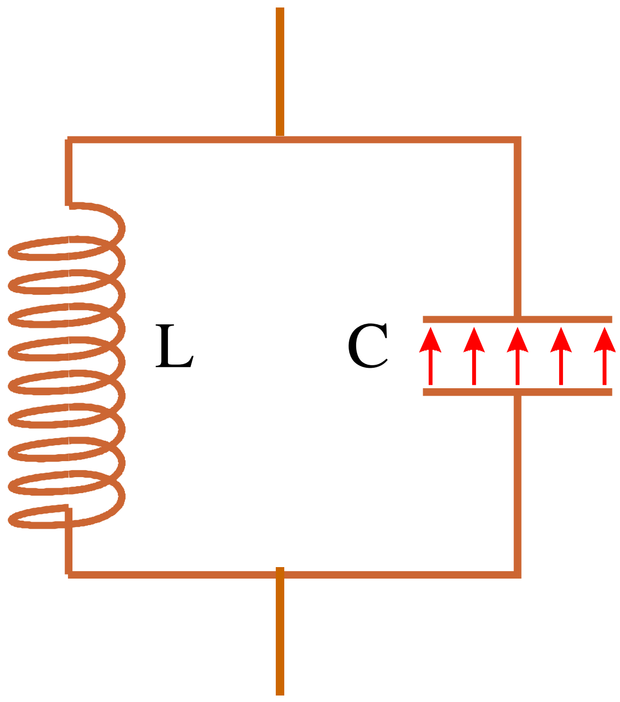




$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Obwód LC, oscylator



Kondensator $\quad I = C\dfrac{dU}{dt}$

Cewka: $\quad U = -\varepsilon = -\mathrm{L}\dfrac{dI}{dt}$

$$\frac{d^2U}{dt^2} = -\frac{1}{\mathrm{LC}}U$$

Otrzymujemy zatem równanie oscylatora harmonicznego o częstości rezonansowej:

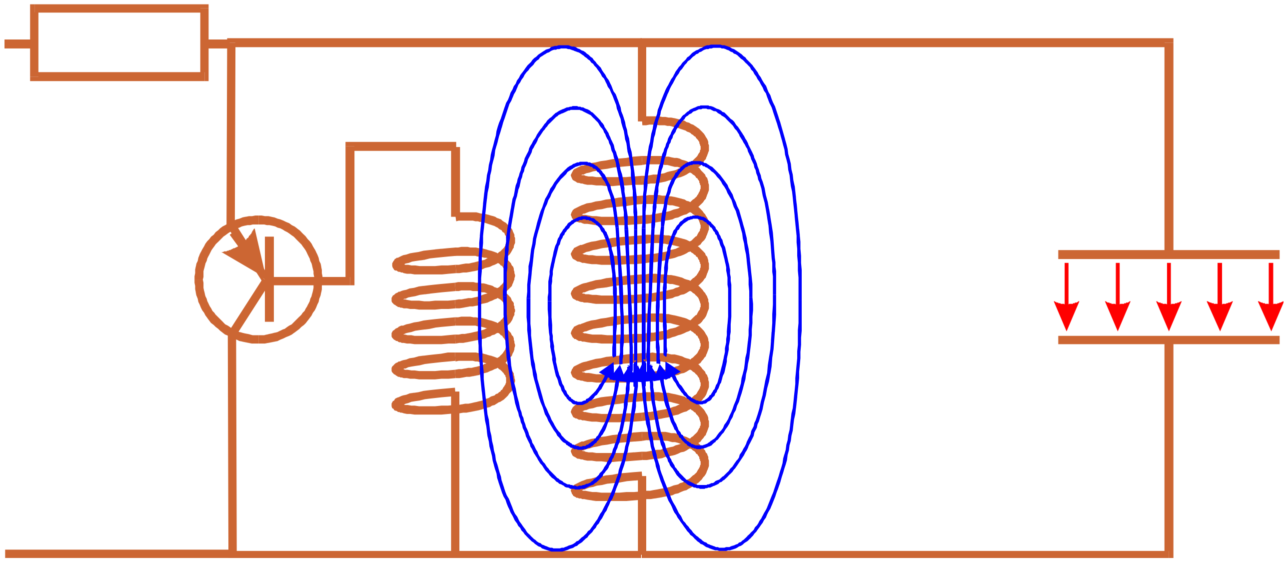
$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

L: $\quad$ H = Vs/A

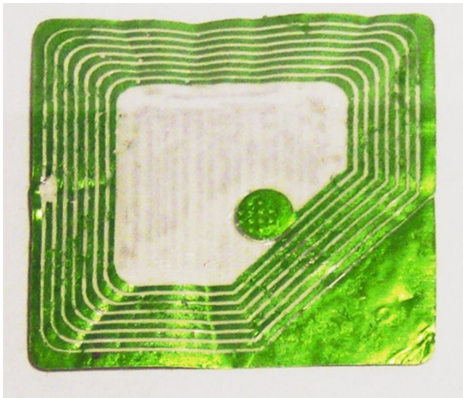
C: $\quad$ F = C/V = As/V

LC: $\quad$ Vs/A * As/V = s^2

Zastosowanie obwodów LC

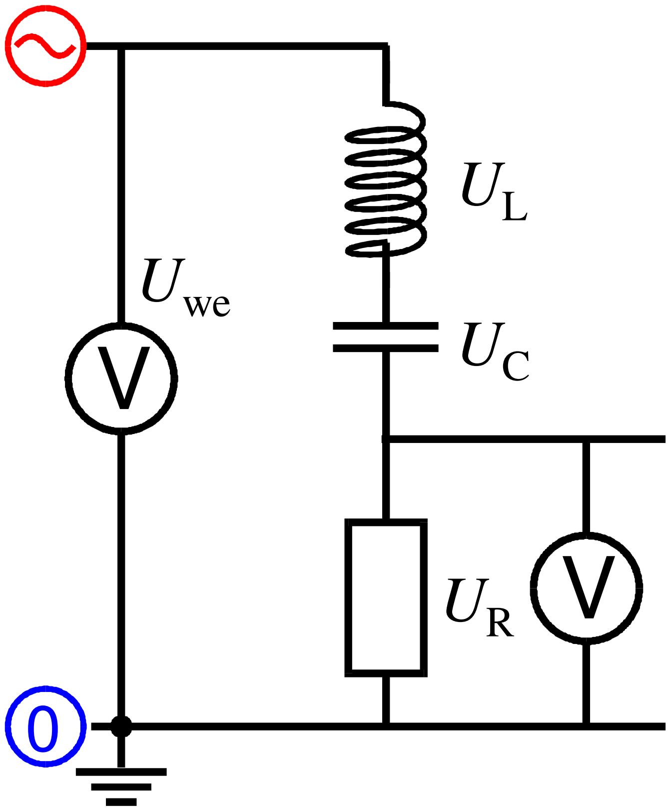


Nadajnik fal elektromagnetycznych



Znacznik w sklepie

Obwód RLC - różniczkowo



II prawo Kirchhoffa :

$$U_{we}(t) = U_L(t) + U_C(t) + U_R(t)$$

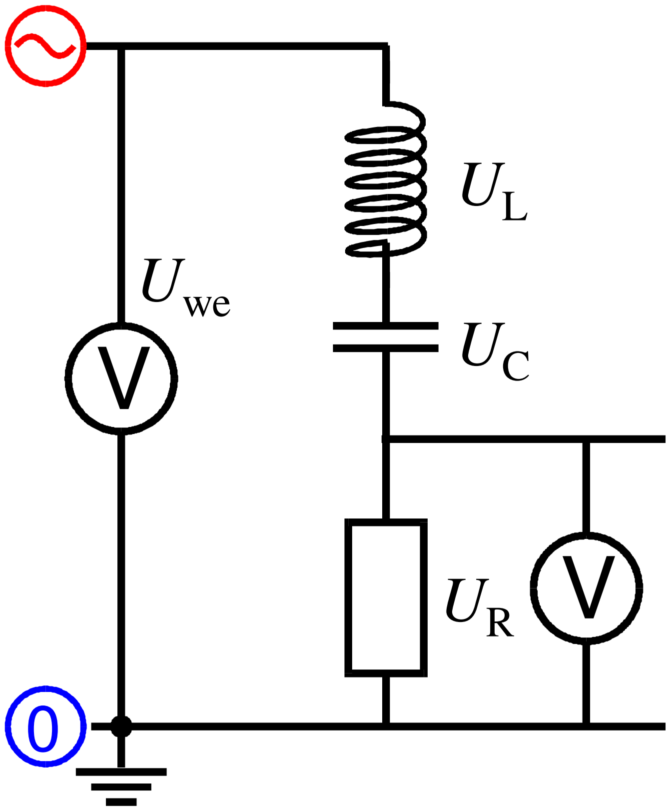
$$U_{we}(t) = L\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int I(t)dt + RI(t)$$

$$U_R(t) = RI(t)$$

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R}$$

$$U_{we}(t) = \frac{L}{R}\frac{dU_R(t)}{dt} + \frac{\int U_R(t)dt}{RC} + U_R(t)$$

Obwód RLC - impedancja



II prawo Kirchhoffa :

$$U_{we} = U_L + U_C + U_R$$

$$U_{we} = Z_L I + Z_C I + RI$$

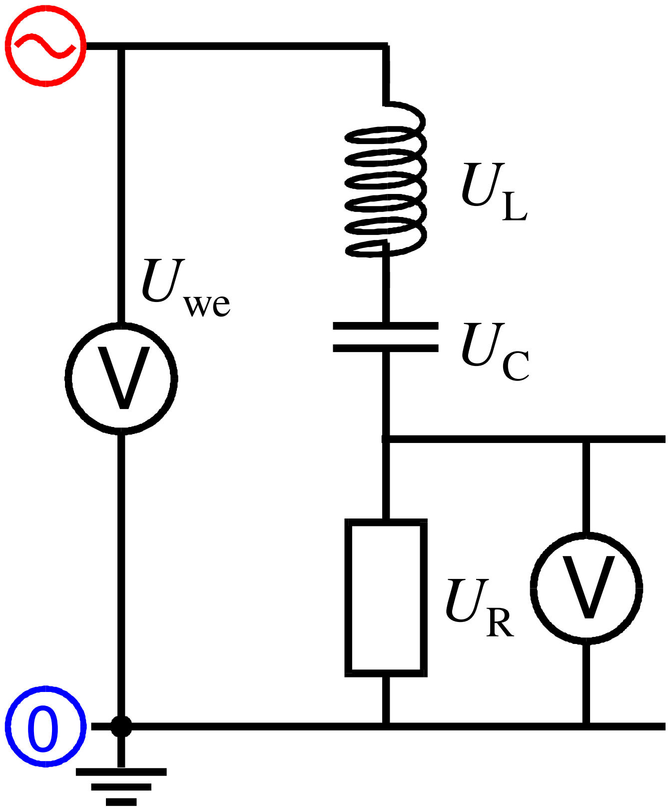
$$I = U_R/R$$

$$U_{we} = U_0 e^{i\omega t} \qquad U_R = U_{R0} e^{i\omega t}$$

$$U_0 = \frac{i\omega L U_{R0}}{R} + \frac{U_{R0}}{i\omega RC} + U_{R0}$$

$$U_{R0} = \frac{U_0}{1 + \frac{i\omega L}{R} + \frac{1}{i\omega RC}}$$

Obwód RLC - napięcia



$$U_{we} = U_0 e^{i\omega t}$$

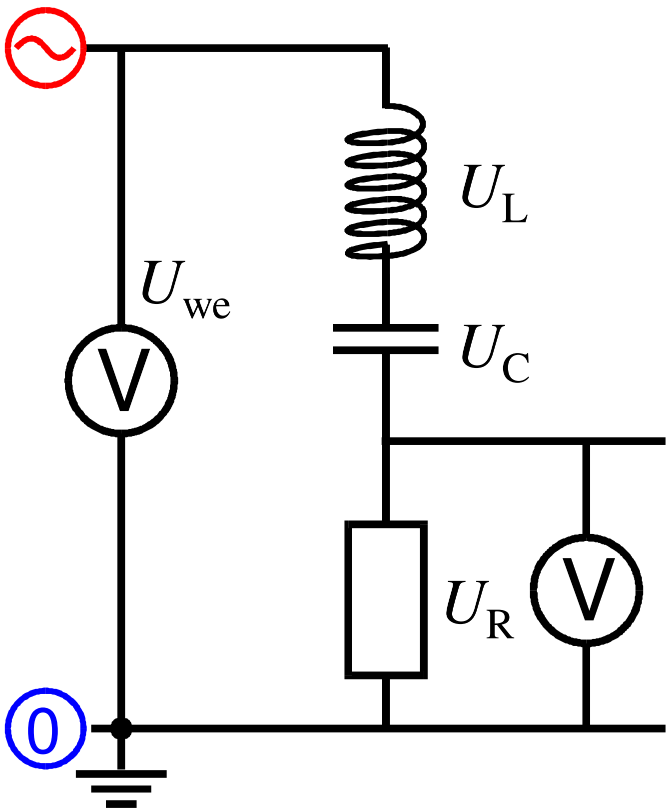
$$U_R(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t} \cdot i\omega CR}{i\omega CR - \dots}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$U_L(t) = \frac{-U_0 e^{i\omega t} \cdot \omega^2 LC}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

$$U_C(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

Obwód RLC - rezonans



$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$U_R(t) = U_0 e^{i\omega t} = U_{we}(t)$$

Na wyjściu to samo co na wejściu!

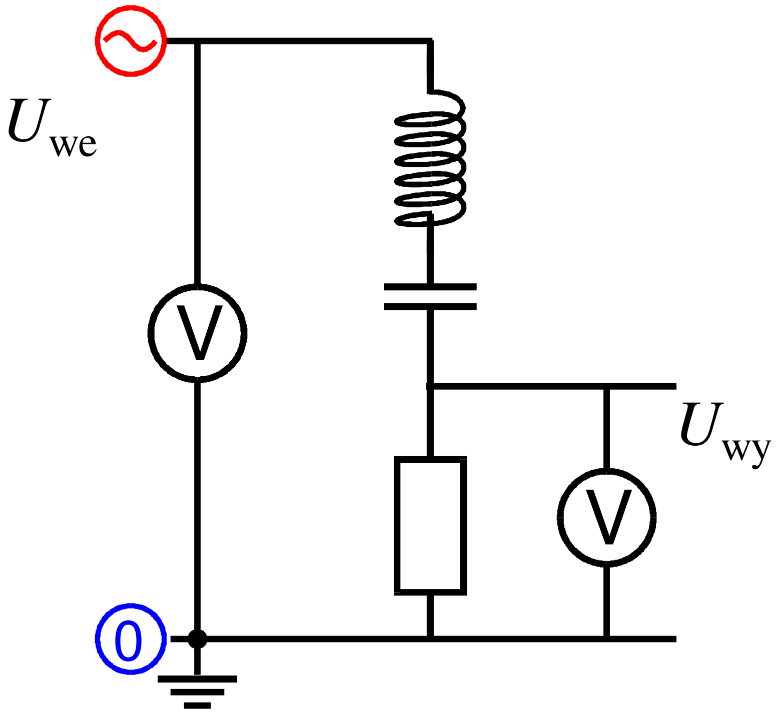
$$U_L(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t} \cdot i\omega \mathrm{L}}{\mathrm{R}} = \frac{U_0}{\mathrm{R}} \sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}} \cdot e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

$$U_C(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{i\omega \mathrm{CR}} = \frac{U_0}{\mathrm{R}} \sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} = -U_L$$

$$U_{we} = U_0 \mathrm{e}^{i\omega t}$$

Dla częstości rezonansowej, napięcie zabrane przez kondensator jest oddawane przez cewkę (i na odwrót).

Obwód RLC jako filtr



$$U_{Wy} = U_R = \frac{i\omega CR}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1} U_{We}$$

$$\frac{U_{Wy}}{U_{We}} = \frac{i\omega CR}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

$$T(\omega) = \frac{\omega CR}{\sqrt{(\omega CR)^2 + \left(1 - \omega^2 LC\right)^2}}$$

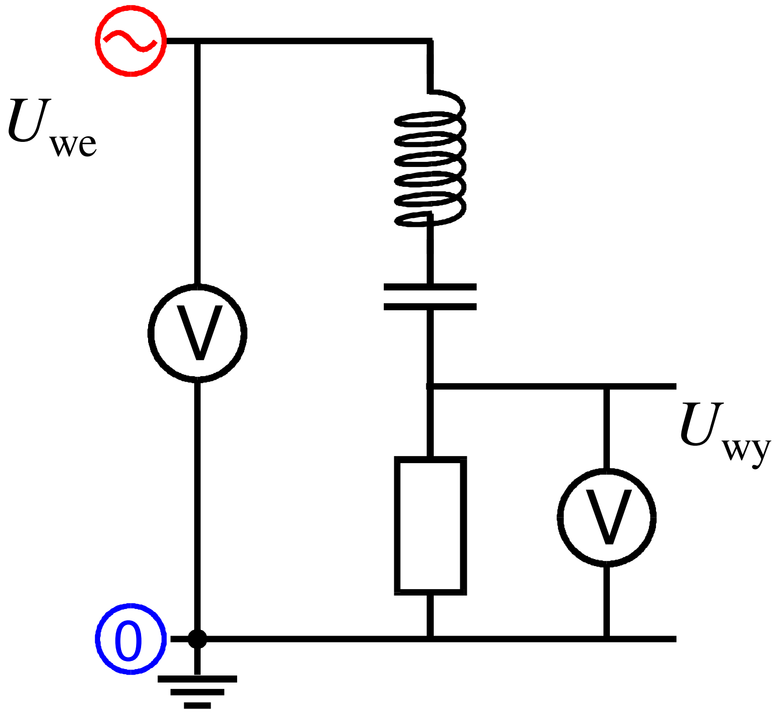
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

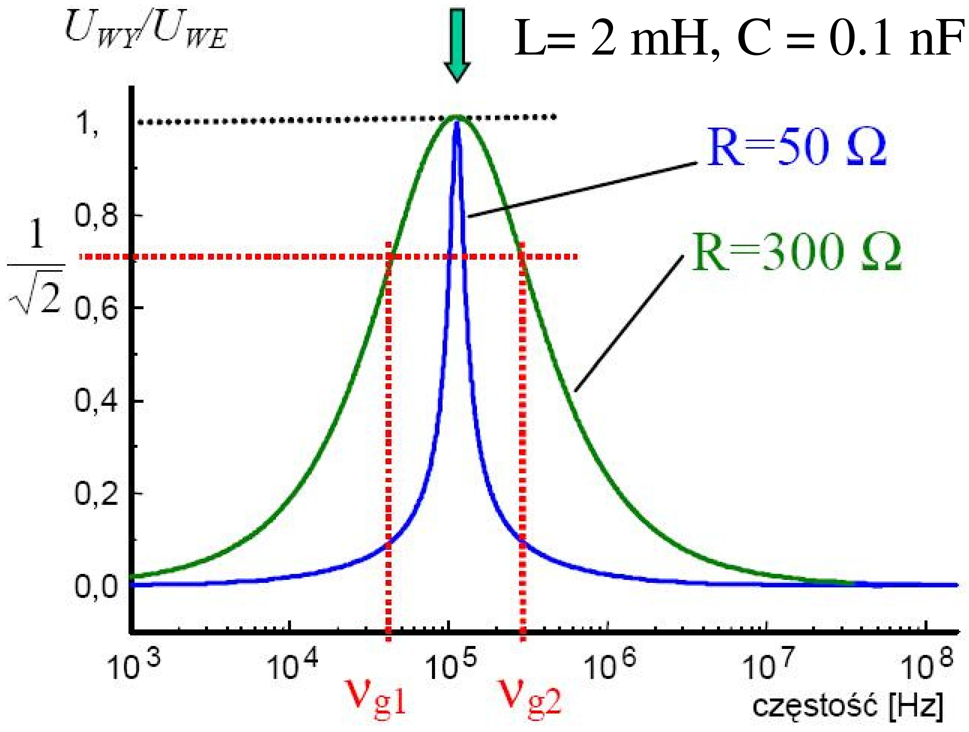
$T(0) = 0$

$T(\omega_0) = 1$ filtr środkowo-przepustowy

$T(\infty) = 0$

T filtru RLC

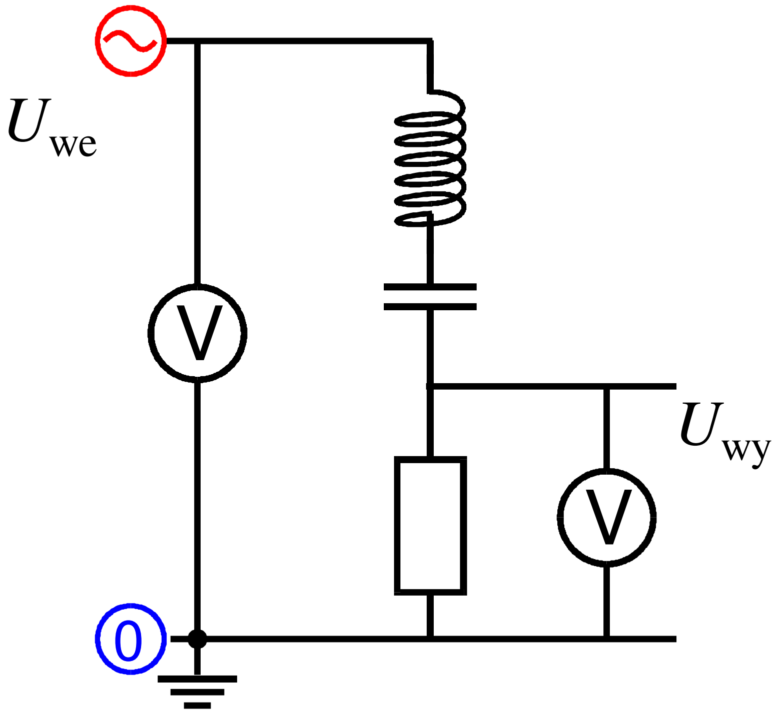




$$\frac{U_{Wy}}{U_{We}} = \frac{i\omega CR}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

$$T(\omega) = \frac{\omega CR}{\sqrt{(\omega CR)^2 + \left(1 - \omega^2 LC\right)^2}}$$

φ filtru RLC



$$\frac{U_{Wy}}{U_{We}} = \frac{i\omega CR}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{1-\omega^2 LC}{\omega CR}\right)$$