

Wykład 1

Podstawy obwodów elektrycznych, elementy bierne

2 marca 2021

Wstęp

1. Prąd stały

1.1 Prawo Kirchhoffa

1.2 Przykłady prostych obwodów

2. Prąd zmienny

2.1 Podstawowe elementy

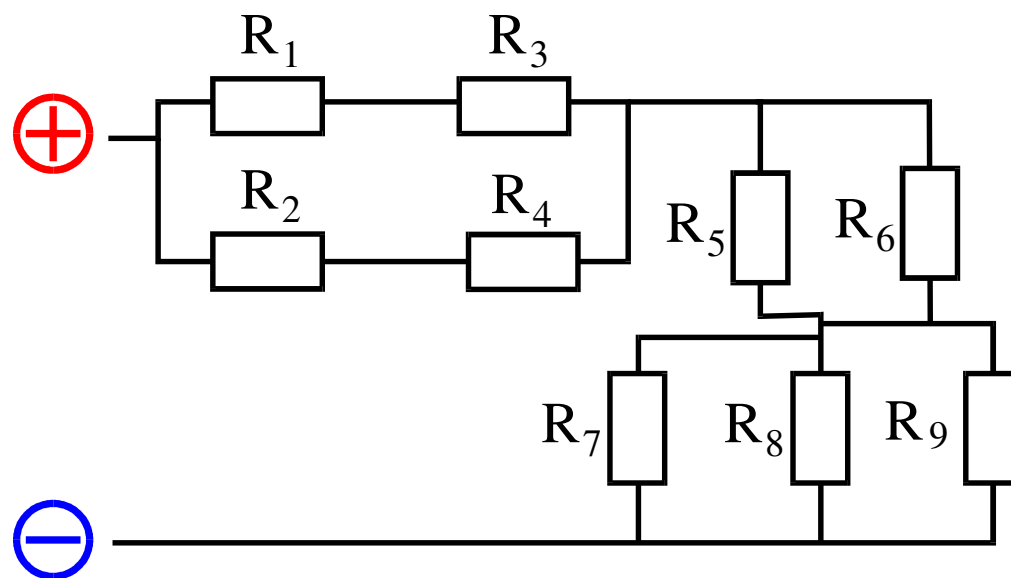
2.2 Obwody RC i RL

2.3 Impedancja

2.4 Filtry

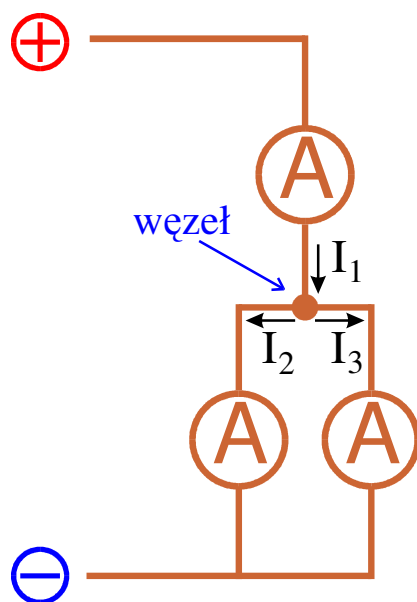
2.5 Obwody rezonansowe

Obwody prądu stałego



Zasada zachowania ładunku a przepływ prądu

Ładunek nie znika, ani nie powstaje, zatem ładunek, który dopłynął do węzła, musi z niego wypłynąć.



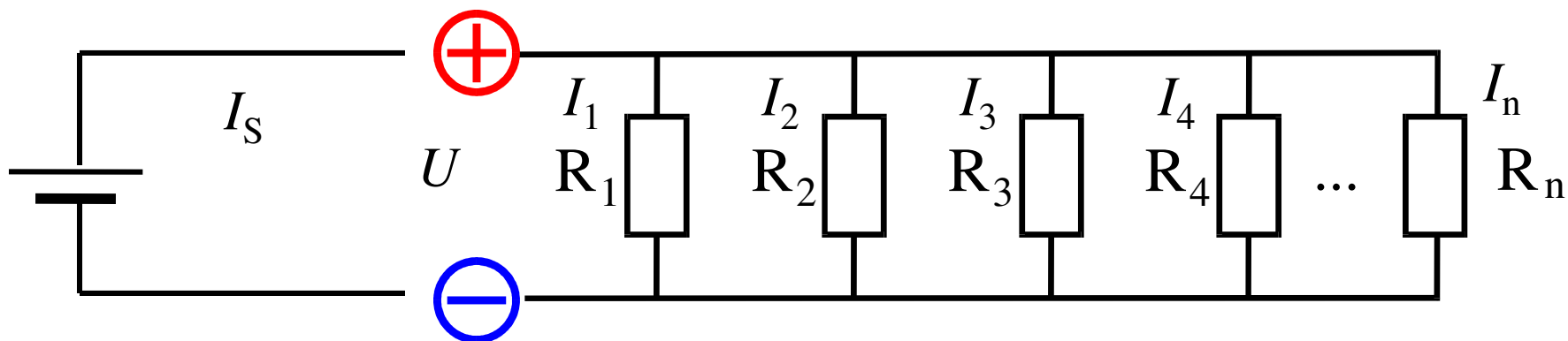
I prawo Kirchhoffa:

Suma natężeń prądów dopływających i odpływających z węzła wynosi zero.

$$\sum_j I_j = 0$$

Prądy dopływające traktujemy jako dodatnie, odpływające jako ujemne.

Równoległe łączenie oporników



$$I_S = \sum_{k=1}^n I_k$$

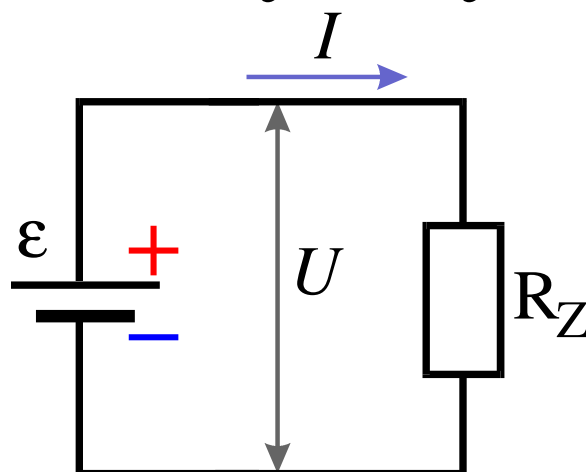
$$U = \text{const}$$

$$\frac{I_S}{U} = \sum_{k=1}^n \frac{I_k}{U}$$

$$\frac{1}{R_S} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

Przy połączeniu równoległym, sumują się przewodnictwa, $1/R$.

Obwód elektryczny z zasilaniem



Zewnętrzne napięcie elektryczne, U :

spadek potencjału na części obwodu elektrycznego nie zawierającej źródeł prądu.

Siła elektromotoryczna, ε :

energia elektryczna uzyskana przez jednostkowy ładunek na odcinku obwodu zawierającym źródło prądu, a nie zawierającym rezystancji.

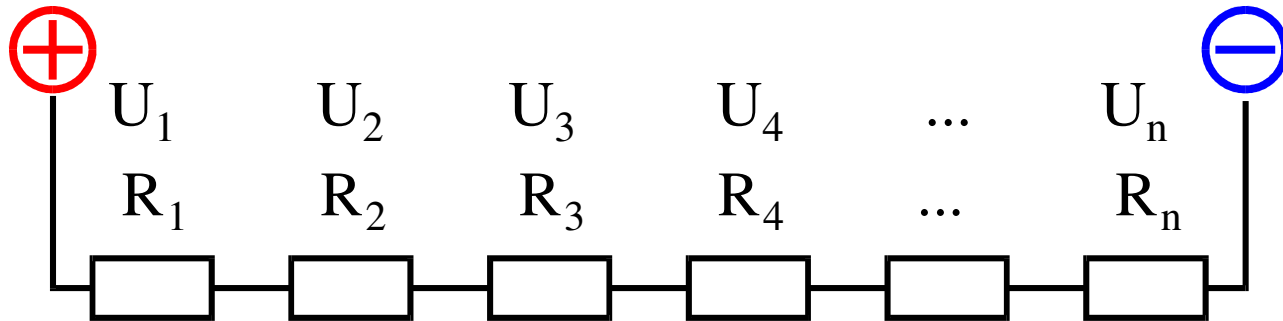
Zasada zachowania energii a rozkład napięć

Energia ładunku w polu zależy od potencjału w danym miejscu, a nie od drogi jaką przebył.

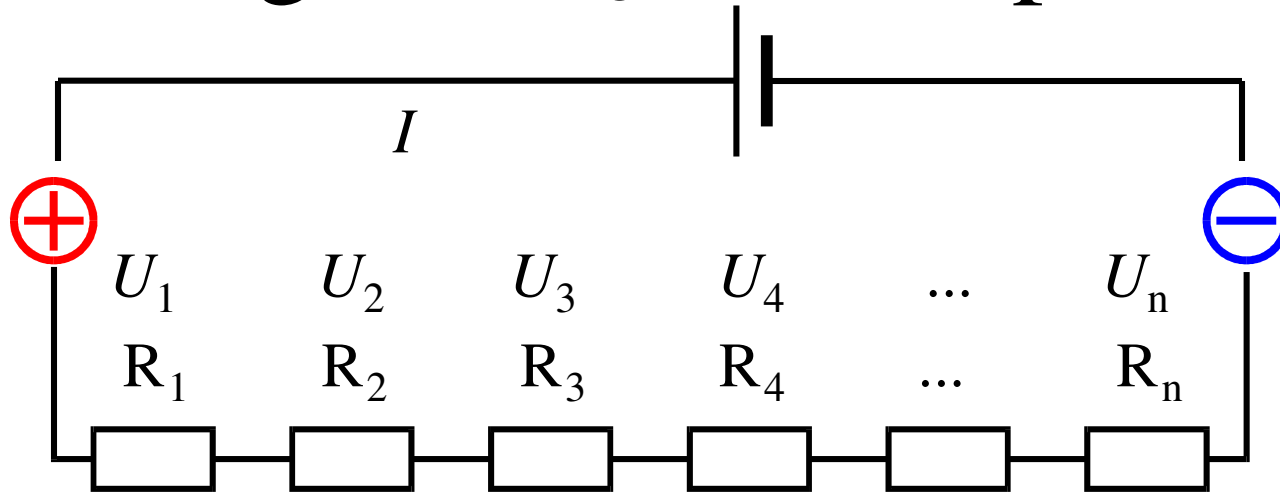
II prawo Kirchhoffa:

Suma napięć na oporach w obwodzie zamkniętym jest równa sumie sił elektromotorycznych.

$$\sum_j U_j = \sum_k \varepsilon_k$$



Szeregowe łączenie oporników



$$U_S = \sum_{k=1}^n U_k$$

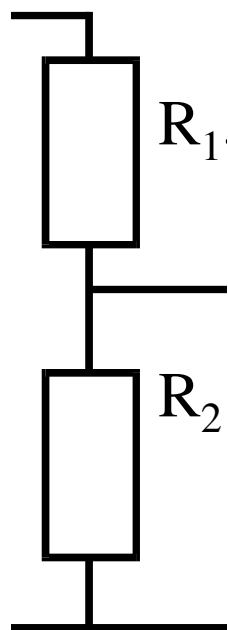
$$I = \text{const}$$

$$\frac{U_S}{I} = \sum_{k=1}^n \frac{U_k}{I}$$

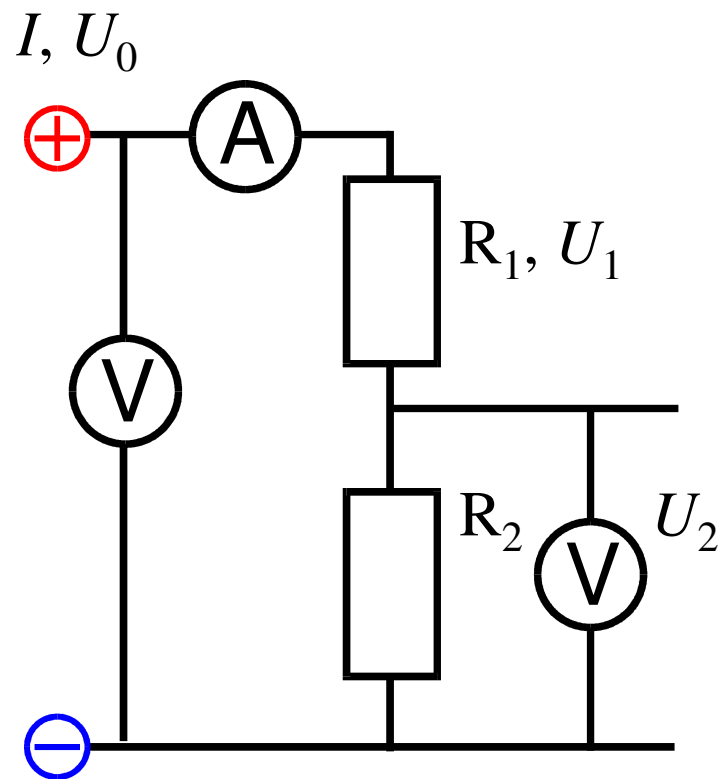
$$R_S = \sum_{k=1}^n R_k$$

Przy połączeniu szeregowym, opory sumują się.

Przykłady obwodów - dzielnik napięcia



Przykłady obwodów - dzielnik napięcia



Całkowity opór obwodu

$$R_S = R_1 + R_2$$

Natężenie prądu płynącego przez obwód:

$$I = U_0 / (R_1 + R_2)$$

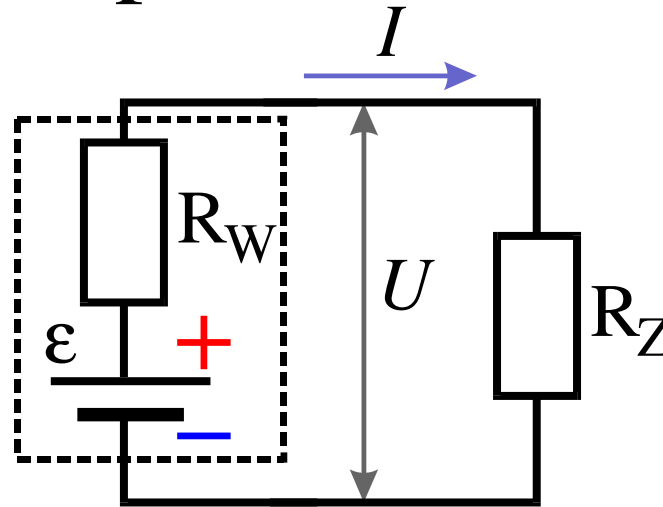
Zakładamy, że do wyjścia nie płynie prąd.

Napięcie na wyjściu wynosi:

$$U_2 = R_2 * I$$

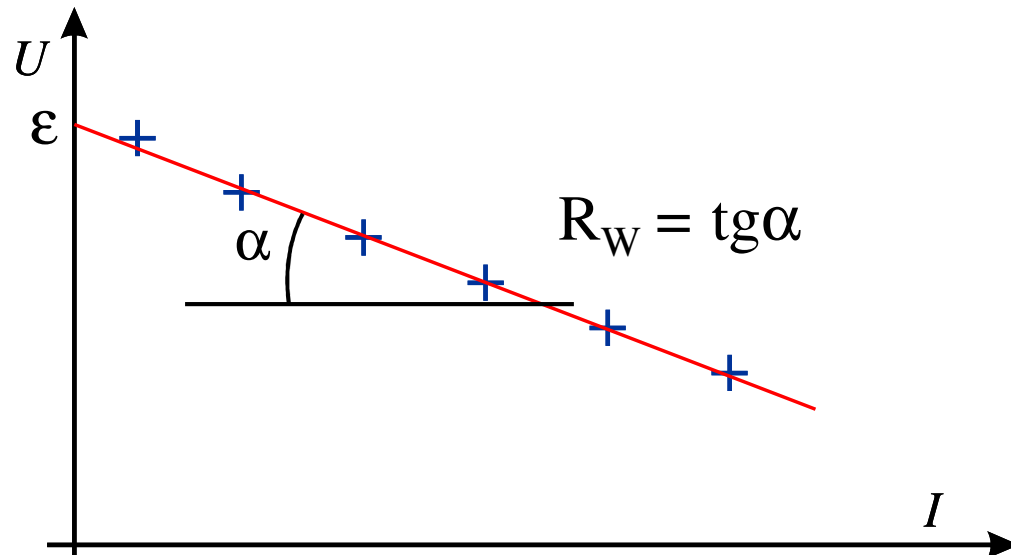
$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0$$

Opór wewnętrzny



Rzeczywiste źródła napięcia musimy przedstawić w postaci obwodu zastępczego złożonego z idealnego źródła o sile elektromotorycznej ε i z oporu wewnętrznego R_W . Napięcie na zewnątrz takiego źródła będzie wynosiło:

$$U = \varepsilon - R_W I$$

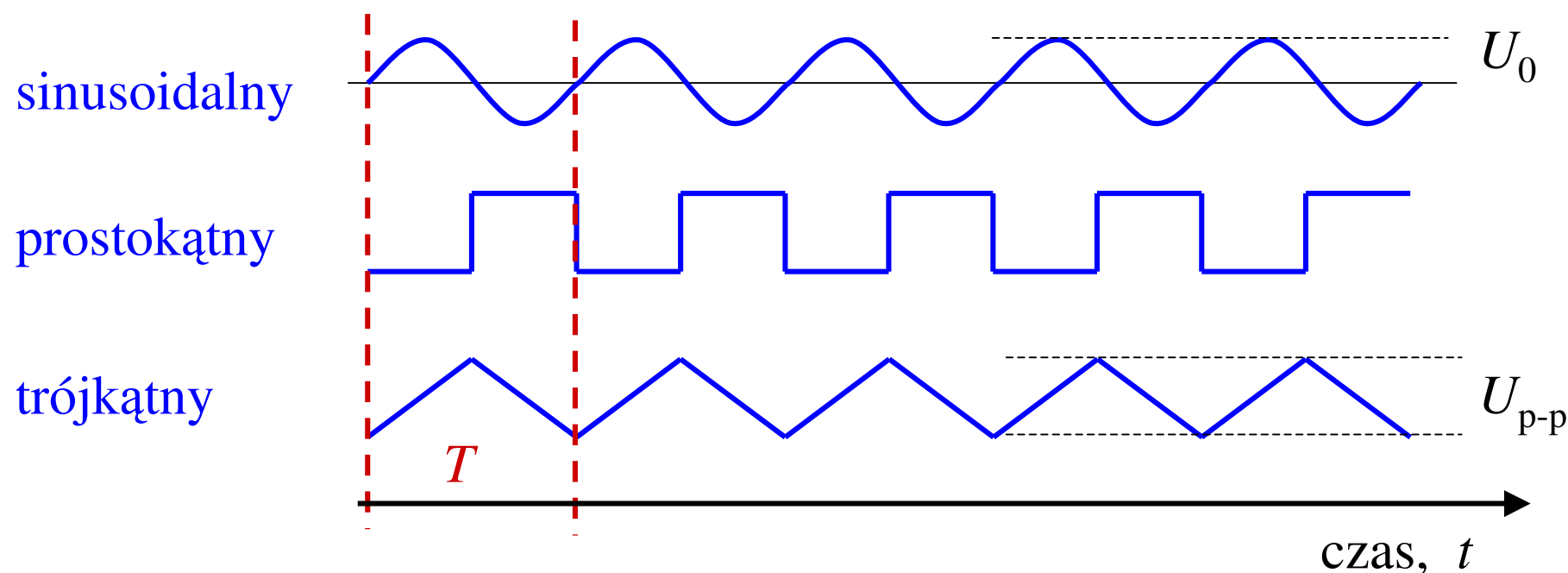


Obwody prądu zmiennego

Prąd zmienny jest najważniejszą formą zastosowań elektryczności. Dzięki niemu funkcjonuje większość urządzeń w naszych domach.

Temat jest dość trudny i do pełnego zrozumienia wymaga znajomości trygonometrii, rachunku różniczkowego i liczb zespolonych. Na tym kursie zajmiemy się jedynie najprostszymi przykładami z tej tematyki takimi jak: obwód RC i RLC czy filtry.

Przebiegi zmiennoprądowe



T - okres zmienności

$f = \frac{1}{T}$ - częstość

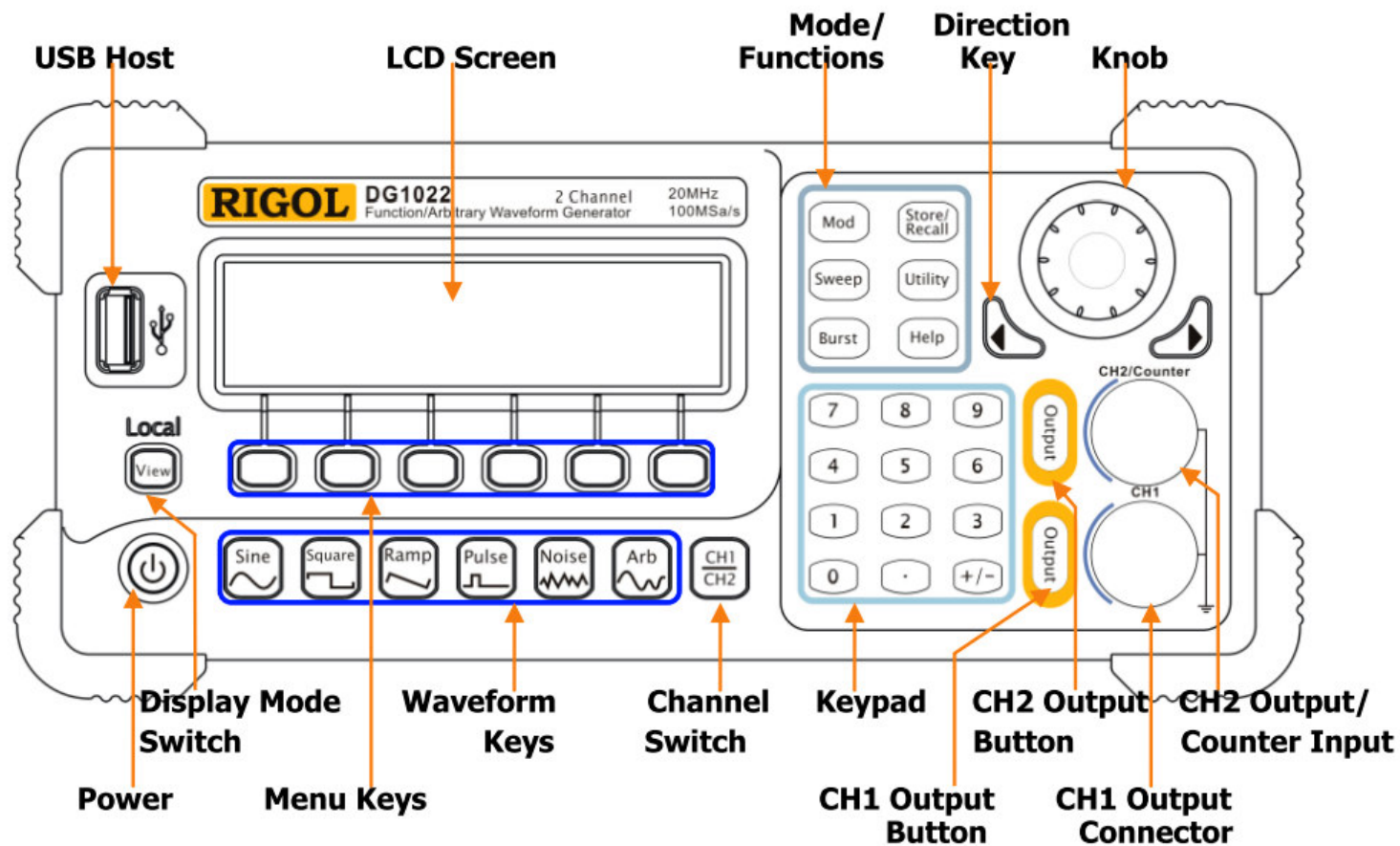
U_0 - amplituda napięcia

U_{p-p} - napięcie międzyszczytowe "peak to peak",
dla przebiegów symetrycznych $U_{p-p} = 2 * U_0$

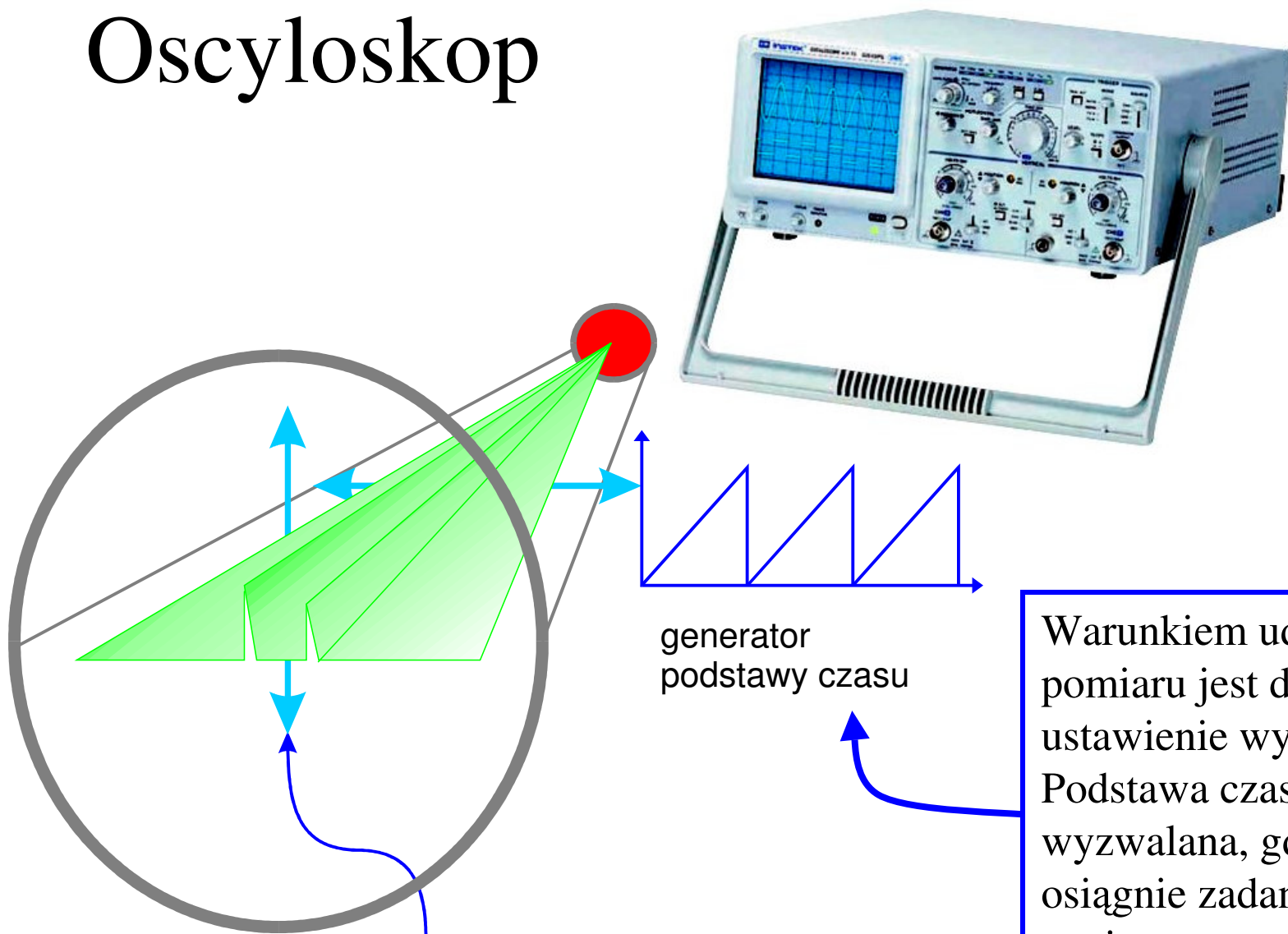
Generator funkcyjny Rigol DG1000

na stronie PE jest duża angielska wersja instrukcji:

http://pe.fuw.edu.pl/pliki/DG1000_UserGuide.pdf



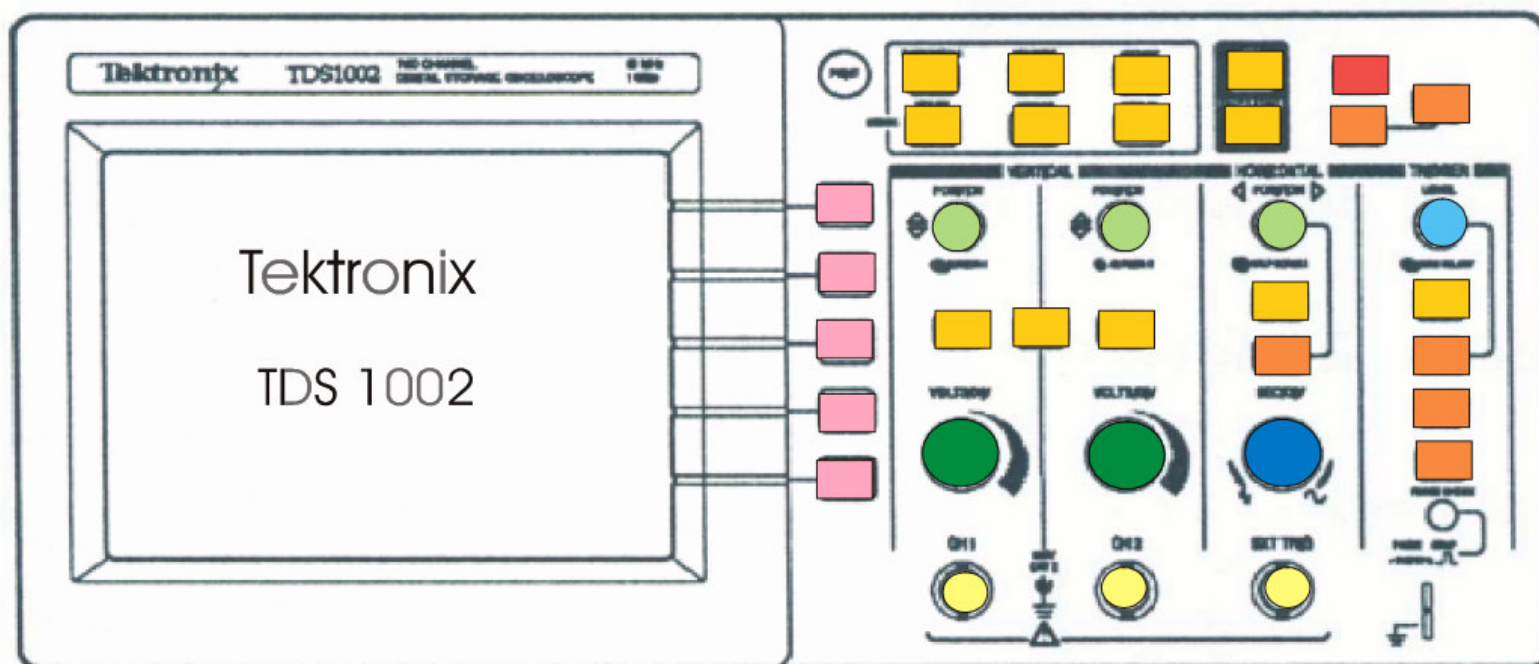
Oscyloskop



Na ekranie oscyloskopu oś pozioma staje się osią czasu.

Na stronie PE dostępna jest skrócona instrukcja obsługi TDS 1002:

<http://pe.fuw.edu.pl/pliki/Tektronix TDS210.pdf>



Legenda :

-  Wejścia pomiarowe i wyzwala
-  Ustawianie Czulości kanału w osi Y
-  Ustawianie Podstawy Czasu kanałów
-  Ustawianie pozycji przebiegu na ekranie
-  Poziom Wyzwalania Podstawy Czasu
-  Menu Narzędziowe Stałe
-  Modyfikacje wybranego Menu
-  Bezpośrednie ustawianie parametrów
-  Pomiar z autodopasowaniem

Blok Kanału I

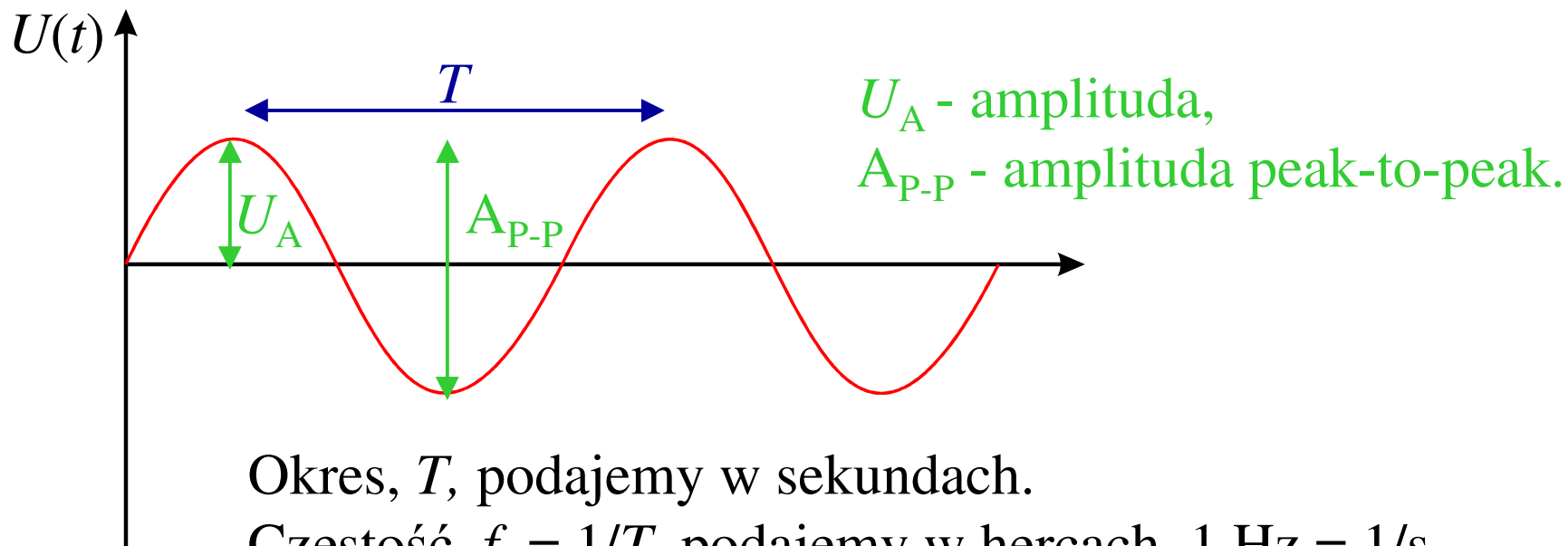
Blok Kanału II

Blok Podstawy Czasu

**Blok Wyzwalania
Podstawy Czasu**

Prąd przemienny

$$U = U_A \sin(\omega \cdot t)$$



Okres, T , podajemy w sekundach.

Częstość, $f = 1/T$, podajemy w hercach, $1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$.

Częstość (kołową): $\omega = \frac{2\pi}{T}$, podajemy w $\text{s}^{-1} = 1/\text{s}$.

$$\omega = 2\pi f$$

$f = 50 \text{ Hz}$, $\omega = 314 \text{ s}^{-1}$ (pulsacja)

Moc prądu

Moc prądu:

$$P = I \cdot U.$$

Prawo Ohma:

$$I = U/R.$$

Możemy otrzymać inne wyrażenia na moc prądu:

$$P = U^2/R = I^2 R.$$

W przypadku prądu przemiennego:

$$P = U_A^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle_T / R.$$

$$\langle \sin^2(\omega t) \rangle_T = 1/2$$

$$P = \frac{U_A^2}{2 \cdot R}$$

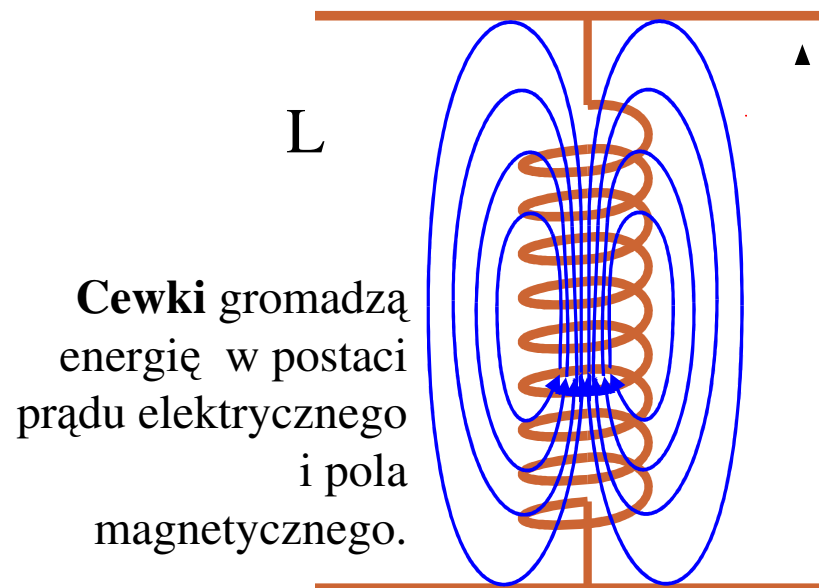
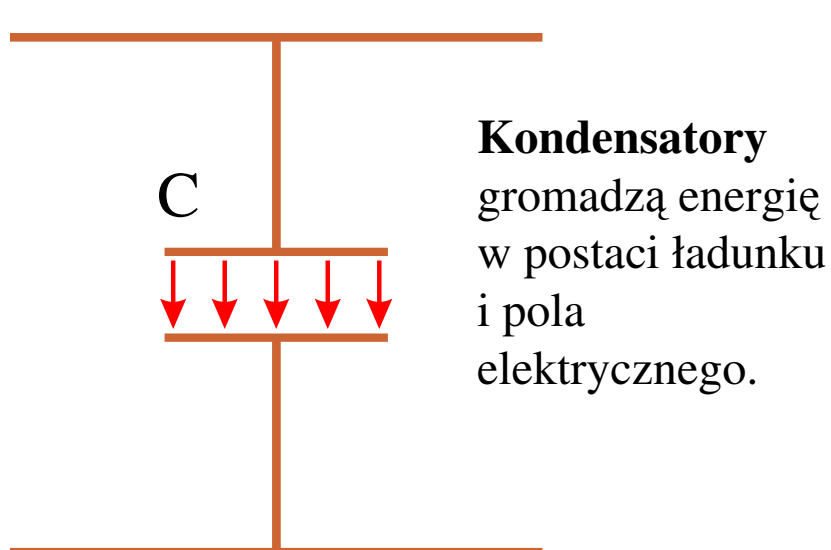
Wprowadzamy napięcie skuteczne, $U_S = \frac{U_A}{\sqrt{2}}$, takie że $P = \frac{U_S^2}{R}$.

Mierniki podają wartość skuteczną. $\sqrt{2} = 1,414$; $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$;

$$U_S = 230 \text{ V}, U_A = 325 \text{ V}$$

Kondensator i cewka

W obwodach elektrycznych występują dwa rodzaje elementów, które mogą gromadzić energię.



Indukcja elektromagnetyczna

Na podstawie prawa Ampera, przepływ prądu, I , indukuje w cewce pole:

$$B = \alpha I$$

α - współczynnik.

Prawo indukcji Faradaya:

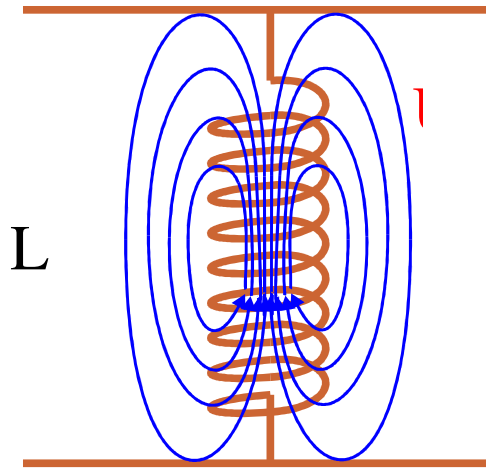
$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$\mathcal{E}$ - siła elektromotoryczna,

Φ - strumień pola magnetycznego, $\Phi = B \cdot S$.

W przypadku cewki można się spodziewać, że powstanie siła elektromotoryczna wywołana samoindukcją.

Cewka



$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi = B \cdot S$$

$$B = \alpha I$$

Można się spodziewać, że w przypadku cewki powstanie siła elektromotoryczna wywołana samoindukcją:

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt}$$

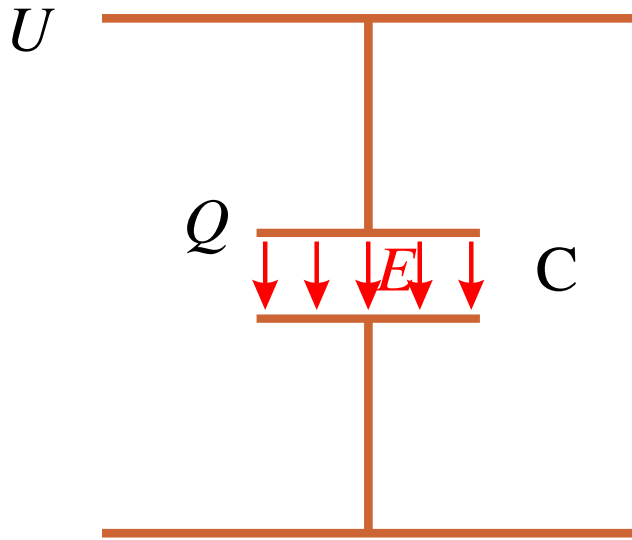
Współczynnik L nazywamy **indukcyjnością cewki**.

Indukcyjność mierzymy w henrach H, $1 \text{ H} = \text{Vs/A}$

Energia zgromadzona w cewce,
przez którą płynie prąd o natężeniu I :

$$E_L = \frac{LI^2}{2}$$

Pojemność



Pojemność kondensatora to ładunek jaki może zgromadzić przy jednostkowym napięciu.

$$C = \frac{Q}{U}$$

Jednostką pojemności jest farad, [F].
Ładunek na kondensatorze:

$$Q = C \cdot U.$$

Natężenie prądu to ładunek przepływający w jednostkowym czasie:

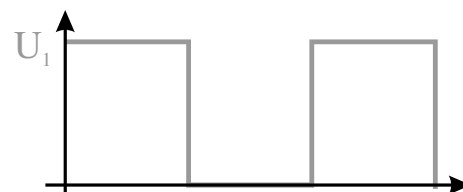
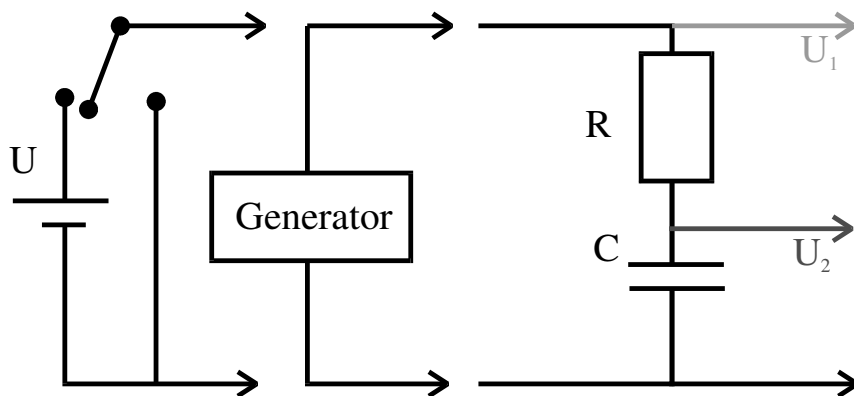
$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Prąd w obwodzie z kondensatorem będzie równy: $I = C \frac{dU}{dt}$

Napięcie na kondensatorze będzie całką z prądu dopływającego do kondensatora:

$$U(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

Ładowanie kondensatora



$$I = \frac{U_1 - U_2}{R}$$

Prąd jest równy pochodnej z napięcia na kondensatorze: $\frac{dU_2}{dt} = \frac{I}{C}$; $\frac{dU_2}{dt} = \frac{U_1}{RC} - \frac{U_2}{RC}$;
stałe zmienne

Rozładowywanie ($U_1 = 0$):

$$U(t) = U(0) \exp(-t/RC)$$

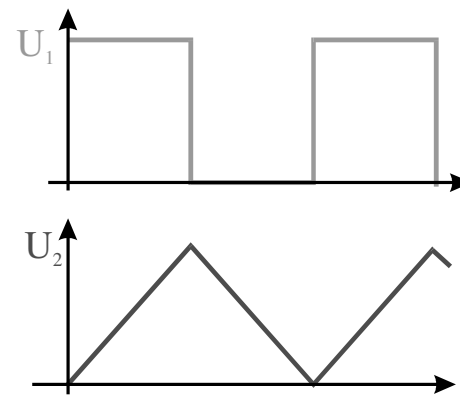
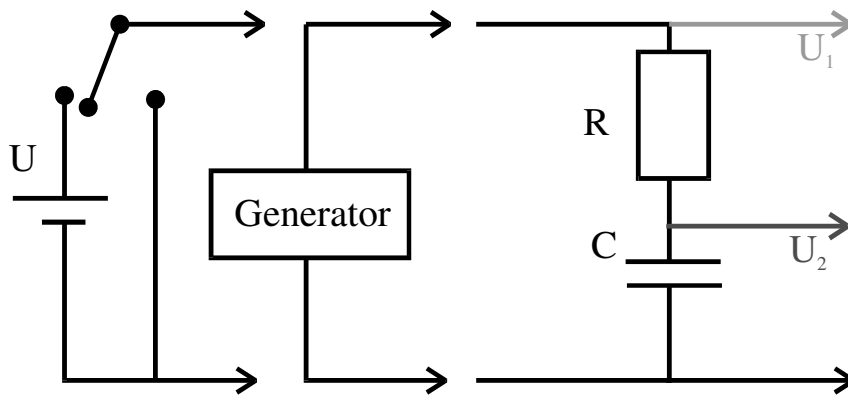
Ładowanie napięciem U_1 :

$$U(t) = U_1(1 - \exp(-t/RC))$$

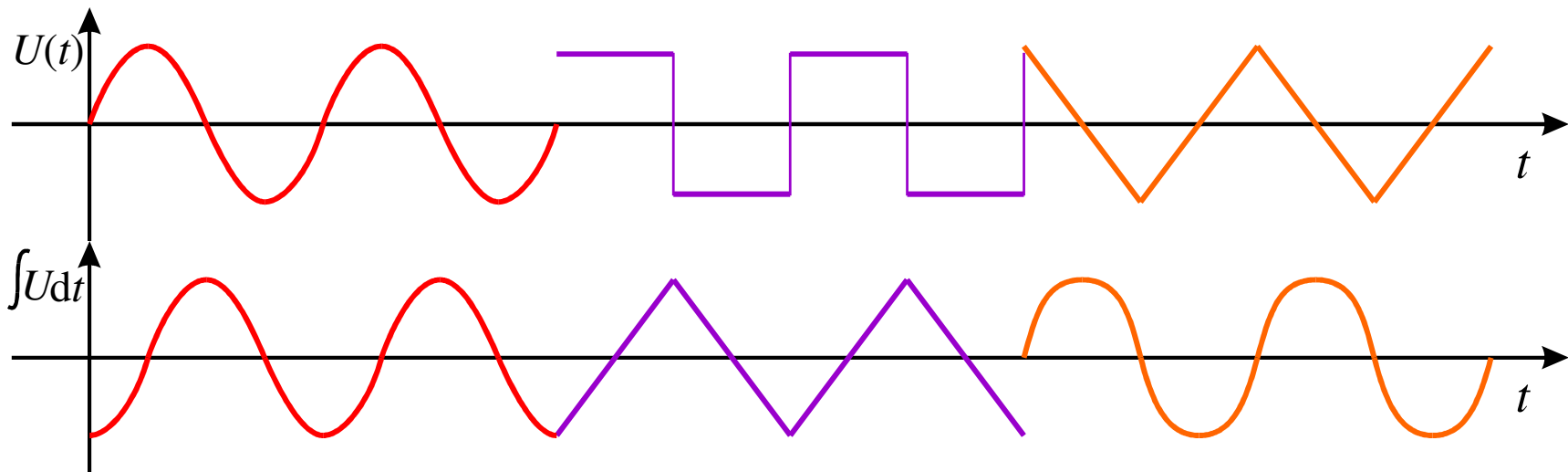
Kondensator całkuje

Napięcie na kondensatorze będzie całka z prądu dopływającego do kondensatora:

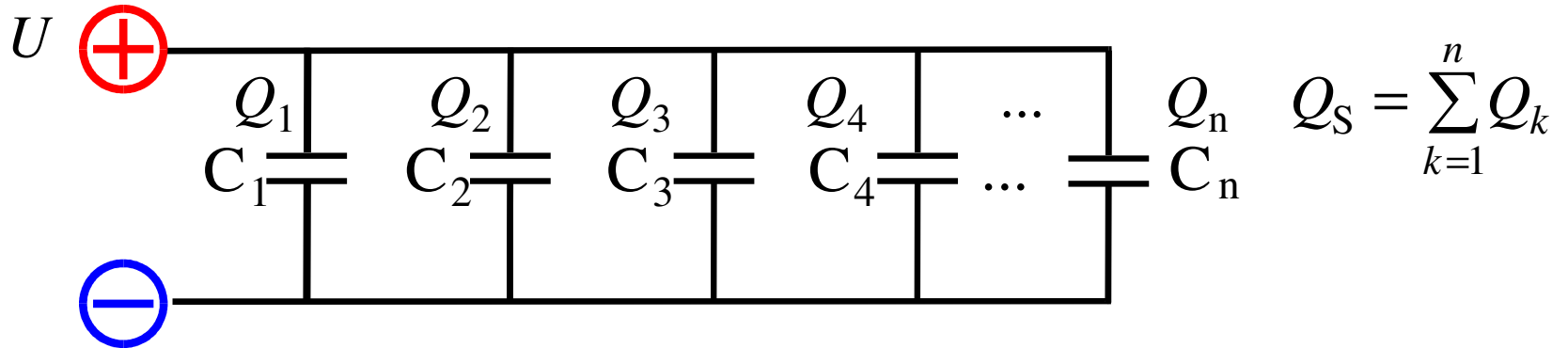
$$U(t) = C^{-1} \int I(t) dt$$



$RC \gg T$



Łączenie kondensatorów



$$U = \text{const} \quad \frac{Q_S}{U} = \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{U}$$

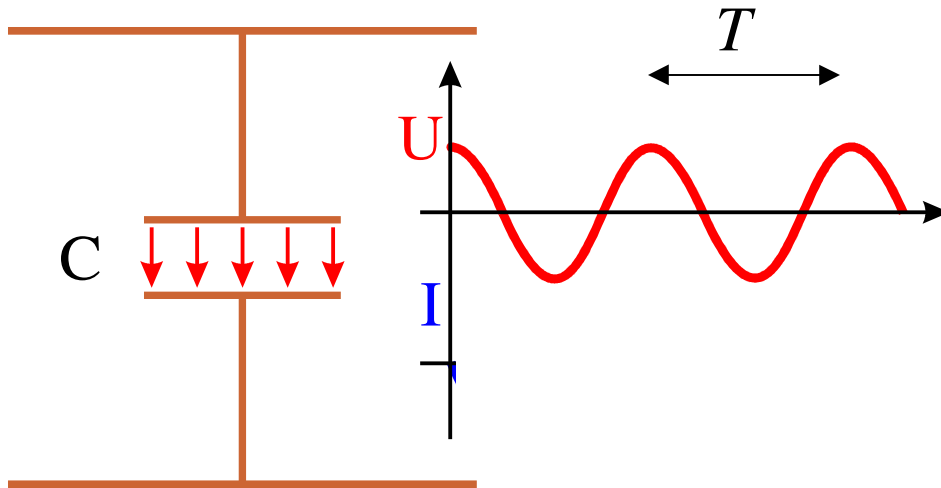
$$C_S = \sum_{k=1}^n C_k$$

Przy połączeniu równoległym, pojemności sumują się.

$$\frac{1}{C_S} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$$

Przy połączeniu szeregowym, sumują się odwrotności pojemności.

Prąd przemienny i kondensator

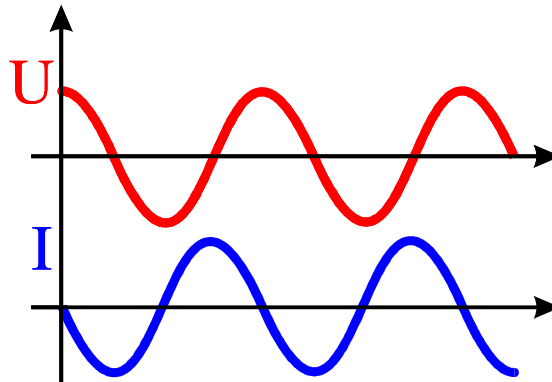
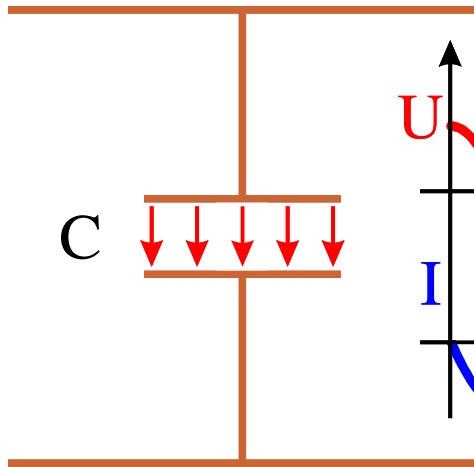


$$U = U_0 \cos(\omega t)$$

$$Q = C \cdot U \quad \Rightarrow \quad Q = U_0 C \cos(\omega t)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad I = -U_0 C \omega \sin(\omega t)$$

Prąd przemienny i kondensator



$$U = U_0 \cos(\omega t)$$

$$I = U_0 C \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$Q = C \cdot U \quad \Rightarrow \quad Q = U_0 C \cos(\omega t)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad I = -U_0 C \omega \sin(\omega t)$$

$$-\sin(\omega t) = \cos(\omega t + \pi/2) \quad \Rightarrow \quad I = U_0 C \omega \cos(\omega t + \pi/2)$$

Prąd jest przesunięty w fazie (przyspieszony) o $\frac{\pi}{2}$ ($= 90^\circ$) względem napięcia.

Liczby zespolone

$$z = x + iy$$

$$x + iy = Ae^{i\alpha}$$

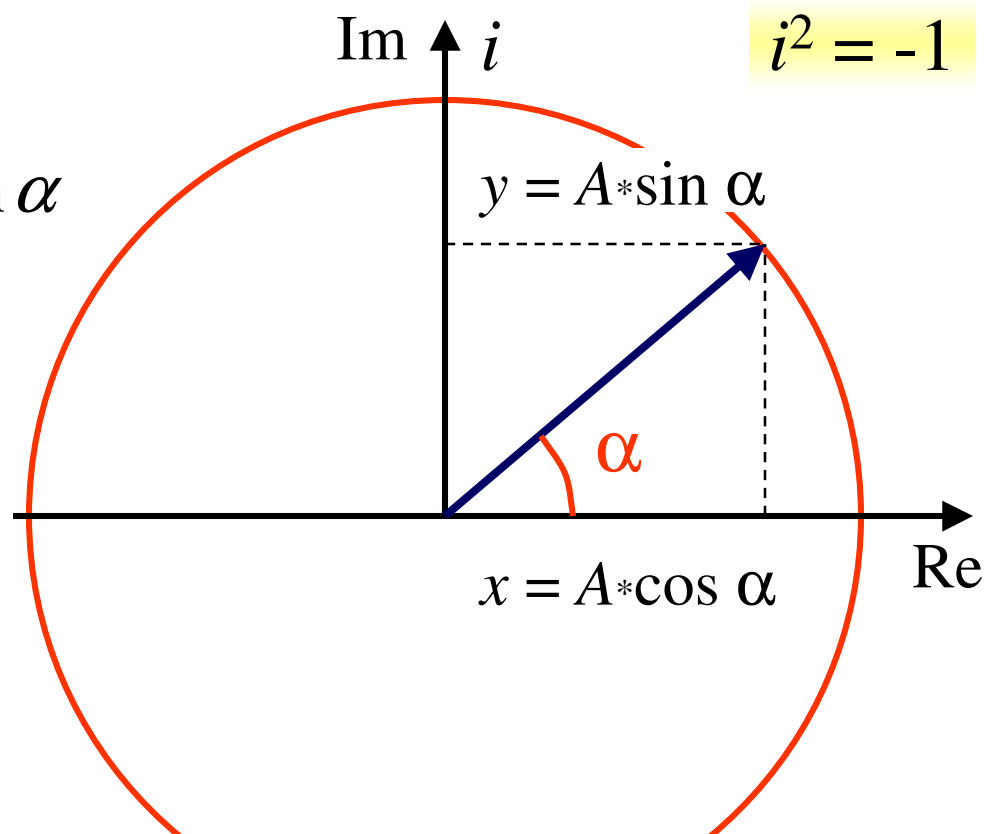
$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$|z| = A = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = \arctg(y/x)$$

$$x = \operatorname{Re}(z) = A \cos \alpha$$

$$y = \operatorname{Im}(z) = A \sin \alpha$$



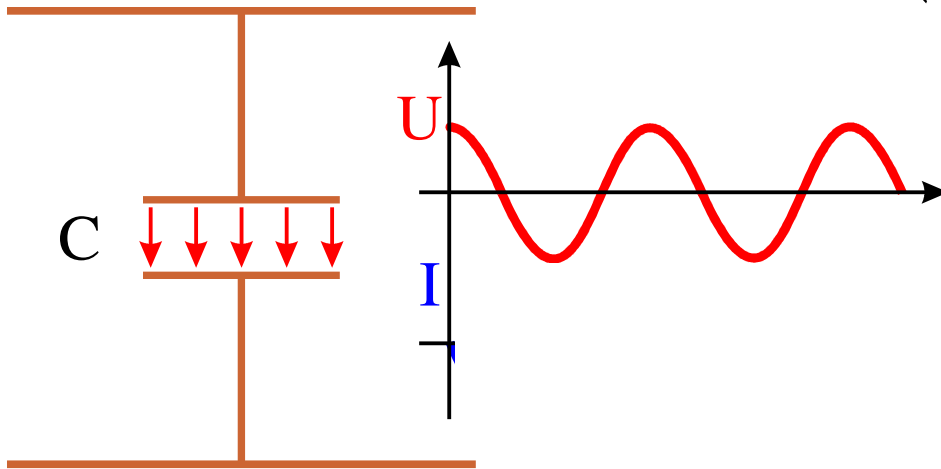
$$w = a - ib \quad |w| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$w = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \quad |w| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\varphi = -\arctg(b/a)$$

Prąd przemienny i liczby zespolone

$$\cos(\omega t) = \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) \quad \sin(\omega t) = \operatorname{Im}(e^{i\omega t})$$



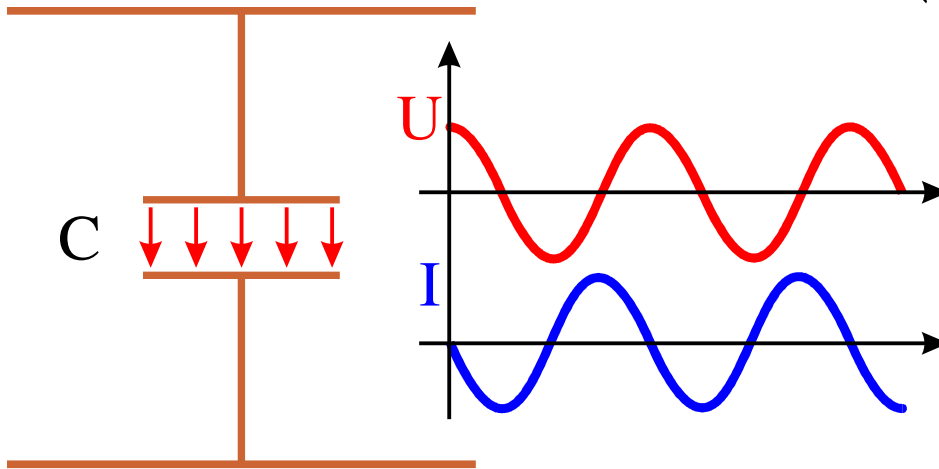
$$U = U_0 e^{i\omega t}$$

$$Q = C * U \quad \Rightarrow \quad Q = U_0 C e^{i\omega t}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad I = U_0 C i \omega e^{i\omega t}$$

Prąd przemienny i liczby zespolone

$$\cos(\omega t) = \operatorname{Re}(e^{i\omega t})$$



$$U = U_0 e^{i\omega t}$$

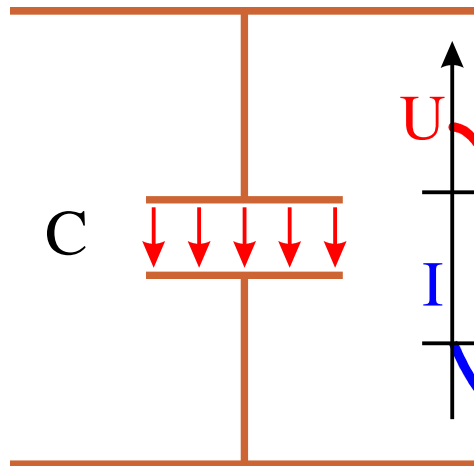
$$I = U_0 i \omega C e^{i\omega t}$$

$$Q = C * U \quad \Rightarrow \quad Q = U_0 C e^{i\omega t}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad I = U_0 C i \omega e^{i\omega t}$$

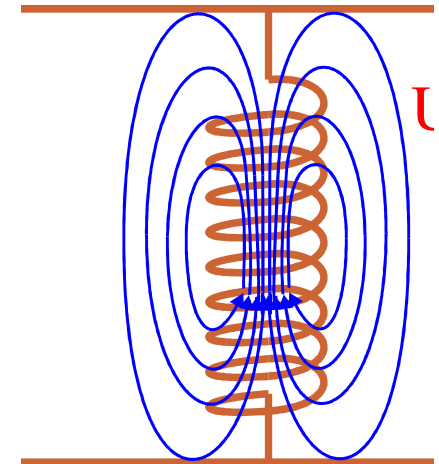
$$R = \frac{U}{I}$$

Impedancja



$$U = U_0 e^{i\omega t}$$

$$I = i\omega C \cdot U_0 e^{i\omega t}$$



Prawo Ohma:

Napięcie jest proporcjonalne do natężenia : $U = Z \cdot I$

Impedancja kondensatora:

$$Z = \frac{1}{i\omega C}$$

$$Z = i\omega L$$

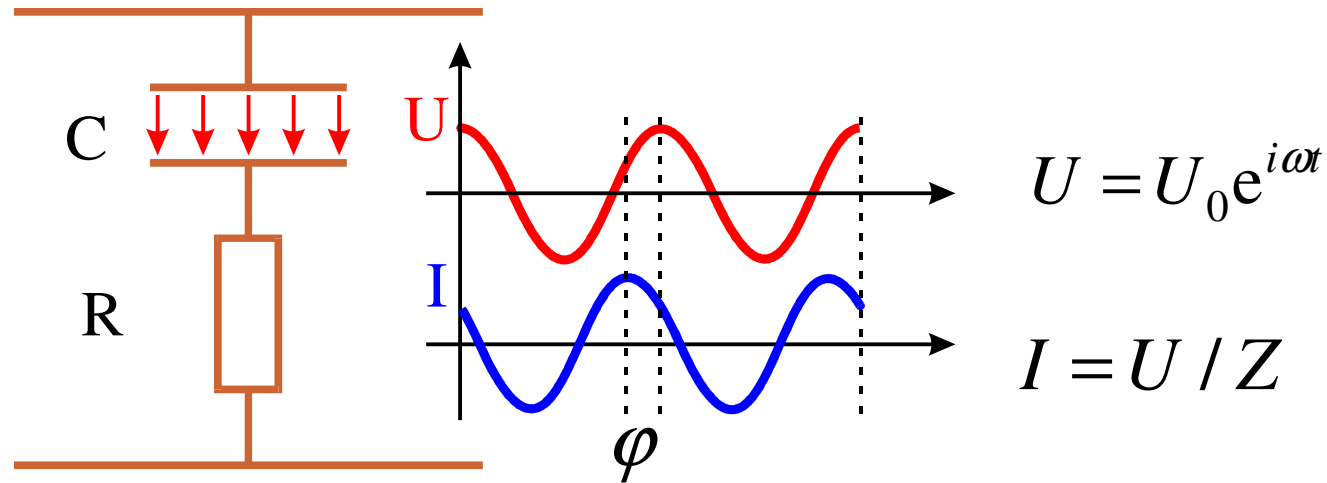
Zawada czyli wartość bezwzględna impedancji:

$$|Z| = \frac{1}{\omega C}$$

$$|Z| = \omega L$$

Przesunięcie fazowe w obwodzie RC

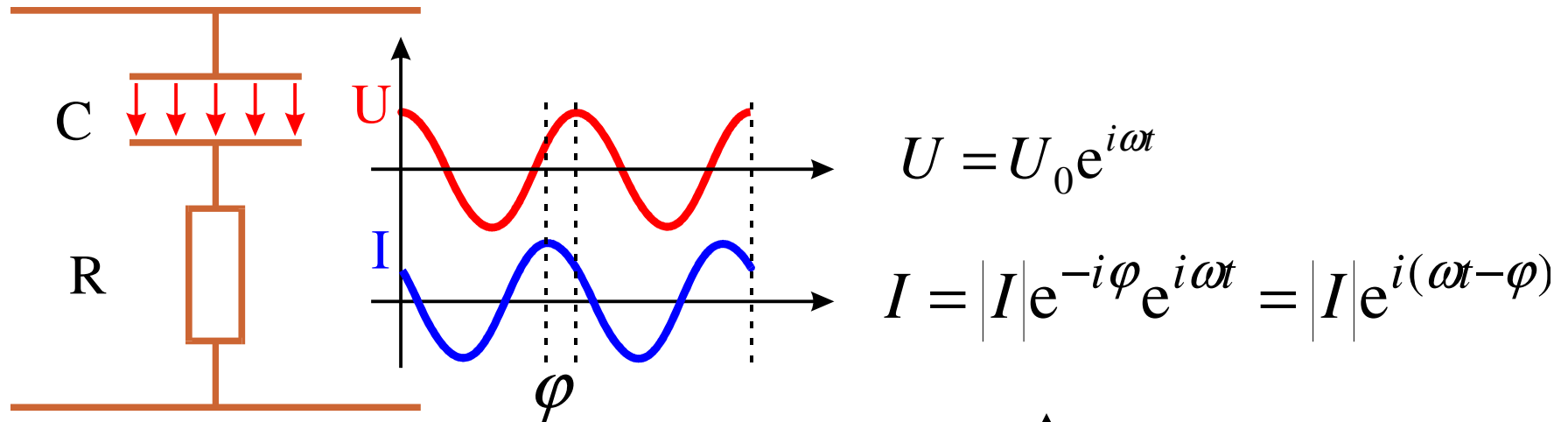
Impedancja opornika wynosi R .



Impedancja:
$$Z = \frac{1}{i\omega C} + R$$

Przesunięcie fazowe w obwodzie RC

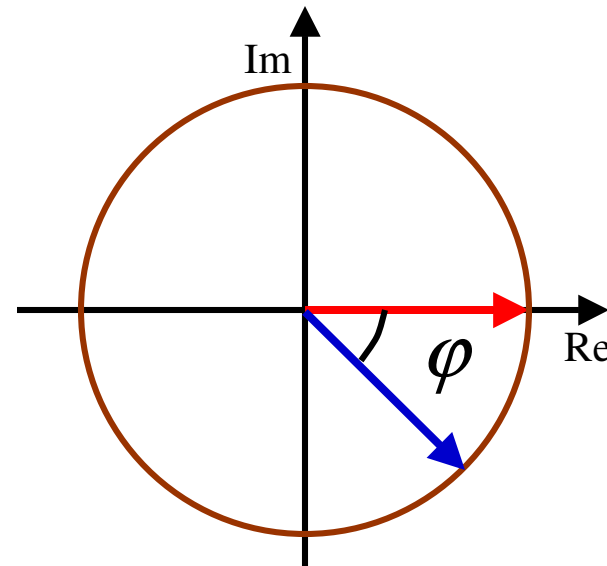
Impedancja opornika wynosi R .



Impedancja: $Z = \frac{1}{i\omega C} + R = |Z| e^{i\varphi}$

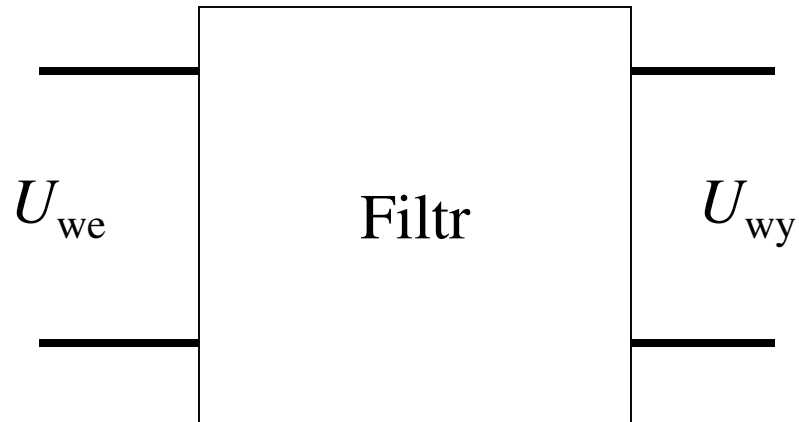
Zawada: $|Z| = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2} + R^2}$

Faza: $\operatorname{tg}(\varphi) = -\frac{1}{\omega CR}$



Napięcie spóźnia się względem natężenia.

Filtry



Charakterystyki

Napięciowa: **transmitancja** filtru to stosunek amplitud napięcia na wyjściu i wejściu.

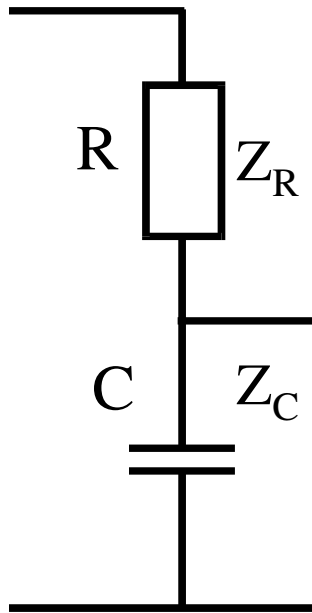
$$T(\omega) = \frac{|U_{wy}|}{|U_{we}|}$$

Fazowa: przesunięcie fazy napięcia na wyjściu.

$$\varphi(\omega)$$

Obwód RC jako filtr

Elementy R i C tworzą dzielnik napięcia:

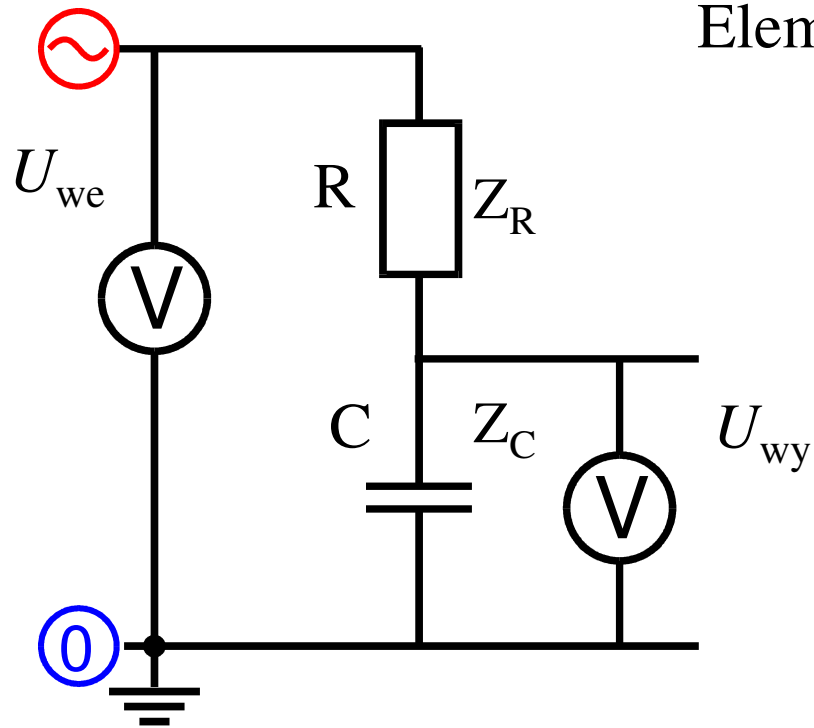


$$U_{wy} = U_{we} \frac{Z_C}{Z_S}$$

$$Z_R = R \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

$$Z_S = \frac{1}{i\omega C} + R$$

Obwód RC jako filtr



Elementy R i C tworzą dzielnik napięcia:

$$U_{wy} = U_{we} \frac{Z_C}{Z_S}$$

$$Z_R = R \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

$$Z_S = \frac{1}{i\omega C} + R$$

$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

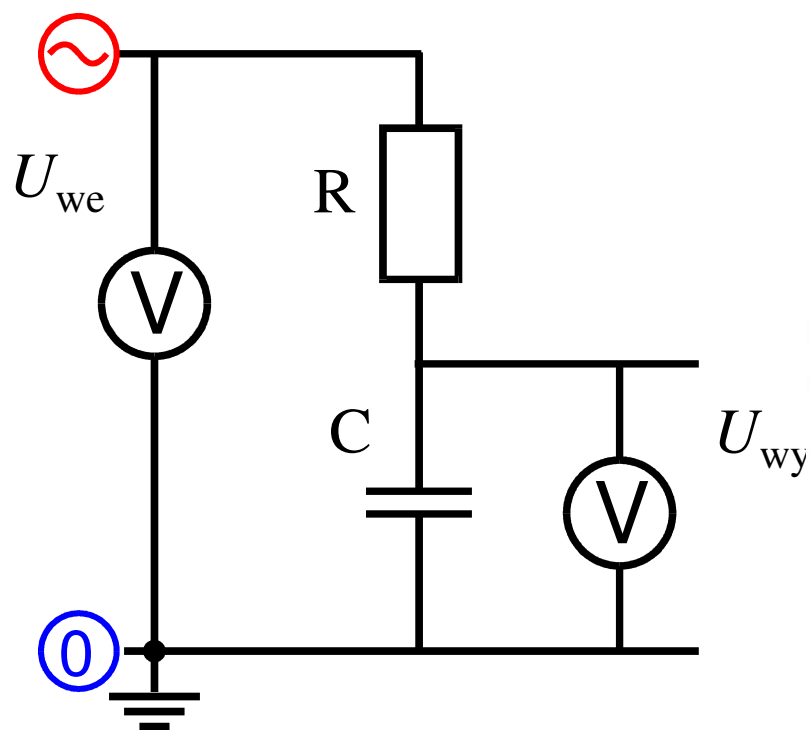
Transmitancja:

$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Faza:

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega CR)$$

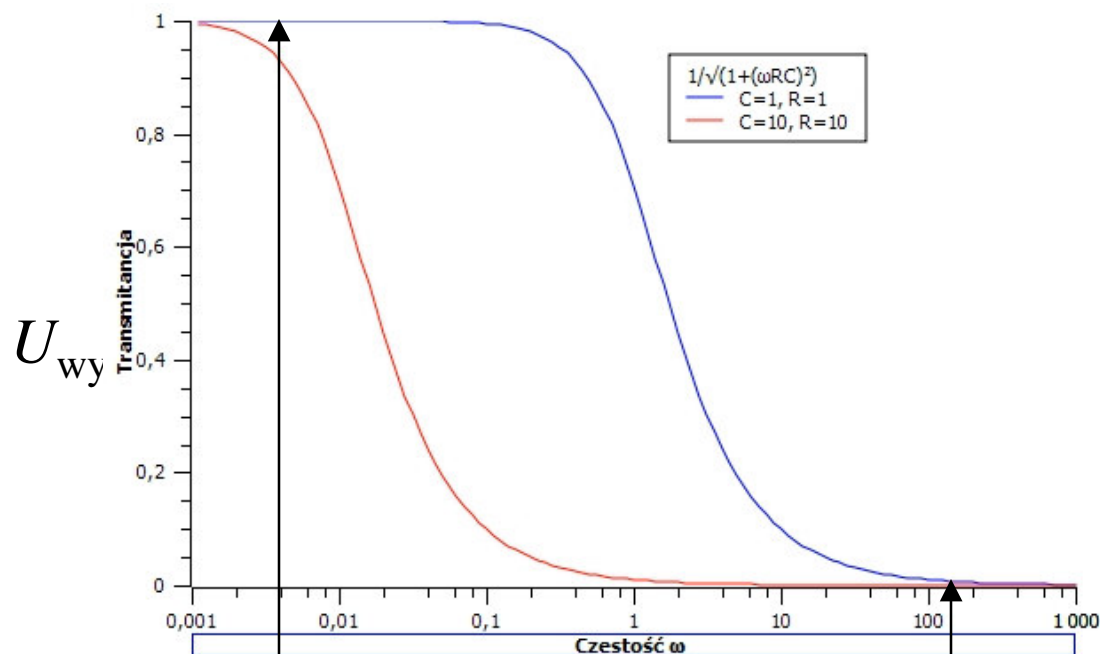
Obwód RC jako filtr dolnoprzepustowy



$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega CR)$$

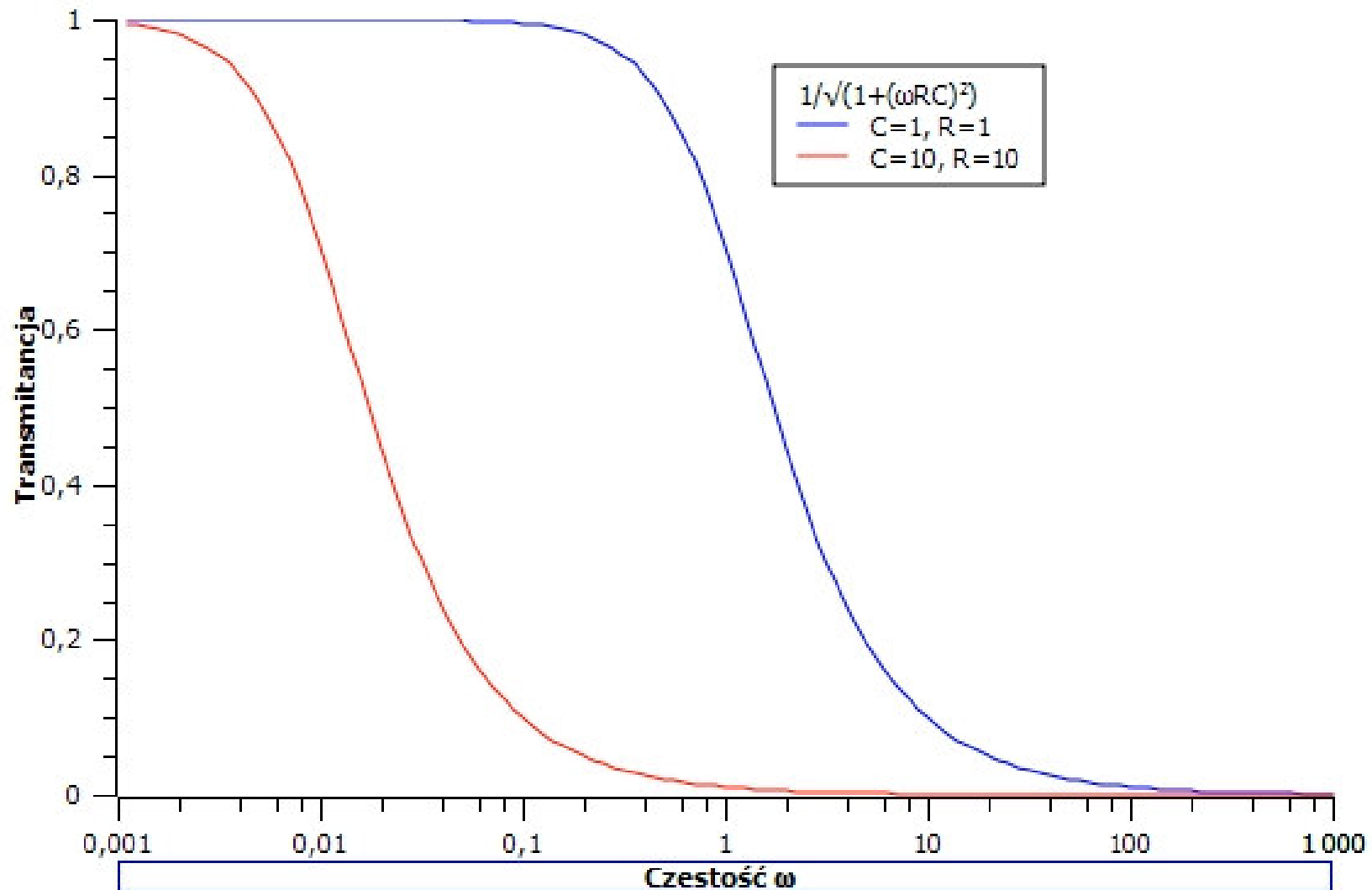
$$\tau = RC$$



Transmitancja = 1,
te częstotliwości są
przepuszczane.

Transmitancja = 0,
te częstotliwości są
zatrzymywane.

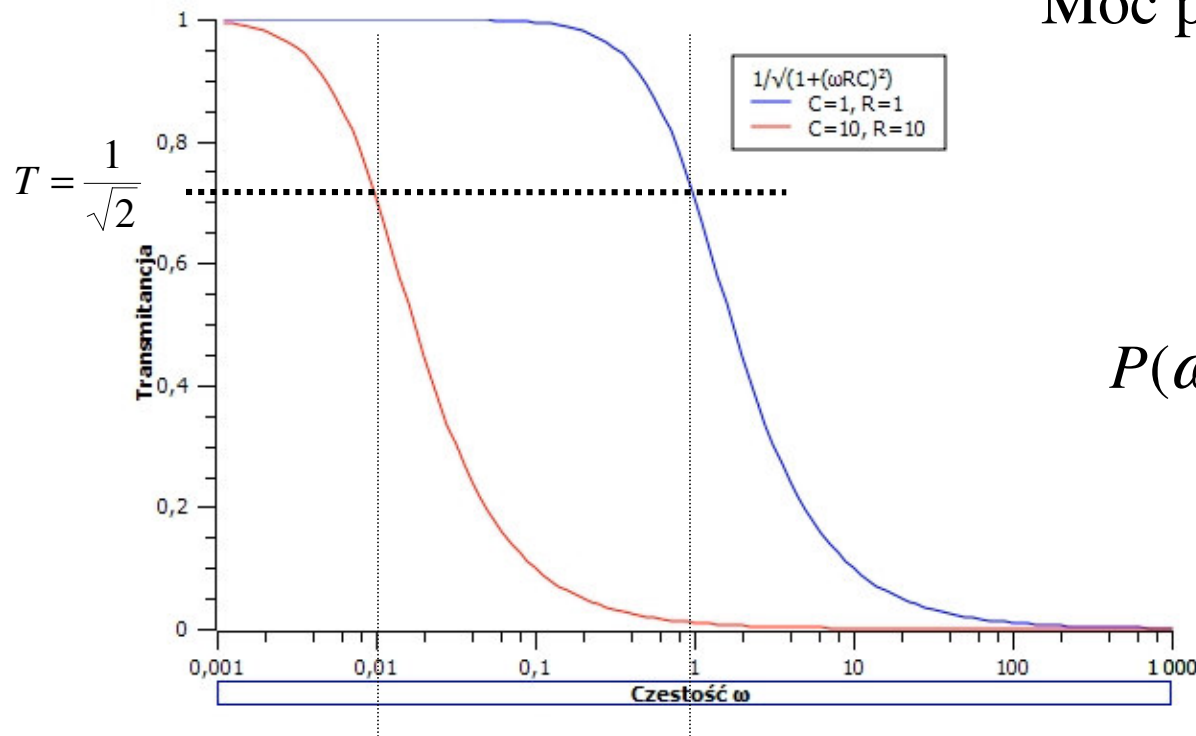
Widmo filtru dolnoprzepustowego



Na osi poziomej widma narysowano częstość w skali logarytmicznej.

Częstość graniczna

Moc przepuszczana przez filtr:



$$P = \frac{U_{wyj}^2}{2R_{Zewn}}$$

$$P(\omega) = \frac{U_{wej}^2}{2R_{Zewn} (1 + \omega^2 R^2 C^2)}$$

Częstość graniczna, ω_G , to taka, dla której przepuszczana jest połowa mocy.

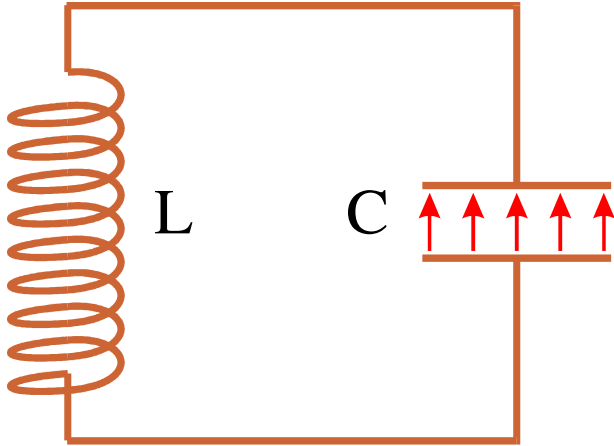
$$U(\omega_G) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dla filtra RC, dolnoprzepustowego, oznacza to $\omega RC = 1$:

$$\omega_G = 1/RC,$$

$$f_G = \frac{1}{2\pi RC}$$

Obwód LC, impedancja



$$Z_S = Z_L + Z_C$$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{-i}{\omega C}$$

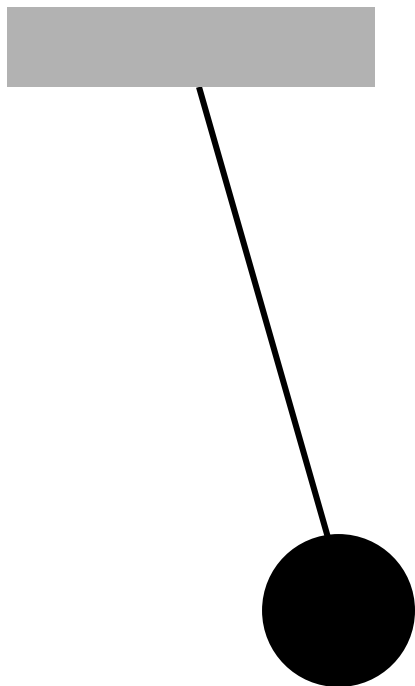
$$Z_L = i\omega L$$

$$Z_S(\omega) = i \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}$$

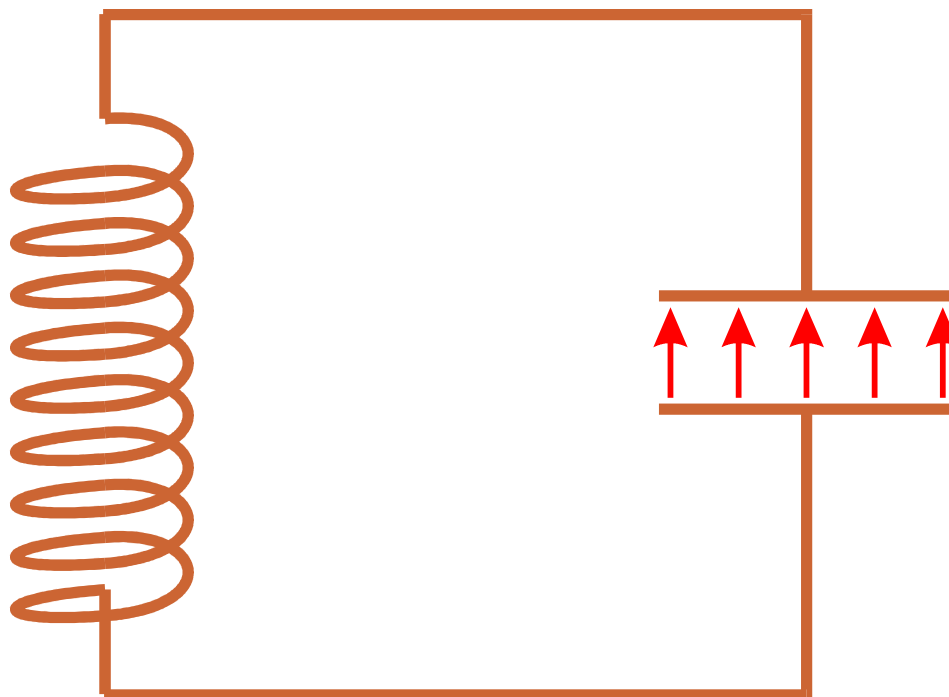
Gdy $\omega^2 = 1/LC$, to $Z_S = 0$.

Zerowy opór sugeruje, że prąd może płynąć bez napięcia.

Obwód drgający, LC

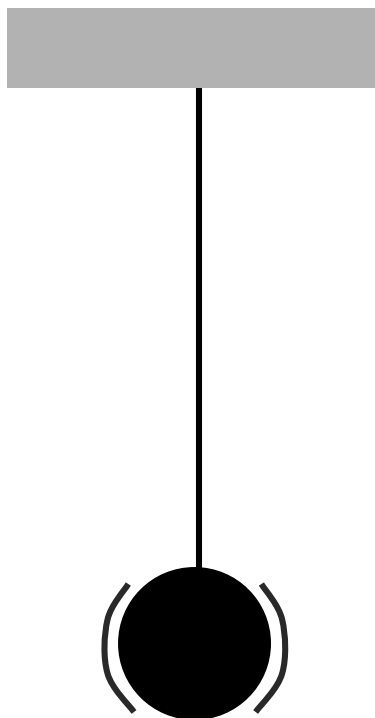


$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

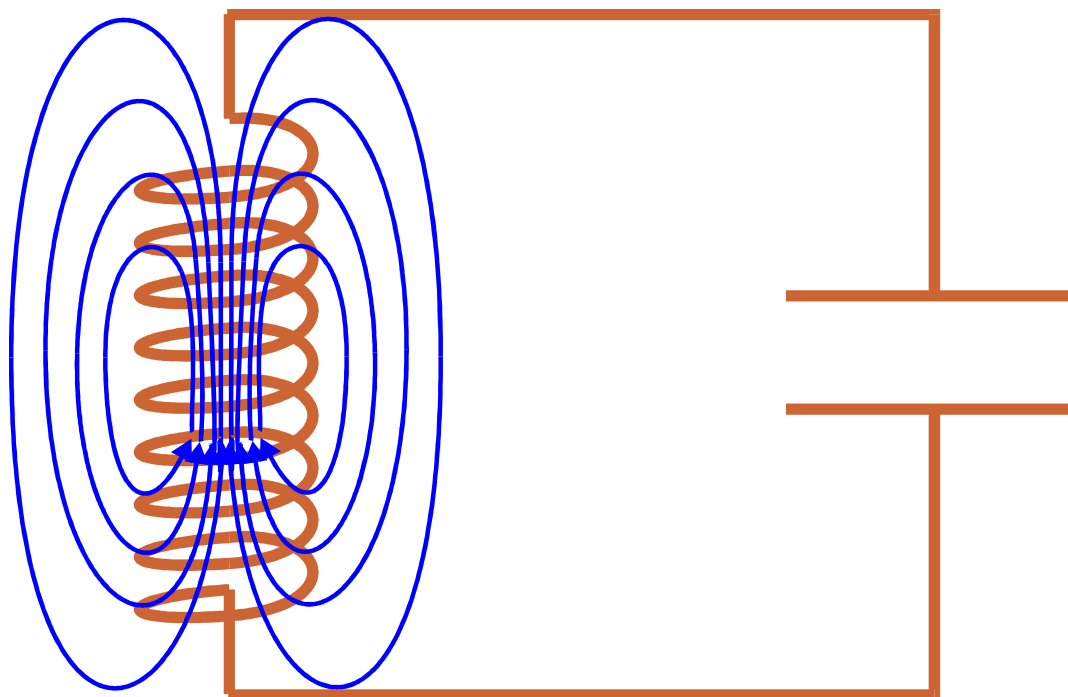


$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Obwód drgający, LC

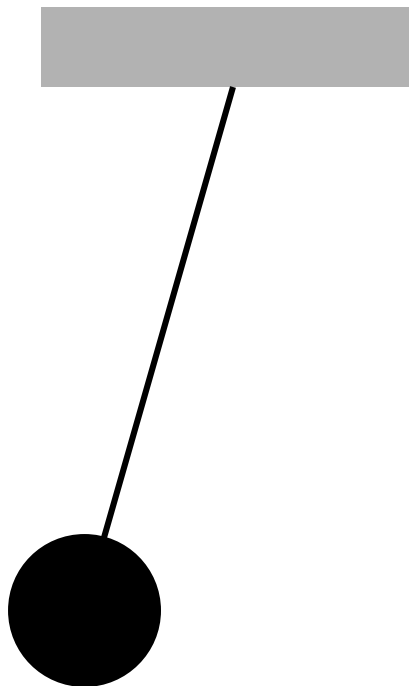


$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

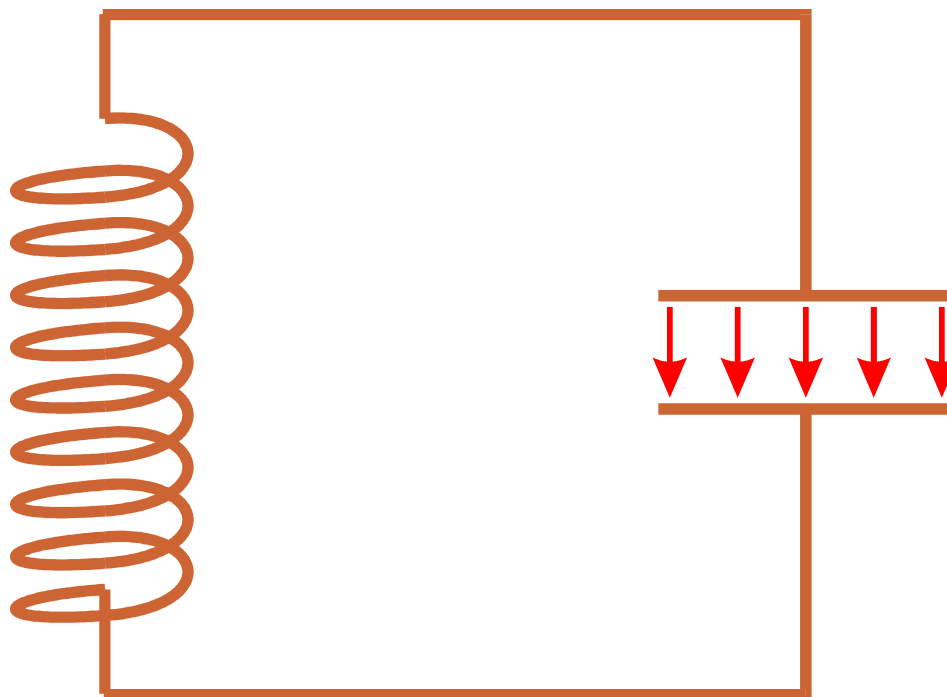


$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Obwód drgający, LC

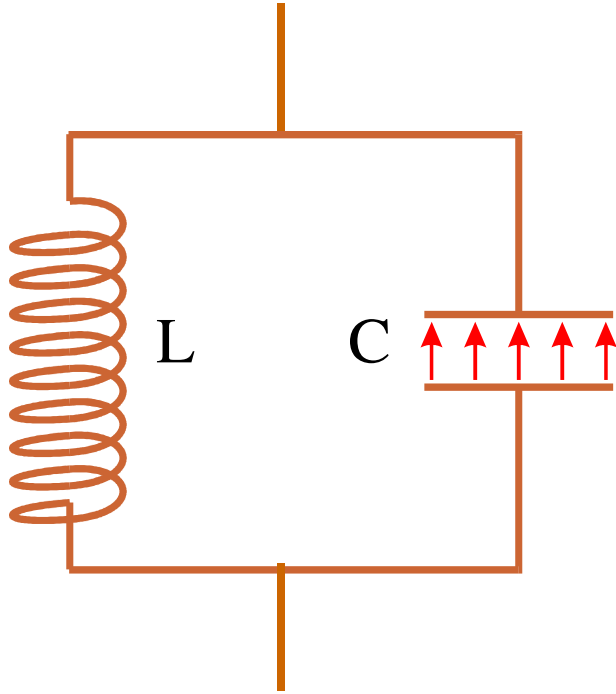


$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$



$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Obwód LC, oscylator



Kondensator $I = C \frac{dU}{dt}$

Cewka: $U = -\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = -\frac{1}{LC} U$$

Otrzymujemy zatem równanie oscylatora harmonicznego o częstotliwości rezonansowej:

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

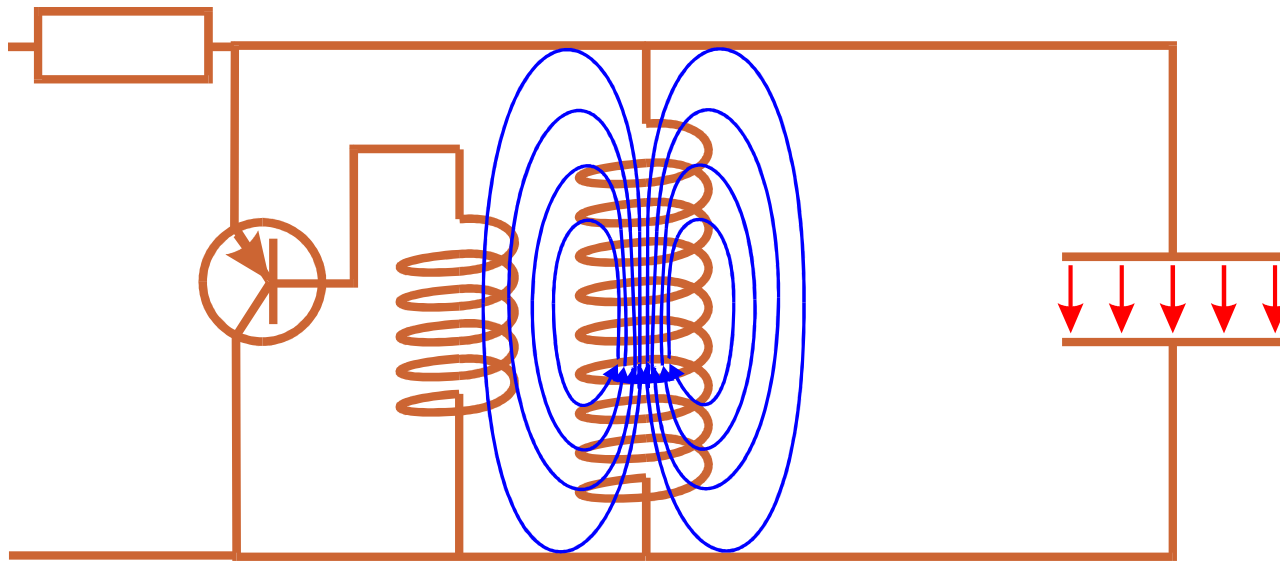
L: $H = Vs/A$

C: $F = C/V = As/V$

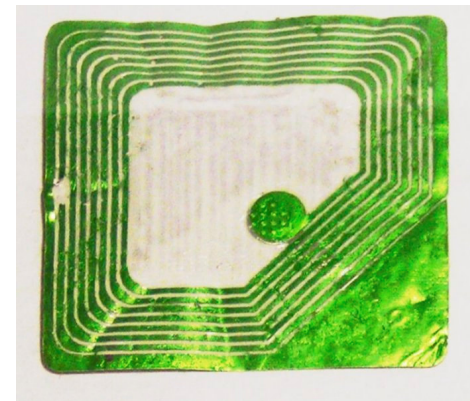
LC: $Vs/A * As/V = s^2$



Zastosowanie obwodów LC

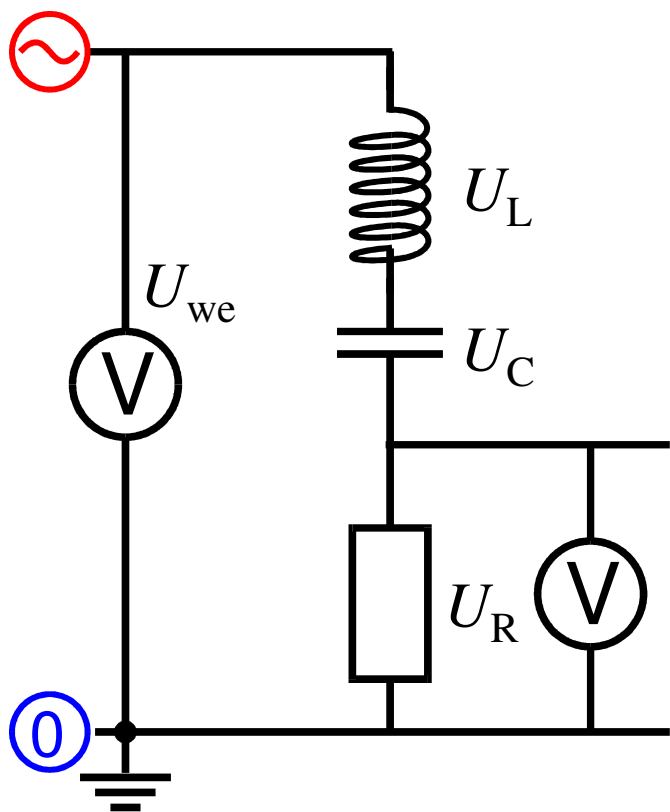


Nadajnik fal elektromagnetycznych



Znacznik w sklepie

Obwód RLC - różniczkowo



II prawo Kirchhoffa :

$$U_{we}(t) = U_L(t) + U_C(t) + U_R(t)$$

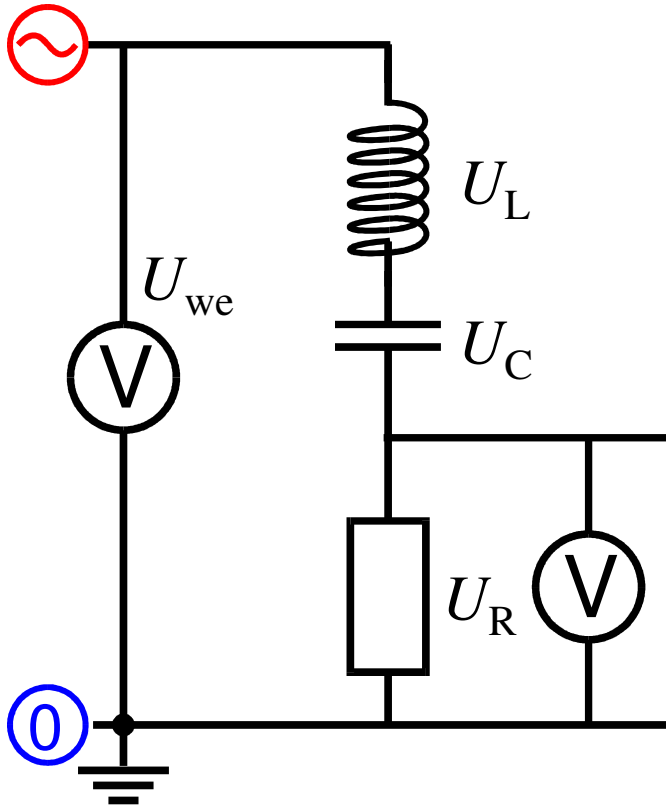
$$U_{we}(t) = L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int I(t) dt + RI(t)$$

$$U_R(t) = RI(t)$$

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R}$$

$$U_{we}(t) = \frac{L}{R} \frac{dU_R(t)}{dt} + \frac{\int U_R(t) dt}{RC} + U_R(t)$$

Obwód RLC - impedancja



II prawo Kirchhoffa :

$$U_{we} = U_L + U_C + U_R$$

$$U_{we} = Z_L I + Z_C I + R I$$

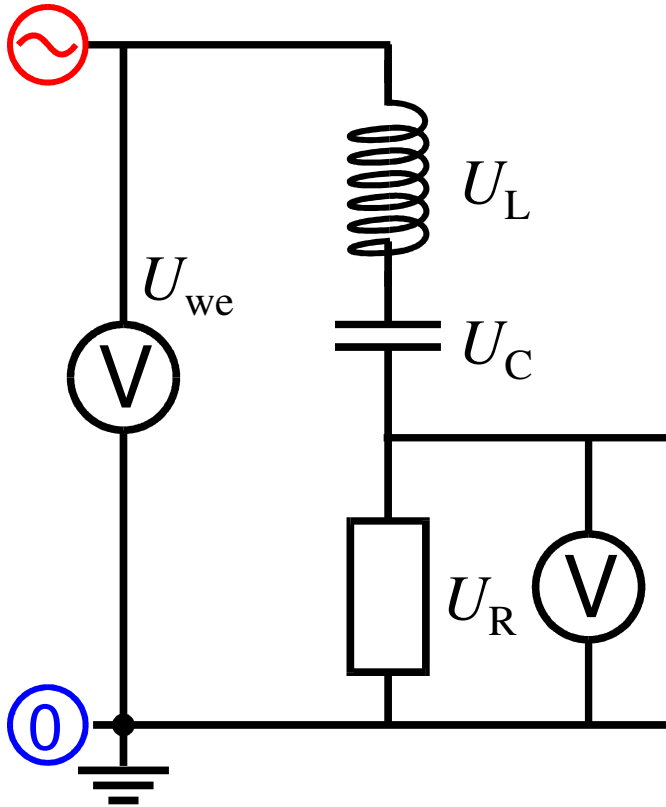
$$I = U_R / R$$

$$U_{we} = U_0 e^{i\omega t} \quad U_R = U_{R0} e^{i\omega t}$$

$$U_0 = \frac{i\omega L U_{R0}}{R} + \frac{U_{R0}}{i\omega R C} + U_{R0}$$

$$U_{R0} = \frac{U_0}{1 + \frac{i\omega L}{R} + \frac{1}{i\omega R C}}$$

Obwód RLC - napięcia



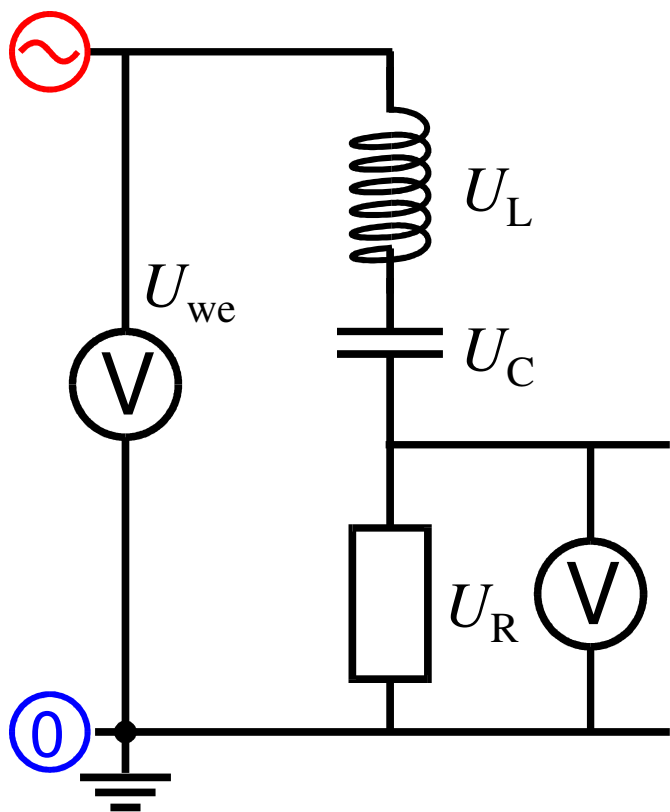
$$U_{we} = U_0 e^{i\omega t}$$

$$U_R(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t} \cdot i\omega CR}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$U_L(t) = \frac{-U_0 e^{i\omega t} \cdot \omega^2 LC}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

$$U_C(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

Obwód RLC - rezonans



$$U_{we} = U_0 e^{i\omega t}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$U_R(t) = U_0 e^{i\omega t} = U_{we}(t)$$

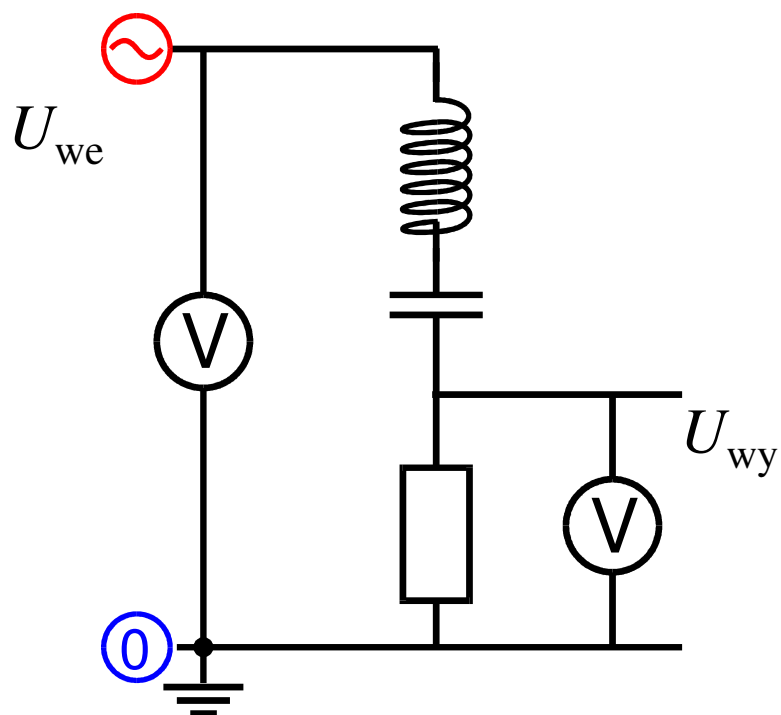
Na wyjściu to samo co na wejściu!

$$U_L(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t} \cdot i\omega L}{R} = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

$$U_C(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{i\omega CR} = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} = -U_L$$

Dla częstości rezonansowej, napięcie zabrane przez kondensator jest oddawane przez cewkę (i na odwrót).

Obwód RLC jako filtr



$$U_{wy}(t) = \frac{U_{we}(t) \cdot i\omega CR}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{i\omega CR}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

$$T(\omega) = \frac{\omega CR}{\sqrt{(\omega CR)^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}}$$

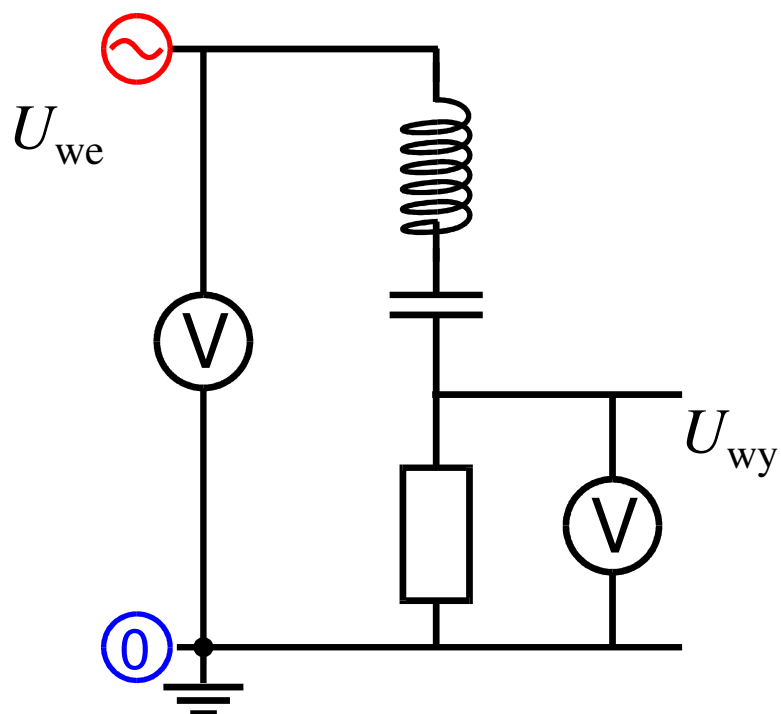
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$T(0) = 0$$

$$T(\omega_0) = 1 \quad \text{filtr środkowo-przepustowy}$$

$$T(\infty) = 0$$

Filtr RLC



$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{i\omega CR}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

$$T(\omega) = \frac{\omega CR}{\sqrt{(\omega CR)^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}}$$

