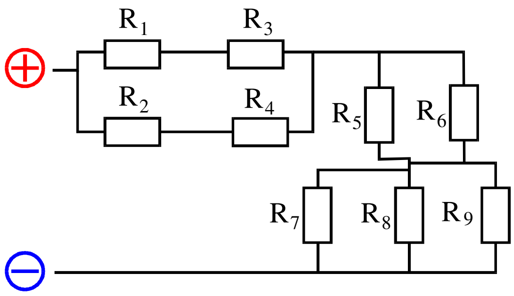
Wykład 1

Podstawy obwodów elektrycznych, elementy bierne

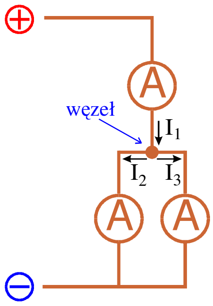
5 marca 2020

Obwody prądu stałego



Zasada zachowania ładunku a przepływ prądu

Ładunek nie znika, ani nie powstaje, zatem ładunek, który dopłynął do węzła, musi z niego wypłynąć.



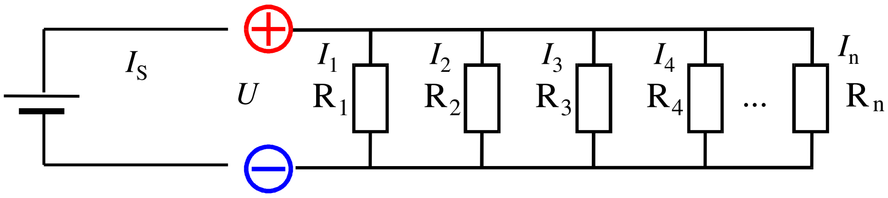
I prawo Kirchhoffa:

Suma natężeń prądów dopływających i odpływających z węzła wynosi zero.

$$\Sigma_j I_j = 0$$

Prądy dopływające traktujemy jako dodatnie, odpływające jako ujemne.

Równoległe łączenie oporników



$$I_S = \sum_{k=1}^{n} I_k$$

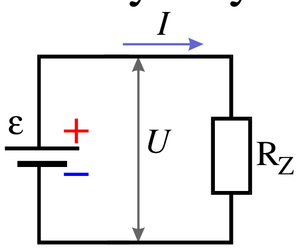
$U = \text{const}$

$$\frac{I_S}{U} = \sum_{k=1}^{n} \frac{I_k}{U}$$

$$\frac{1}{R_S} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$

Przy połączeniu równoległym, sumują się przewodnictwa, 1/R.

Obwód elektryczny z zasilaniem



Zewnętrzne napięcie elektryczne, *U*:
spadek potencjału na części obwodu elektrycznego nie zawierającej źródeł prądu.

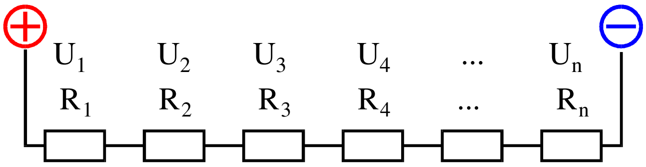
Siła elektromotoryczna, *ε*:
energia elektryczna uzyskana przez jednostkowy ładunek na odcinku obwodu zawierającym źródło prądu, a nie zawierającym rezystancji.

Zasada zachowania energii a rozkład napięć

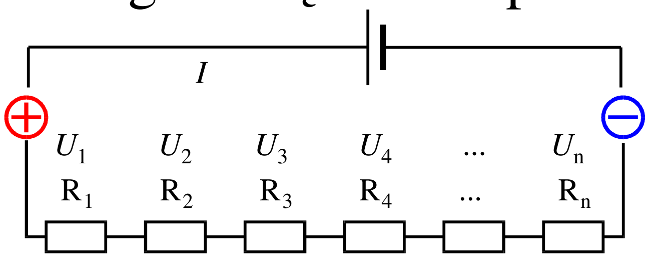
Energia ładunku w polu zależy od potencjału w danym miejscu, a nie od drogi jaką przebył.

II prawo Kirchhoffa:
Suma napięć na oporach w obwodzie zamkniętym jest równa sumie sił elektromotorycznych.

$$\Sigma_j\, U_j = \Sigma_k\, \varepsilon_k$$



Szeregowe łączenie oporników



$$U_S = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

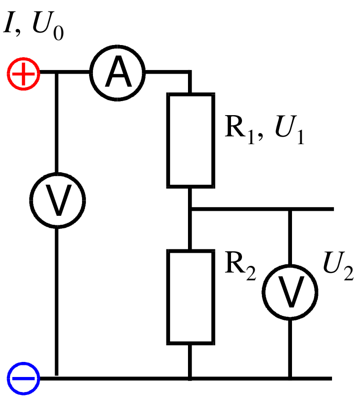
I = const

$$\frac{U_S}{I} = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{I}$$

$$R_S = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

Przy połączeniu szeregowym, opory sumują się.

Przykłady obwodów - dzielnik napięcia



Całkowity opór obwodu

$R_S = R_1 + R_2$

Natężenie prądu płynącego przez obwód:

$I = U_0/(R_1 + R_2)$

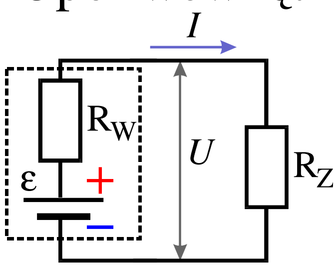
Zakładamy, że do wyjścia nie płynie prąd.

Napięcie na wyjściu wynosi:

$U_2 = R_2 * I$

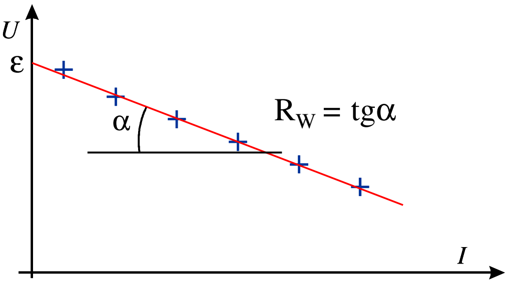
$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0$$

Opór wewnętrzny



Rzeczywiste źródła napięcia musimy przedstawić w postaci obwodu zastępczego złożonego z idealnego źródła o sile elektromotorycznej ε i z oporu wewnętrznego R_W. Napięcie na zewnątrz takiego źródła będzie wynosiło:

$U = \varepsilon - R_W I$

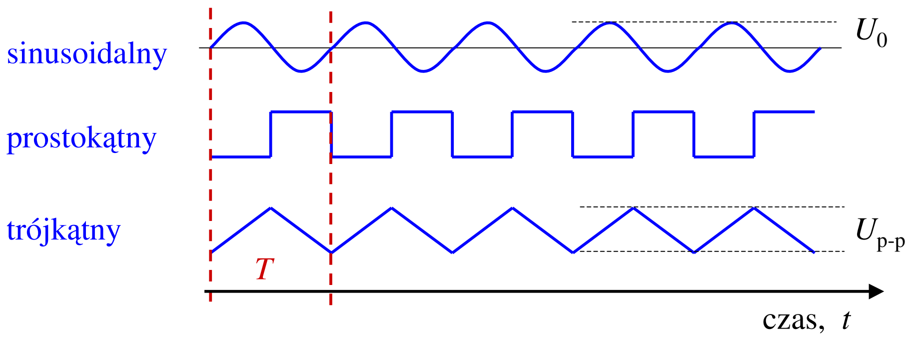


Obwody prądu zmiennego

Prąd zmienny jest najważniejsza formą zastosowań elektryczności. Dzięki niemu funkcjonuje większość urządzeń w naszych domach.

Temat jest dość trudny i do pełnego zrozumienia wymaga znajomości trygonometrii, rachunku różniczkowego i liczb zespolonych. Na tym kursie zajmiemy się jedynie najprostszymi przykładami z tej tematyki takimi jak: obwód RC i RLC czy filtry.

Przebiegi zmiennoprądowe



T - okres zmienności

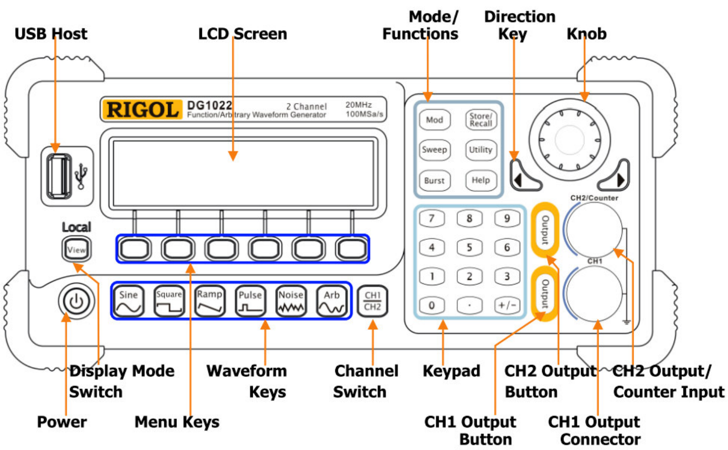
$f = \dfrac{1}{T}$ - częstość

U_0 - amplituda napięcia

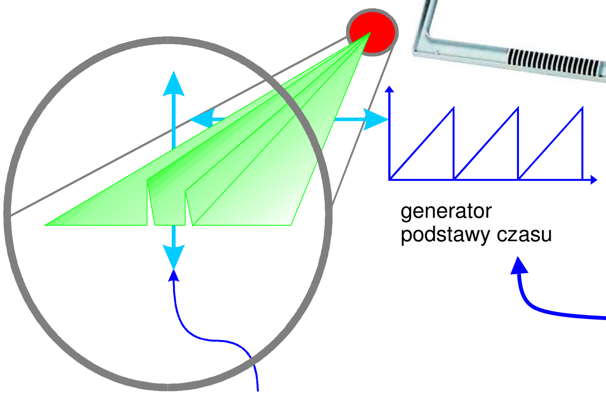
$U_{p\text{-}p}$ - napięcie międzyszczytowe "peak to peak", dla przebiegów symetrycznych $U_{p\text{-}p} = 2*U_0$

Generator funkcyjny Rigol DG1000

na stronie PE jest duża angielska wersja instrukcji:
http://pe.fuw.edu.pl/pliki/DG1000_UserGuide.pdf



Oscyloskop

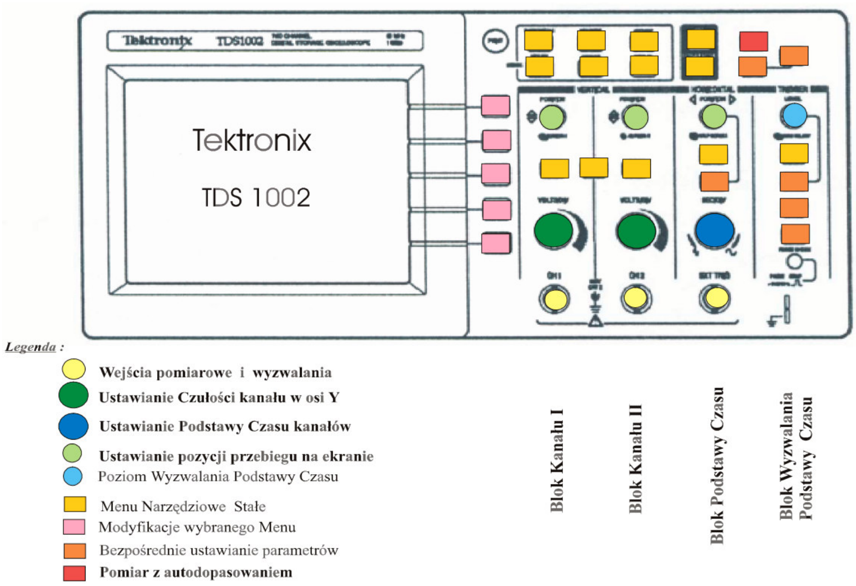


Warunkiem udanego pomiaru jest dobre ustawienie wyzwalania. Podstawa czasu jest wyzwalana, gdy sygnał osiągnie zadany poziom.

Na ekranie oscyloskopu oś pozioma staje się osią czasu.

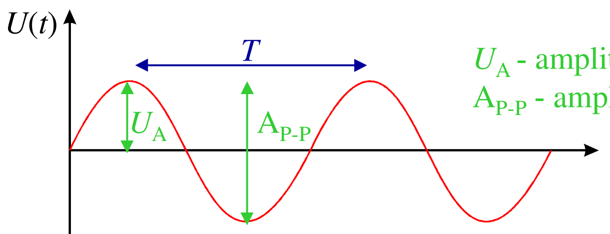
Na stronie PE dostępna jest skrócona instrukcja obsługi TDS 1002:

http://pe.fuw.edu.pl/pliki/Tektronix TDS210.pdf



Prąd przemienny

$$U = U_A \sin(\omega \cdot t)$$



U_A - amplituda,
A_{P-P} - amplituda peak-to-peak.

Okres, T, podajemy w sekundach.
Częstość, $f = 1/T$, podajemy w hercach, 1 Hz = 1/s.

Częstość (kołową): $\omega = \frac{2\pi}{T}$, podajemy w s^{-1} = 1/s.

$$\omega = 2\pi f$$

f = 50 Hz, ω =314 s^{-1} (pulsacja)

Moc prądu

Moc prądu:

P = I∗U.

Prawo Ohma:

I = U/R.

Możemy otrzymać inne wyrażenia na moc prądu:

$$P = U^2/\mathrm{R} = I^2\mathrm{R}.$$

W przypadku prądu przemiennego:

$$P = U_A{}^2\langle\sin^2(\omega t)\rangle_T/\mathrm{R}.$$

$$\langle\sin^2(\omega t)\rangle_T = 1/2$$

$$P = \frac{U_A^2}{2\cdot \mathrm{R}}$$

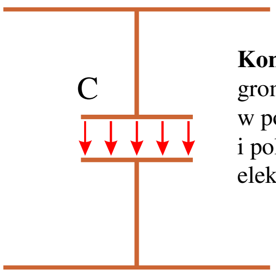
Wprowadzamy napięcie skuteczne, $U_S = \dfrac{U_A}{\sqrt{2}}$, takie że $P = \dfrac{U_S^2}{\mathrm{R}}$.

Mierniki podają wartość skuteczną. $\sqrt{2} = 1{,}414$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$;

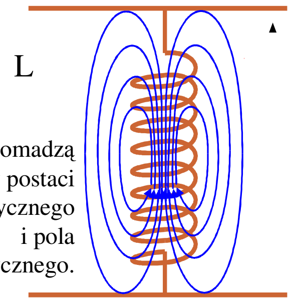
U_S = 230 V, U_A = 325 V

Kondensator i cewka

W obwodach elektrycznych występują dwa rodzaje elementów, które mogą gromadzić energię.



Kondensatory gromadzą energię w postaci ładunku i pola elektrycznego.



Cewki gromadzą energię w postaci prądu elektrycznego i pola magnetycznego.

Indukcja elektromagnetyczna

Na podstawie prawa Ampera, przepływ prądu, I, indukuje w cewce pole:

$$B = \alpha I$$

α - współczynnik.

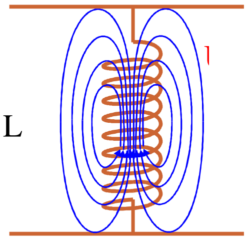
Prawo indukcji Faradaya: $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$

ε - siła elektromotoryczna,
Φ - strumień pola magnetycznego, $\Phi = B*S$.

W przypadku cewki można się spodziewać, że powstanie siła elektromotoryczna wywołana samoindukcją.

Cewka

L



$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi = B*S$$

$$B = \alpha I$$

Można się spodziewać, że w przypadku cewki powstanie siła elektromotoryczna wywołana samoindukcją:

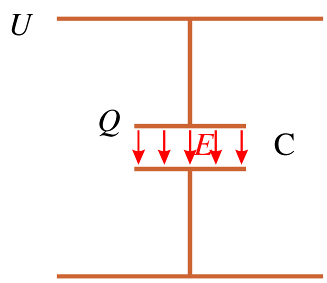
$$\varepsilon = L\frac{dI}{dt}$$

Współczynnik L nazywamy **indukcyjnością cewki**.

Indukcyjność mierzymy w henrach H, 1 H = Vs/A

Energia zgromadzona w cewce, przez którą płynie prąd o natężeniu I: $E_L = \dfrac{LI^2}{2}$

Pojemność



Pojemność kondensatora to ładunek jaki może zgromadzić przy jednostkowym napięciu.

$$C = \frac{Q}{U}$$

Jednostką pojemności jest farad, [F].
Ładunek na kondensatorze:

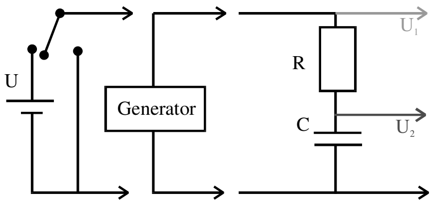
$$Q = C * U.$$

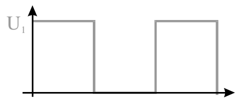
Natężenie prądu to ładunek przepływający w jednostkowym czasie: $I = \frac{dQ}{dt}$

Prąd w obwodzie z kondensatorem będzie równy: $I = C\frac{dU}{dt}$

Napięcie na kondensatorze będzie całką z prądu dopływającego do kondensatora: $U(t) = \frac{1}{C}\int I(t)dt$

Ładowanie kondensatora





$$I = \frac{U_1 - U_2}{R}$$

Prad jest równy pochodnej z napięcia na kondensatorze: $\frac{dU_2}{dt} = \frac{I}{C};$ $\frac{dU_2}{dt} = \frac{U_1}{RC} - \frac{U_2}{RC};$

stałe zmienne

Rozładowywanie ($U_1 = 0$):

U(t) = U(0) exp(-t/RC)

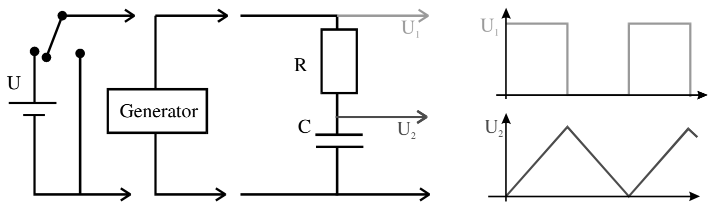
Ładowanie napięciem U_1:

U(t) = U_1(1 - exp(-t/RC))

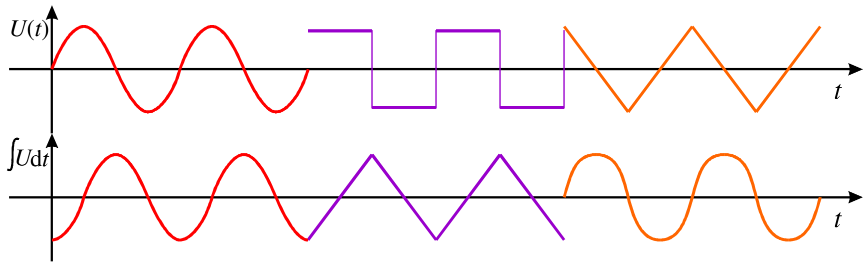
Kondensator całkuje

Napięcie na kondensatorze będzie całka z prądu dopływającego do kondensatora:

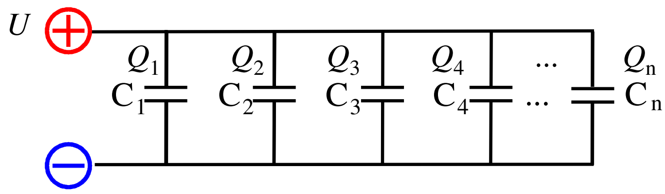
$$U(t) = \mathrm{C}^{-1}\int I(t)dt$$



RC >> T



Łączenie kondensatorów



$$Q_{\mathrm{S}} = \sum_{k=1}^{n} Q_k$$

$U = \mathrm{const}$ $$\frac{Q_{\mathrm{S}}}{U} = \sum_{k=1}^{n}\frac{Q_k}{U}$$

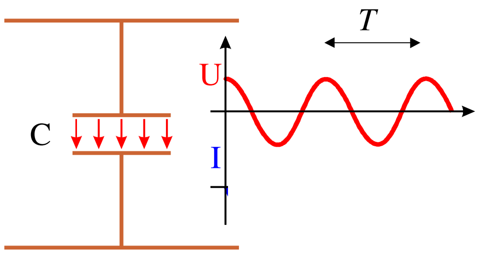
$$\mathrm{C}_{\mathrm{S}} = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_k$$

Przy połączeniu równoległym, pojemności sumują się.

$$\frac{1}{\mathrm{C}_{\mathrm{S}}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mathrm{C}_k}$$

Przy połączeniu szeregowym, sumują się odwrotności pojemności.

Prąd przemienny i kondensator

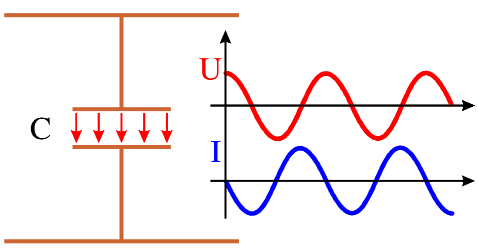


$$U = U_0 \cos(\omega t)$$

$$Q = C * U \quad \Longrightarrow \quad Q = U_0 C \cos(\omega t)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \Longrightarrow \quad I = -U_0 C \omega \sin(\omega t)$$

Prąd przemienny i kondensator



$$U = U_0 \cos(\omega t)$$

$$I = U_0 C \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$Q = C * U \quad \Longrightarrow \quad Q = U_0 C \cos(\omega t)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \Longrightarrow \quad I = -U_0 C \omega \sin(\omega t)$$

$$-\sin(\omega t) = \cos(\omega t + \pi/2) \quad \Longrightarrow \quad I = U_0 C \omega \cos(\omega t + \pi/2)$$

Prąd jest przesunięty w fazie (przyspieszony) o $\frac{\pi}{2}$ (= 90^{o}) względem napięcia.

Liczby zespolone

$z = x + iy$

$x + iy = A\mathrm{e}^{i\alpha}$

$\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

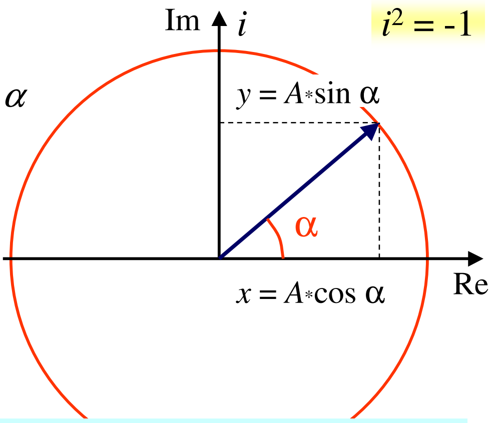
$|z| = A = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\alpha = \mathrm{arctg}(y/x)$

$x = \mathrm{Re}(z) = A\cos\alpha$

$y = \mathrm{Im}(z) = A\sin\alpha$

$i^2 = -1$



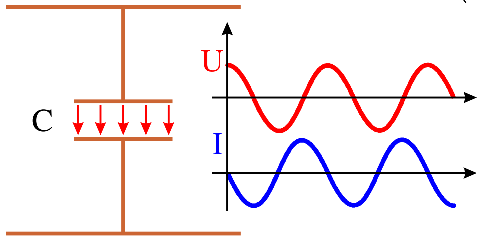
$w = a - ib$ $\qquad |w| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$w = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} \qquad |w| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\varphi = -\mathrm{arctg}(b/a)$

Prąd przemienny i liczby zespolone

$$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\omega t}\right)$$



$U = U_0\,\mathrm{e}^{i\omega t}$

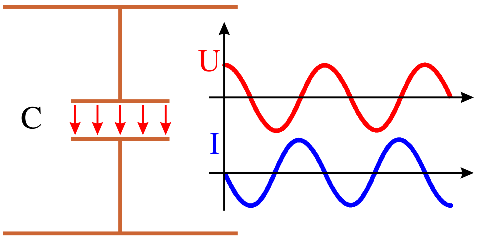
$I = U_0 i\omega C\,\mathrm{e}^{i\omega t}$

$Q = C * U \;\Longrightarrow\; Q = U_0 C\,\mathrm{e}^{i\omega t}$

$I = \dfrac{dQ}{dt} \;\Longrightarrow\; I = U_0 C i\omega\,\mathrm{e}^{i\omega t}$

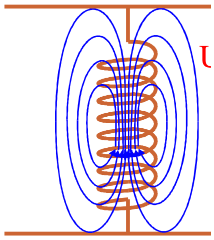
$$R = \frac{U}{I}$$

Impedancja



$$U = U_0 e^{i\omega t}$$

$$I = i\omega C \cdot U_0 e^{i\omega t}$$



Prawo Ohma:
Napięcie jest proporcjonalne do natężenia : $U = Z * I$

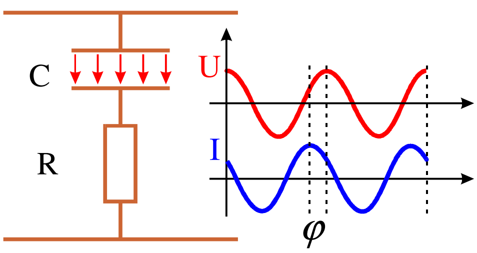
Impedancja kondensatora: $Z = \frac{1}{i\omega C}$ $\qquad Z = i\omega L$

Zawada czyli wartość bezwzględna impedancji:

$$|Z| = \frac{1}{\omega C} \qquad |Z| = \omega L$$

Przesunięcie fazowe w obwodzie RC

Impedancja opornika wynosi R.



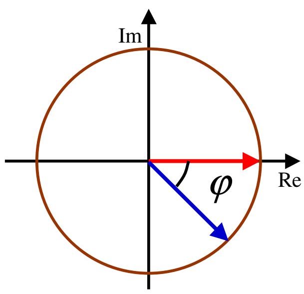
$$U = U_0 e^{i\omega t}$$

$$I = |I| e^{-i\varphi} e^{i\omega t} = |I| e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Impedancja: $Z = \frac{1}{i\omega C} + R = |Z| e^{i\varphi}$

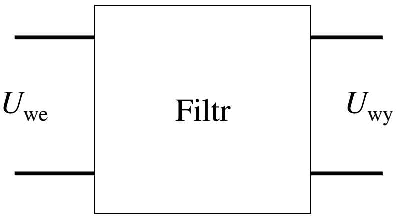
Zawada: $|Z| = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2} + R^2}$

Faza: $\mathrm{tg}(\varphi) = -\frac{1}{\omega C R}$



Napięcie spóźnia się względem natężenia.

Filtry



Charakterystyki

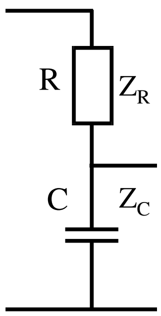
Napięciowa: **transmitancja** filtru to stosunek amplitud napięcia na wyjściu i wejściu.

$$T(\omega) = \frac{|U_{Wy}|}{|U_{We}|}$$

Fazowa: przesunięcie fazy napięcia na wyjściu.

$$\varphi(\omega)$$

Obwód RC jako filtr



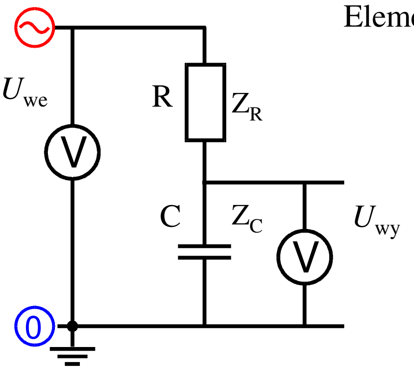
Elementy R i C tworzą dzielnik napięcia:

$$U_{Wy} = U_{We}\frac{Z_C}{Z_S}$$

$$Z_R = R \qquad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

$$Z_S = \frac{1}{i\omega C} + R$$

Obwód RC jako filtr



Elementy R i C tworzą dzielnik napięcia:

$$U_{Wy} = U_{We}\frac{Z_C}{Z_S}$$

$$Z_R = R \qquad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

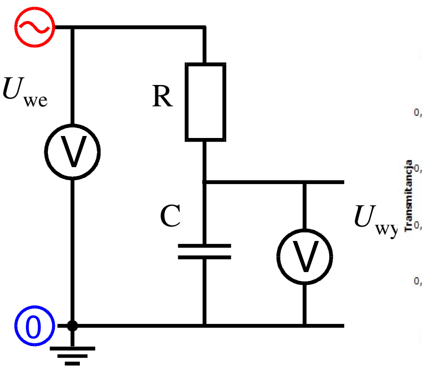
$$Z_S = \frac{1}{i\omega C} + R$$

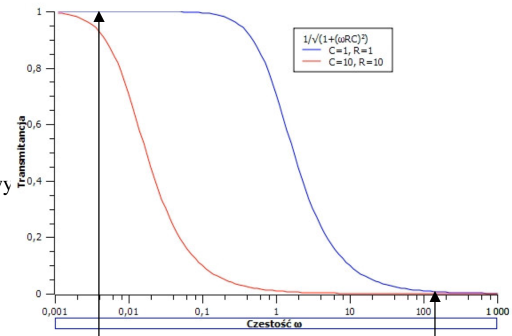
$$\frac{U_{Wy}}{U_{We}} = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

Transmitancja: $$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$$

Faza: $$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}(\omega CR)$$

Obwód RC jako filtr dolnoprzepustowy





$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}(\omega CR)$$

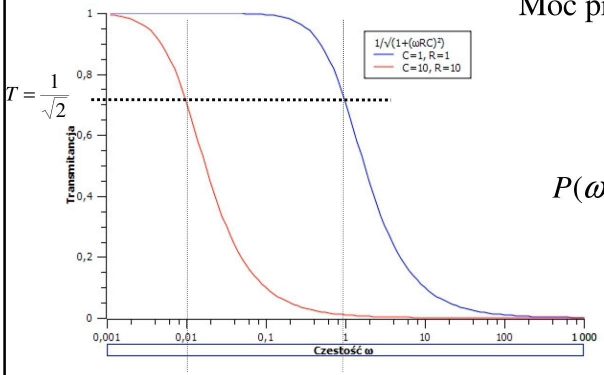
$$\tau = RC$$

Transmitancja = 1,
te częstości są
przepuszczane.

Transmitancja = 0,
te częstości są
zatrzymywane.

13:37:16

Częstość graniczna



Moc przepuszczana przez filtr:

$$P = \frac{U_{\mathrm{wyj}}^2}{2\mathrm{R}_{\mathrm{Zewn}}}$$

$$P(\omega) = \frac{U_{wej}^2}{2\mathrm{R}_{\mathrm{Zewn}}\left(1+\omega^2\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\right)}$$

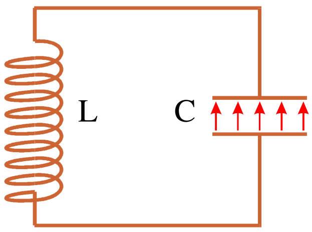
Częstość graniczna, ω_G, to taka, dla której przepuszczana jest połowa mocy.

$$U(\omega_G) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dla filtra RC, dolnoprzepustowego, oznacza to $\omega RC = 1$:

$\omega_G = 1/RC$, $\qquad f_G = \frac{2\pi}{\mathrm{RC}}$

Obwód LC, impedancja



$$Z_S = Z_L + Z_C$$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{-i}{\omega C}$$

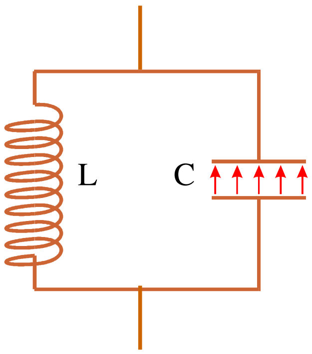
$$Z_L = i\omega L$$

$$Z_S(\omega) = i\frac{\omega^2\mathrm{LC}-1}{\omega\mathrm{C}}$$

Gdy $\omega^2 = 1/LC$, to $Z_S = 0$.

Zerowy opór sugeruje, że prąd może płynąć bez napięcia.

Obwód LC, oscylator



Kondensator $\quad I = C\dfrac{dU}{dt}$

Cewka: $\quad U = -\varepsilon = -\mathrm{L}\dfrac{dI}{dt}$

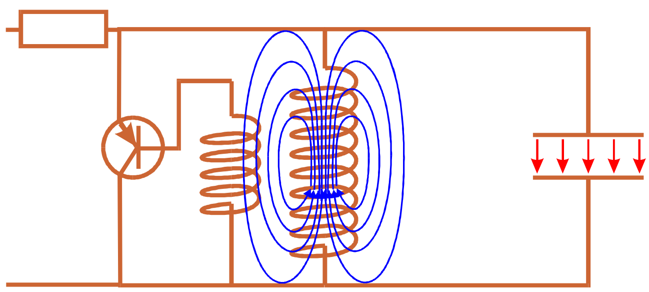
$$\frac{d^2U}{dt^2} = -\frac{1}{\mathrm{LC}}U$$

Otrzymujemy zatem równanie oscylatora harmonicznego o częstości rezonansowej:

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

L: $\quad$ H = Vs/A
C: $\quad$ F = C/V = As/V
LC: $\quad$ Vs/A $*$ As/V = s^2

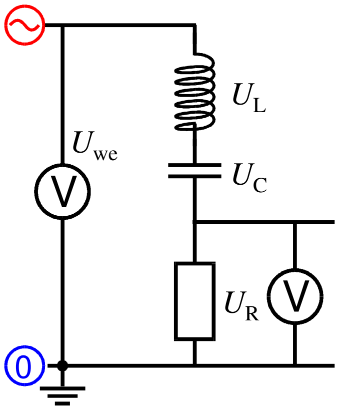
Zastosowanie obwodów LC



Nadajnik fal elektromagnetycznych

Znacznik w sklepie

Obwód RLC - różniczkowo



II prawo Kirchhoffa :

$$U_{we}(t) = U_L(t) + U_C(t) + U_R(t)$$

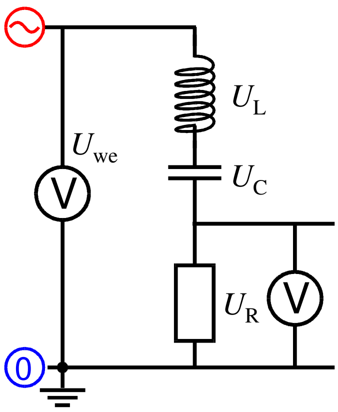
$$U_{we}(t) = \mathrm{L}\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{\mathrm{C}}\int I(t)dt + \mathrm{R}I(t)$$

$$U_R(t) = \mathrm{R}I(t)$$

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{\mathrm{R}}$$

$$U_{we}(t) = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\frac{dU_R(t)}{dt} + \frac{\int U_R(t)dt}{\mathrm{RC}} + U_R(t)$$

Obwód RLC - impedancja



II prawo Kirchhoffa :

$$U_{we} = U_L + U_C + U_R$$

$$U_{we} = Z_L I + Z_C I + \mathrm{R}I$$

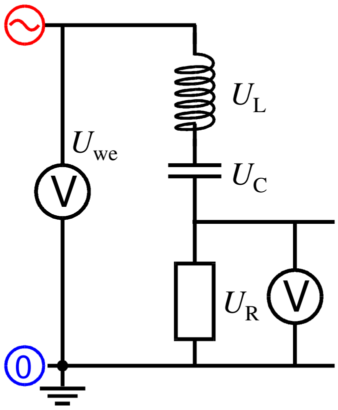
$$I = U_R/\mathrm{R}$$

$$U_{we} = U_0 \mathrm{e}^{i\omega t} \qquad U_R = U_{R0}\mathrm{e}^{i\omega t}$$

$$U_0 = \frac{i\omega \mathrm{L} U_{R0}}{\mathrm{R}} + \frac{U_{R0}}{i\omega \mathrm{RC}} + U_{R0}$$

$$U_{R0} = \frac{U_0}{1 + \frac{i\omega \mathrm{L}}{\mathrm{R}} + \frac{1}{i\omega \mathrm{RC}}}$$

Obwód RLC - napięcia



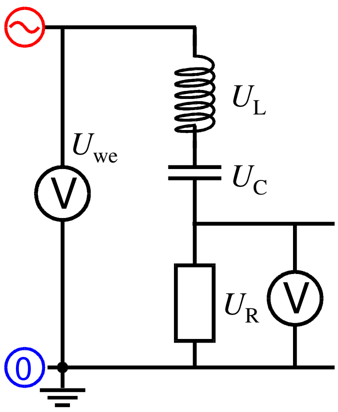
$$U_R(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t} \cdot i\omega \mathrm{CR}}{i\omega \mathrm{CR} - \omega^2 \mathrm{LC} + 1}$$

$$U_L(t) = \frac{-U_0 e^{i\omega t} \cdot \omega^2 \mathrm{LC}}{i\omega \mathrm{CR} - \omega^2 \mathrm{LC} + 1}$$

$$U_C(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{i\omega \mathrm{CR} - \omega^2 \mathrm{LC} + 1}$$

$$U_{we} = U_0 e^{i\omega t}$$

Obwód RLC - rezonans



$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$U_R(t) = U_0 e^{i\omega t} = U_{we}(t)$$

Na wyjściu to samo co na wejściu!

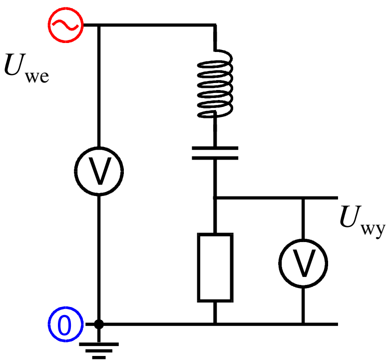
$$U_L(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t} \cdot i\omega \mathrm{L}}{\mathrm{R}} = \frac{U_0}{\mathrm{R}} \sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}} \cdot e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

$$U_C(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{i\omega \mathrm{CR}} = \frac{U_0}{\mathrm{R}} \sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} = -U_L$$

$$U_{we} = U_0 e^{i\omega t}$$

Dla częstości rezonansowej, napięcie zabrane przez kondensator jest oddawane przez cewkę (i na odwrót).

Obwód RLC jako filtr



$$U_{\mathrm{Wy}}(t) = \frac{U_{\mathrm{We}}(t)\cdot i\omega\mathrm{CR}}{i\omega\mathrm{CR} - \omega^2\mathrm{LC} + 1}$$

$$\frac{U_{\mathrm{Wy}}}{U_{\mathrm{We}}} = \frac{i\omega\mathrm{CR}}{i\omega\mathrm{CR} - \omega^2\mathrm{LC} + 1}$$

$$T(\omega) = \frac{\omega\mathrm{CR}}{\sqrt{(\omega\mathrm{CR})^2 + \left(1-\omega^2\mathrm{LC}\right)^2}}$$

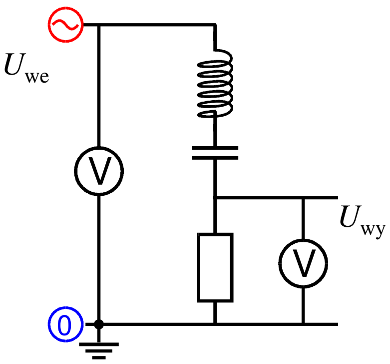
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$T(0) = 0$

$T(\omega_0) = 1$ filtr środkowo-przepustowy

$T(\infty) = 0$

Filtr RLC



$$\frac{U_{\mathrm{Wy}}}{U_{\mathrm{We}}} = \frac{i\omega\mathrm{CR}}{i\omega\mathrm{CR} - \omega^2\mathrm{LC} + 1}$$

$$T(\omega) = \frac{\omega\mathrm{CR}}{\sqrt{(\omega\mathrm{CR})^2 + \left(1-\omega^2\mathrm{LC}\right)^2}}$$