



Wydział Fizyki UW

**Pracownia elektroniczna dla nanoinżynierii
[1100-2INZ25]
Pracownia elektroniczna dla energetyki jądrowej
[1100-PEEJ]**

Ćwiczenie B2

Filtry RL, układy różniczkujące i całkujące

Streszczenie

W ramach tego ćwiczenia poznamy własności i zastosowanie cewki indukcyjnej, w obwodach prądu zmiennego. Ściśle rzecz biorąc układy takie są opisane równaniami różniczkowymi. Można będzie zaobserwować, że obwody z cewką mają własności układów całkujących lub różniczkujących sygnały elektryczne. Zbadamy też własności obwodów prądu zmiennego na przykładzie filtrów RL, w konfiguracji filtru dolnoprzepustowego i górnoprzepustowego. Wykonamy pomiary charakterystyk częstotściowych takich filtrów.

Wstęp

Napięcia lub prądy zmiennie w czasie nazywamy krótko napięciem zmiennym lub prądem zmiennym. Zmienność w czasie może mieć postać przebiegów okresowych o ustalonych parametrach (przykładem jest sygnał prostokątny, trójkątny albo o kształcie impulsowym - ale mogą być też inne o dowolnym kształcie w funkcji czasu). W tym ćwiczeniu będziemy zajmować się przebiegami okresowymi o kształcie prostokątnym, trójkątnym i sinusoidalnym, a także szumem. Prąd o przebiegu sinusoidalnym nazywam prądem przemiennym. Charakteryzujemy go podając okres drgań, T , częstość $f = 1/T$ lub częstość kołową $\omega = 2\pi f$. Sygnały mogą również być nieperiodyczne w czasie - takie są używane np. do kodowania i przesyłania informacji.

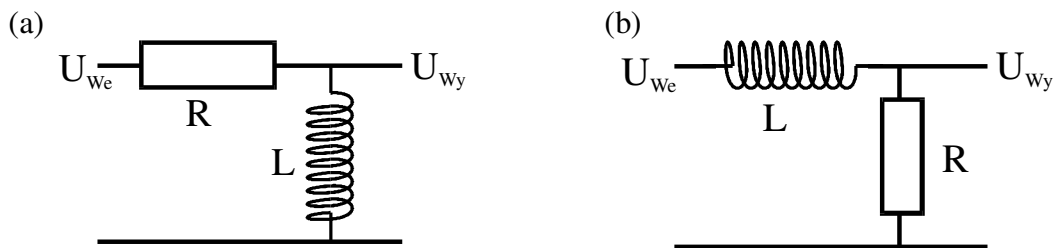
Cewka indukcyjna to element elektroniczny, który wytwarza pole magnetyczne, gdy płynie przez nią prąd elektryczny. Cewka indukcyjna zwykle jest wykonana z wielu zwojów przewodnika, zatem może przez nią płynąć prąd stały albo zmienny. Cewka gromadzi energię elektryczną pod postacią pola magnetycznego.

Michael Faraday sformułował prawo mówiące, że zmiany w czasie strumienia magnetycznego cewki, a więc zmiany natężenia prądu płynącego przez cewkę, wywołują powstanie napięcia elektrycznego między końcówkami tej cewki:

$$U_L(t) = L \frac{dI_L(t)}{dt}, \quad (1)$$

gdzie L jest indukcyjnością cewki (jednostka: 1 henr, $H = Vs/A$) i jest stałym parametrem zależnym od budowy cewki.





Rys. 2. Obwody RL, które będą badane na zajęciach a) układ różniczkujący (b) układ całkujący.

Jeżeli do obwodu, jak na rysunku 2a lub 2b podłączymy napięcie U_{we} , to przez opornik R popłynie prąd:

$$I = (U_{we} - U_L)/R. \quad (2)$$

W przypadku obwodu 2a napięcie wyjściowe wynosi $U_{wy} = U_L$, a w przypadku obwodu 2b napięcie wyjściowe wynosi $U_{wy} = IR$. Co ciekawe w obu przypadkach, po uwzględnieniu równania (1) otrzymamy równanie różniczkowe:

$$\frac{L}{R} \frac{dU_{wy}}{dt} = -U_{wy} + U_{we} \quad (3)$$

W przypadku, gdy napięcie wejściowe zmieni się z pewnej wartości U_0 na inną, U_1 , która od tego momentu będzie stała, to rozwiązaniem równania (3) dla obwodu 2a będzie:

$$U_{wy}(t) = (U_1 - U_0) \exp(-t/\tau); \quad (4a)$$

Natomiast w przypadku obwodu 2b napięcie wyjściowe, $U_{wy} = IR$, będzie opisane równaniem:

$$U_{wy}(t) = (U_0 - U_1) \exp(-t/\tau) + U_1; \quad (4b)$$

Wielkość $\tau = L/R$ nazywamy stałą czasową takiego układu. Analiza wymiarowa pokazuje, że henr/ohm daje sekundę, a więc L/R ma wymiar czasu.

Jeżeli w układzie 2a, napięcie na cewce będzie małe ($U_L \ll U_{we}$, typowe dla niskich częstotliwości), to w równaniu (2) można pominąć U_L i otrzymamy, że $I = U_{we}/R$. W takim wypadku, na podstawie równania (1) napięcie wyjściowe będzie pochodną z napięcia wejściowego. Taki układ nazywamy układem różniczkującym.

Jeżeli w układzie 2b, napięcie na oporniku będzie małe ($IR \ll U_{we}$, typowe dla wysokich częstotliwości), to można przyjąć $U_L = U_{we}$ i na podstawie równania (1) otrzymamy, że prąd płynący przez układ jest całką z napięcia wejściowego. Napięcie wyjściowe jest proporcjonalne do tego prądu $U_{wy} = IR$. Taki układ nazywamy układem całkującym.

Jeżeli do obwodu zawierającego opornik, cewkę lub kondensator podłączymy napięcie przemienne, to zależność pomiędzy prądem a napięciem będziemy mogli opisać przy pomocy impedancji Z , analogicznie jak w prawie Ohma, $U = Z \cdot I$. Przy czym w równaniu tym wszystkie wielkości fizyczne opisane są liczbami zespolonymi. W przypadku opornika impedancja równa się oporowi $Z_R = R$, natomiast dla cewki zależy od częstotliwości kołowej ω :

$$Z_L = i\omega L. \quad (5)$$

Impedancja ma podobne właściwości jak opór, a więc używając impedancji można, na przykład, stosować wzory na sumowanie oporów.

Aparatura

W niniejszym ćwiczeniu będziemy budować proste obwody złożone ze źródła napięcia zmiennego (generatora funkcji) oraz cewki i opornika, lutowanych do na płytce montażowej. Układ zasilany będzie z generatora funkcji. Do obserwacji i pomiarów napięć zmiennych będziemy wykorzystywać oscyloskop.

Wykonanie ćwiczenia

W pomiarach będziemy wykorzystywać: generator funkcji, oscyloskop wielokanałowy, miernik uniwersalny, akcesoria pomocnicze (kable łączeniowe, chwytaki pomiarowe, trójniki rozgałęziające).



Rys. 1. Widok płytki drukowanej do łączenia obwodów zmiennoprądowych. Do podłączania generatora i oscyloskopu należy używać przewodów BNC.

Obwody elektryczne będziemy lutować na płytkach drukowanych z gniazdami BNC.

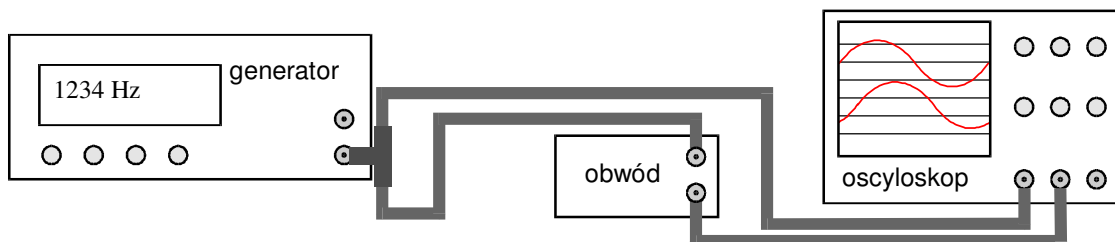
W ćwiczeniu wykorzystywane będą elementy R i L:

- oporniki o opornościach z zakresu 200 – 500 Ω ,
- cewka indukcyjna o indukcyjności 2,2 mH.

- 1) Wybierz opornik z zakresu 200 - 500 Ω i policz stałą czasową L/R dla tego opornika i cewki $L = 2,2$ mH. W obliczeniach należy uwzględnić impedancję wyjściową generatora, która wynosi 50 Ω . Odwrotność stałej czasowej daje nam częstość (pulsację) charakterystyczną $\omega_0 = 1/\tau = R/L$. Z kolei, odpowiadająca jej częstość $f_g = \omega_0/2\pi$ jest częstością graniczną. Dla badanego układu liczymy wartość:

$$f_g = \frac{R}{2\pi L} \quad (6)$$

Dla badanych filtrów oczekujemy, że dla częstości granicznej f_g transmitancja spada do $\frac{1}{\sqrt{2}}$ maksymalnej wartości.



Rys. 3. Sposób podłączenia badanego obwodu do generatora i oscyloskopu.

- 2) Zbuduj na płytce łączeniowej obwód z cewką i opornikiem, jak na rys. 2a.
 - 3) Podłącz obwód z rys. 2a do generatora i oscyloskopu według rysunku 3.
W obu obwodach przedstawionych na rysunku 2, do wejścia podłączamy napięcie zmienne z generatora. W obwodzie (a) na wyjściu mierzone będzie oscyloskopem napięcie panujące na cewce. W obwodzie (b) na wyjściu mierzone będzie napięcie na oporniku, które jest w każdej chwili proporcjonalne do prądu. W układach tych opornik ogranicza prąd płynący przez cewkę przy danym napięciu z generatora, a w obwodzie 2b służy też jako czujnik pomiarowy prądu $I(t)$, bo napięcie mierzone na tym oporniku jest proporcjonalne do prądu płynącego przez cewkę.
 - 4) Ustaw na generatorze przebieg prostokątny o amplitudzie 5 V i częstotliwości 4-krotnie mniejszej od częstotliwości granicznej obliczonej w punkcie 1) $f = f_g/4$. Używając dwu kanałów oscyloskopu zaobserwuj przebieg napięcia na wyjściu w porównaniu do napięcia z generatora. Przebieg ma kształt krzywej wykładniczej opisanej równaniem 4a. Znajdź czas τ , dla którego napięcie spada z wartości 2,72 V do 1 V, czyli e-razy.
 - 5) Zapisz obserwowany przebieg w postaci zbioru cyfrowego na pendrivie.
Naciskamy przycisk `Storage`
Wybieramy format `csv`
Wybieramy ekran jako źródło danych `DataSrc -> screen`
Rezygnujemy z parametrów: `Param -> off`
Zapisujemy: `Save -> Disc D -> New File -> OK`
 - 6) Zmniejsz częstotliwość sygnału z generatora do wartości $f = f_g/10$. Porównaj sygnały wejściowe i wyjściowe dla sygnałów prostokątnego, sinusoidalnego i trójkątnego. Przerysuj schematycznie lub zrób zdjęcie mierzonych przebiegów napięcia i wyjaśnij skąd pochodzi taki kształt. Czy napięcie to ma cechy różniczkowania napięcia podawanego na wejście układu? Uwaga, cewka ma pewną pojemność pasożytniczą i przebieg nie jest idealny.
 - 7) Ustaw na generatorze przebieg sinusoidalny i wykonaj oscyloskopem pomiar amplitud sygnału wejściowego i wyjściowego oraz przesunięcia fazowego między napięciem wyjściowym i wejściowym, wykorzystując funkcje **Measure** oraz **Cursor** oscyloskopu. Zmierz charakterystyki częstotściową $T(f) = \left| \frac{U_{wy}(f)}{U_{we}(f)} \right|$ i fazową $\varphi(f) = \arg \left| \frac{U_{wy}(f)}{U_{we}(f)} \right|$ układu w zakresie częstotliwości, f , od 100 Hz do 500 kHz. Uwaga: gdy maksimum U_{wy} wyprzedza U_{we} , to φ jest dodatnie. Punkty pomiarowe częstotliwości wybieramy w skali logarytmicznej np. 100, 200, 500, 1k, 2k, 5k itd. Pomiary napięć wykonujemy przez ustawienie oscyloskopu w modzie pomiarowym **Measure**.
 - 8) Wyznacz doświadczalnie częstotliwość graniczną pasma przenoszenia, f_g , czyli taką, przy której transmitancja filtra spada do $\frac{1}{\sqrt{2}}$ maksymalnej wartości.
 - 9) Zbuduj na płytce łączeniowej obwód różniczkujący z cewką i opornikiem, jak na rys. 2b.
 - 10) Używając tego układu (na częstotliwości $f = 10f_g$), obejrzyj przebiegi sinusoidalny i prostokątny podobnie, jak w punkcie 6). Czy ma on cechy całkowania w czasie napięcia wejściowego? Ponadto obejrzyj przebiegi dla szumu. Szum uzyskujemy z generatora przyciskiem 'Noise'. Czy szum na wyjściu jest taki sam, jak na wejściu?
- Tego typu obwody wykorzystuje się do zmniejszenia szumu w układach pomiarowych.
- 11) Zmierz dla obwodu 2b charakterystyki przenoszenia $T(f)$ i fazowa $\varphi(f)$, jak w punkcie 7).

W raporcie:

Opisz odpowiednio przebiegi zarejestrowane na oscyloskopie dla układów 2a i 2b. Do wyników punktu 5) pasuj krzywe wykładnicze dane równaniami (4).

Które krzywe z punktu 6) i 10) są efektem całkowania, które różniczkowania.

Określ, który z filtrów 2a czy 2b jest filtrem dolno-, a który górno- przepustowym.

Dopasuj do zmierzonych charakterystyk transmitancji i fazowych wyniki transmitancji policzonej teoretycznie dla zbudowanego obwodu RL z wykorzystaniem impedancji zespolonych.

Aby obliczyć impedancję układu złożonego z szeregowo połączonych cewki i opornika, wystarczy zsumować ich impedancje:

$$Z = i\omega L + R. \quad (7)$$

W obliczeniach układy przedstawione na rys. 2a i b traktujemy jak dzielniki napięcia. Przykładowo, napięcie na wyjściu filtra z rysunku 2a wynosi: $U_{wy} = U_{we} Z_L / (R + Z_L)$, a więc stosunek napięć wyniesie:

$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{i\omega L}{R + i\omega L}. \quad (8)$$

Transmitancja, będąca wartością bezwzględną stosunku napięć, wynosi:

$$T(\omega) = \frac{\omega^2 L^2}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{L\omega}\right)^2 + 1}}, \quad (9)$$

natomiast przesunięcie fazowe:

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{R}{L\omega}\right). \quad (10)$$

Widać, że podstawowym parametrem decydującym o kształcie widma danych wzorami (9) i (10) jest wartość R/L i związana z nią częstość graniczna f_g . Można obliczyć $R/L = 2\pi f_g$.

Należy porównać częstość graniczną zmierzoną w punkcie 8) z wartością obliczoną w punkcie 1). Używając częstości granicznej zmierzonej w punkcie 8) i wzorów (9) i (10), należy obliczyć spodziewane wykresy transmitancji i przesunięcia fazowego w funkcji częstości. Krzywe te należy narysować na jednym wykresie z punktami doświadczalnymi.

Skalę częstości narysuj jako logarytmiczną.

Literatura

1) D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki, PWN 2005

tom 3 - rozdziały 26, 27, 28, 31, 33 - elementy i obwody prądu stałego i zmiennego

2) E. M. Purcell, "Elektryczność i magnetyzm" - kurs berkeleyowski, Rozdział 8 - Obwody prądu zmiennego

Wersja z dnia 24 III 2025, K. Korona, B. Piętka, M. Grzybowski
(na podst. materiałów z Prac. Fiz. i Elektronicznej, WF UW)