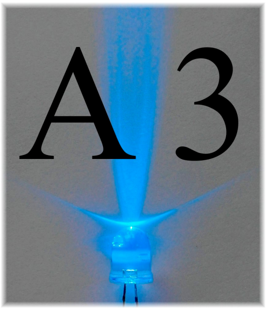


Wydział Fizyki UW

Pracownia fizyczna i elektroniczna (w tym komputerowa)

dla Inżynierii Nanostruktur (1100-1INZ27)
oraz Energetyki i Chemii Jądrowej (1100-1ENPRFIZELEK2)

Ćwiczenie A3

Elementy analizy statystycznej

Streszczenie

Ćwiczenie złożone będzie z dwóch części wprowadzających do analizy niepewności pomiarowych: (a) propagacji małych błędów oraz (b) analizy statystycznej. W części (a) ćwiczenia zastosujemy metody rachunku błędów do wyznaczania błędów złożonych w przypadku, gdy wynik jest nieliniową funkcją mierzonych wielkości. Metoda propagacji małych błędów jest ogólną techniką szacowania błędu złożonego, której przypadek szczególny był poznany w ćwiczeniu A2 dla sumy i różnicy wielkości mierzonych. Niepewności złożone będą określane dla układu dzielnika napięcia, w tym z diodą półprzewodnikową.
W części (b) ćwiczenia zbadany zostanie statystyczny rozkład wartości napięcia przewodzenia U_P dla diod półprzewodnikowych. Pomiary wykonane zostaną w warunkach stałego prądu dla serii (50 - 100 sztuk) nominalnie identycznych diod LED. Wyniki przedstawione zostaną na histogramie, który będzie następnie porównany z rozkładem Gaussa o parametrach (wartości średniej i odchyleniu standardowym) wyznaczonych z pomiarów serii diod.

Wstęp

a) Propagacja małych błędów

W ćwiczeniu A2 poznaliśmy zasadę obliczania niepewności (odchyleń standardowych) dla sumy lub różnicy dwóch niezależnie mierzonych wielkości. Uogólnienie tego wzoru na dowolną funkcję wielkości mierzonych x_1 i x_2, daną wzorem $y = f(x_1, x_2)$, ma następującą postać:

$$\sigma_f(x_1, x_2) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\sigma_2\right)^2}\,, \qquad (1)$$

gdzie σ_1, σ_2 są niepewnościami (odchyleniami standardowymi) poszczególnych zmiennych. Oznacza to, że dla zmierzonych wartości x_{10} i x_{20}, otrzymamy wynik $y \pm \sigma_y$, który obliczymy jako: $f(x_{10}$ i $x_{20}) \pm \sigma_f(x_{10}$ i $x_{20})$. I analogicznie dla większej ilości zmiennych. Taka metoda obliczania niepewności pomiaru nosi nazwę metody propagacji małych błędów. Wzór (1) jest słuszny, gdy niepewności wielkości mierzonych możemy traktować jako niezależne (nieskorelowane), co często nie zachodzi np.: w przypadku pomiaru kilku danych jednym przyrządem (wtedy błędy systematyczne są skorelowane). Trudniejszego przypadku skorelowanych niepewności (mogącego zmniejszać wartość wypadkowej niepewności) nie będziemy jednak uwzględniać - szacujemy niepewność z nadmiarem.
Przykłady:

1) Wiemy, że pochodna sumy jest sumą pochodnych. Biorąc to pod uwagę, z równania (1) wynika, że w przypadku sumy zmiennych $x_1 + x_2$, o niepewnościach σ_1 i σ_2, niepewność wypadkowa wynosi σ, przy czym $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Równanie to wykorzystywaliśmy już na ćwiczeniu A2.
2) Z kolei wiemy, że w przypadku iloczynu zmiennych, $y = x_1 \cdot x_2$, po prawej stronie równania (1) otrzymamy pod pierwiastkiem $(x_2\sigma_1)^2 + (x_1\sigma_2)^2$, a po podzieleniu przez y, otrzymujemy wzór:

$$\left(\frac{\sigma}{y}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{x_2}\right)^2 . \tag{2}$$

Dla małych wartości względnych odchyleń σ/x, możemy użyć przybliżenia:

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{\sigma_1}{x_1} + \frac{\sigma_2}{x_2} , \tag{3}$$

czyli dla iloczynu zmiennych, niepewność względna wyniku jest w przybliżeniu sumą niepewności względnych zmiennych. Identyczny wzór otrzymamy w przypadku ilorazu.

b) Elementy analizy statystycznej

Centralne twierdzenie graniczne mówi, że niezależne zmienne losowe o wartości oczekiwanej μ i skończonej wariancji σ, to dla liczby prób dążącej do nieskończoności, rozkład zbiega do standardowego rozkładu normalnego (Gaussa). Biorąc to pod uwagę, zakładamy, że wyniki U_D pomiarów napięcia przewodzenia można opisać rozkładem Gaussa w postaci:

$$G(U_D;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(U_D-\mu)^2}{2\sigma^2} \right), \tag{4}$$

Zakres pomiarowy dzielimy na przedziały o szerokości Δ i liczymy, ile pomiarów mieści się w przedziale U_k, $U_k + \Delta$. W takim wypadku należy oczekiwać, że w danym przedziale, k, otrzymamy liczbę N_k pomiarów, daną wzorem:

$$N_k = N \int_{Uk}^{Uk+\Delta} G(U_D;\mu,\sigma) dU , \tag{5}$$

gdzie N jest liczba wszystkich pomiarów. Najprostsza, przybliżona metoda obliczenia całki polega na zastąpieniu jej wyrażeniem $G(U_{[k]};\mu,\sigma)\cdot\Delta$ określającym pole powierzchni prostokąta o wysokości $G(U_{[k]};\mu,\sigma)$ i podstawie Δ, gdzie $U_{[k]}$ wyznacza środek przedziału histogramowania. W takim wypadku:

$$N_k \approx N \cdot \Delta \cdot G(U_{[k]};\mu,\sigma) . \tag{6}$$

W części doświadczalnej, (b), sprawdzimy słuszność tego przybliżenia.

c) Niepewności pomiarowe miernika

Na zajęciach posługiwać się będziemy między innymi multimetrem przenośnym Brymen 805. Poniżej przedstawione są parametry dotyczące pomiarów napięcia stałego w temperaturze 23ºC ± 5ºC, wilgotności względnej poniżej 75% i miejscu użycia miernika poniżej 2000 m nad poziomem morza – wpływ ciśnienia.

Tabela 1. Dokładność dla pomiarów napięcia stałego (DC).

Zakres	Dokładność:
400.0 mV	0,3% + 4c
4.000 V; 40.00 V; 400.0 V	0,5% + 3c
1000 V	1,0% + 4c

Tabela 2. Dokładność dla pomiarów natężenia prądu stałego.

Zakres	Dokładność:
400.0 μA	2,0% + 5c
4000 μA	1,2% + 3c
40.00 mA	2,0% + 5c
400.0 mA	1,2% + 3c
4.000 A	2,0% + 5c
10.00 A	1,2% + 3c

d) Zależność prąd - napięcie dla diody

Dioda jest przyrządem elektronicznym, zawierającym pojedyncze złącze p-n, metal-półprzewodnik (m-s) lub heterozłącze (2 półprzewodniki). Zgodnie z prawem Shockleya, natężenie prądu w złączu zależy wykładniczo od przyłożonego napięcia U:

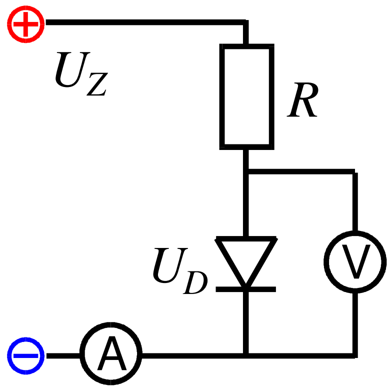
$$I = I_0 \left(\exp\left(\frac{U\mathrm{e}}{n\mathrm{k}_\mathrm{B}T} \right) - 1 \right) \tag{7}$$

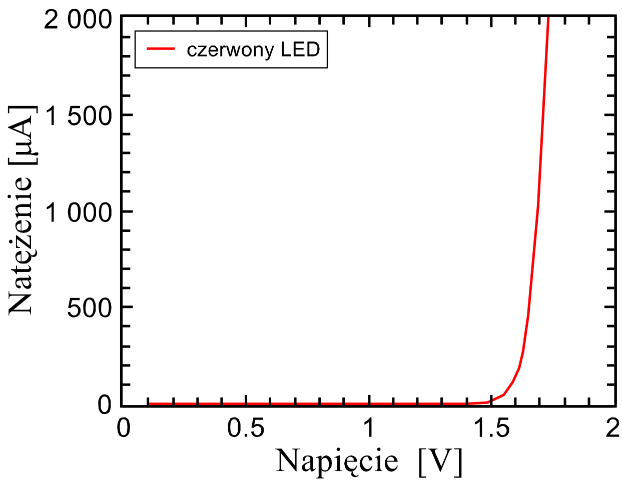
gdzie I_0 i n to współczynniki charakterystyczne dla danej diody. Współczynnik doskonałości n jest na ogół bliski jedności. Wzór (7) możemy przekształcić tak, aby otrzymać zależność napięcia od natężenia prądu:

$$U = \frac{n\mathrm{k}_\mathrm{B}\mathrm{T}}{\mathrm{e}} \ln\left(1 + \frac{I}{I_0} \right) \approx \frac{n\mathrm{k}_\mathrm{B}\mathrm{T}}{\mathrm{e}} \ln\left(\frac{I}{I_0} \right) \tag{8}$$

W dalszej części ćwiczenia będziemy badać rozkład wartości napięcia przewodzenia U_p w warunkach stałego prądu dla długiej serii nominalnie identycznych diod. Poprawne wykonanie zadania wymaga starannego i szczegółowego zbadania efektów systematycznych, związanych z dokładnością przyrządów i metodą pomiarową.

Pomiaru napięcia dokonuje się za pomocą układu zbudowanego z opornika wzorcowego oraz diody. Układ zasilany jest stałym napięciem U_Z (rys. 1).





Rys. 1. Układ do pomiaru charakterystyki $U(I)$ diody i przykładowy wykres.

Napięcie na diodzie jest rzędu 1 V. Tymczasem wartość k_BT/e w temperaturze pokojowej wynosi około 0.025 V. Jeżeli w układzie nastąpi zmiana prądu np.: z 1 mA na 1.1 mA, to napięcie zmieni się o 0.0025 V, czyli bardzo nieznacznie. W tej sytuacji możemy przyjąć przybliżenie, że napięcie na diodzie jest praktycznie stałe. Ponieważ napięcie zasilania też jest stałe, możemy przyjąć, że na oporniku jest stałe napięcie $U_Z - U_D$ i płynie przez niego stały prąd $I = (U_Z - U_D)/R$.
W praktyce przyjmuje się często przybliżenie, że napięcie na diodzie jest stałe. Jego wartość, Up, nazywamy wówczas napięciem przewodzenia i odpowiada ono prądowi o określonej wartości znamionowej np.: 2 mA lub 20 mA (tę wartość prądu i odpowiadające jej napięcie przyłożone do diody określa producent w danych katalogowych diody).

Pomiary: część (a)
Masz do dyspozycji:

- diodę świecącą LED typu L-53IT lub LID-53LID, wykonanej z półprzewodnika GaAsP,
- opornik 1 kΩ,
- zasilacz stałego napięcia,
- woltomierz i amperomierz.

1) Badane diody będziemy umieszczać w zaciskach na płytce montażowej, tej samej, której używaliśmy w ćwiczeniach A1 i A2, w obwodzie pokazanym na rys. 1 .
2) Połącz obwód jak na rysunku 1. Nie wolno: (I) podłączać diody LED bezpośrednio (tj. bez opornika) do zasilacza, (II) podłączać otrzymanej diody LED do napięcia wywołującego przepływ przez diodę prądu o natężeniu większym niż 30 mA, (III) podłączać diody LED do wyższego napięcia niż -5 V, w kierunku zaporowym, gdyż takie podłączenia mogą spowodować zniszczenie diody.
3) Zmierz zależność napięcia od natężenia dla diody. Zacznij od małego, mierzalnego natężenia, np.: 0.5 µA, a potem zwiększaj natężenie w sposób wykładniczy: 1, 2, 5, 10, 20, 50, .. aż do osiągnięcia wartości 5 mA.
4) Pisząc raport przedstaw wykres $U(I)$ w skali liniowej, a następnie przygotuj wykres $U(x)$, $x = \ln(I/1\ \mu A)$. Zgodnie ze wzorem (8) w takiej skali powinniśmy otrzymać zależność liniową. Dopasuj prostą i wyznacz n oraz I_0, zakładając, że temperatura wynosi T = 295 K natomiast k_B = 0.0861 meV/K. Zapisz, jaką niepewność n i I_0 podaje program dopasowujący. Program ten nie zna niepewności pomiarowych i szacuje odchylenie standardowe na podstawie

statystycznego odchylenia pomiarów od dopasowanej prostej. Takie oszacowanie jest zaniżone.

Pomiary: część (b)

Masz do dyspozycji:

- 100 diod o nominalnie identycznych parametrach, opornik 1 kΩ,
- zasilacz stałego napięcia,
- miernik uniwersalny.

5) Wiedząc, że napięcie przewodzenia dla badanej w tym ćwiczeniu diody LED świecącej w kolorze czerwonym wynosi około 1.7 V przy natężeniu prądu 2 mA, dobierz przez obliczenie takie napięcie z zasilacza, aby prąd płynący przez szeregowo połączone opornik R = 1 kΩ i taką diodę wynosił $I = 2 \pm 0.1$ mA.

6) Zmieniając kolejno diody w zaciskach, zmierz dla nich napięcia U_D. Czy wskazania miernika podczas pomiaru pojedynczej diody LED zmieniają się w czasie? Co to oznacza z punktu widzenia niepewności pomiaru? Zanotuj wartości U_D korzystając np. z tabeli poniżej.

Tabela 2. Arkusz pomiarowy.

Nr pomiaru	Napięcie U_D [V]	Niepewność U_D [V]
1		
2		
..		
100		

Analiza wyników

7) Ze wzoru na propagację małych błędów (1) oblicz niepewność napięcia, σ_U, dla natężenia prądu 2 mA, obliczonego ze wzoru (8). Załóż, że niepewność temperatury wynosi $\sigma_T = 1.5$ K, a względna niepewność pomiaru natężenia prądu wynosi $\sigma_I/I = 0.5\%$. Co daje większy wkład do niepewności napięcia: zmiany temperatury czy natężenia prądu?
Należy założyć, że U wynosi około 1.7 V, a współczynnik niedoskonałości $n = 1$.
Należy pamiętać, że to jest część niepewności pomiarowej wynikająca z niepewności temperatury i prądu zasilającego diodę, czyli warunków eksperymentu.
Na ostateczny wynik pomiaru będą miały wpływ niedoskonałości miernika.
Natomiast mierząc serię diod przekonujemy się, że na napięcie U_p mają wpływ także parametry techniczne. Parametry techniczne wchodzą do równania diody (7), jako parametr doskonałości n i prąd I_0.

8) Z wyników pomiarów wartości U_D będzie sporządzany histogram. Histogram to wykres słupkowy zmiennej mierzonej U_D pokazujący np. ilość pomiarów (liczebność) w przedziałach wartości U_D o szerokości Δ zwanej szerokością przedziałów histogramowania (ang. bin size, np. we własnościach histogramu w programie SciDAVis).

9) Dla uzyskanego zbioru n wartości napięć U_{Di}, oblicz podstawowe statystyki opisowe:
średnią arytmetyczną $\mu = \langle U_D \rangle = \Sigma_i U_{Di}/n$.
oraz statystyczną niepewność standardową $\sigma_U = \sqrt{\sum_i (U_{Di} - \mu)^2 \big/ (n-1)}$.

10) Należy sporządzić histogram liczebności wyników pomiarów napięcia przewodzenia diod U_D dla około 7 - 12 przedziałów wartości przyjmowanych przez U_D.

Histogram jest graficznym sposobem przedstawiania rozkładu empirycznego wielkości fizycznej. Pokazuje on liczebność zdarzeń (pomiarów) odpowiadających pewnemu przedziałowi wielkości fizycznej X. W naszym przypadku wielkością histogramowaną będzie napięcie przewodzenia U_D. Przykład obliczeń dla serii diod podano w tabeli 3.

Tabela 3. Przykładowe wyniki pomiarów i ich analiza.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	razem
krawędź dolna przedziału U_k [V]	1,7	1,72	1,74	1,76	1,78	1,8	1,82	1,84	
krawędź górna przedziału $U_k + \Delta$ [V]	1,72	1,74	1,76	1,78	1,8	1,82	1,84	1,86	
środek przedziału $U_{[k]}$ [V]	1,71	1,73	1,75	1,77	1,79	1,81	1,83	1,85	
liczba n_k danych mieszczących się w przedziale k	0	5	43	91	63	13	1	0	$N = 216$
wartość średnia, $\mu = \langle U_D \rangle$ [V]									1,776
odchylenie standardowe, σ [V]									0,018
Spodziewana ilość zliczeń w przedziale k obliczona z rozkładu Gaussa $N\Delta \cdot G(U_k,\mu,\sigma)$	0,13	3,76	33,36	88,98	71,32	17,18	1,24	0,03	216,00

W powyższej tabeli spodziewana ilość zliczeń w przedziale k obliczona została z rozkładu Gaussa $N\Delta \cdot G(U_k, \mu, \sigma)$. Podany rozkład pomiarów, jego wartość średnia $\mu = 1{,}776$ V oraz dyspersja $\sigma = 0{,}018$ V pochodzą z przykładowego pomiaru napięć przewodzenia serii diod.

12) Zakładając, że zebrane wartości napięć U_D przedstawiają reprezentatywną próbkę wylosowaną z rozkładu Gaussa (równanie (4)) o parametrach określonych przez wartość średnią μ i statystyczną niepewność pojedynczego pomiaru σ, nanieś na histogram krzywą wynikającą z rozkładu Gaussa (gęstość prawdopodobieństwa rozkładu Gaussa mnożoną przez $N{\cdot}\Delta$ dla przypadku histogramu liczebności).

13) Na histogramie zaznacz położenie wartości średniej oraz wartości odległe o jedną statystyczną niepewność pojedynczego pomiaru na prawo i lewo od wartości średniej. Na podstawie histogramu lub korzystając bezpośrednio z danych oceń procent liczby pomiarów mieszczących się w tym przedziale.

Histogram można rysować w arkuszu kalkulacyjnym programu Excel, Open Calc lub w programie SciDAVis (z menu wybrać Plot/ Statistical Graphs / Histogram).

Uwaga. Przy podawaniu wyników końcowych pomiarów w postaci $y \pm \sigma_y$, stosowana jest następująca konwencja dotycząca liczby cyfr po przecinku. Podajemy co najwyżej dwie cyfry znaczą niepewności σ_y, a podawane cyfry wartości y, ograniczamy do tej samej pozycji, co ostatnia cyfra σ_y. Przykłady: U = 21,15±0,03 V, I = 1,2±0,1 mA, zamiast: I = 1,1234±0,123 mA. Konwencja ta nie dotyczy wyników cząstkowych służących do dalszych obliczeń.

Wersja z 26 III 2020, K. Korona, Z. Ogorzałek
(na podst. materiałów z Prac. Fiz. i Elektronicznej, WF UW)