Wydział Fizyki UW

Pracownia fizyczna i elektroniczna (w tym komputerowa)

dla Inżynierii Nanostruktur (1100-1INZ27)
oraz Energetyki i Chemii Jądrowej (1100-1ENPRFIZELEK2)

Ćwiczenie A2

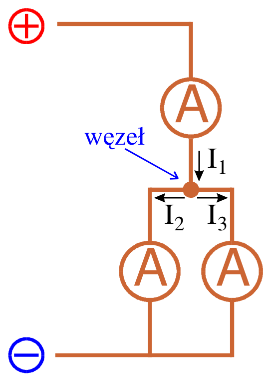
Prawa Kirchhoffa

Streszczenie

W tym ćwiczeniu poznajemy zasady rządzące łączeniem elementów elektronicznych w obwody. przede wszystkim są to prawa Kirchhoffa. Znajomość prostych praw wykorzystamy do zapoznania się z niepewnościami pomiarowymi: napięć, natężeń prądów oraz oporów. Biorąc pod uwagę te niepewności sprawdzamy, czy uzyskane wyniki pomiarów prądów i napięć w prostych obwodach prądu stałego (szeregowe lub równoległe połączenie oporników) są zgodne z prawami Kirchhoffa. Jako kryterium zgodności korzystamy ze statystycznego testu zgodności 3-sigma (3σ). Poznajemy także zasady wyznaczania niepewności wielkości złożonej, będącej sumą lub różnicą dwu lub więcej zmierzonych wielkości. W drugim etapie ćwiczenia jest wyznaczamy opór wewnętrzny ogniwa elektrochemicznego – baterii R6 - korzystając z dopasowania prostej do wyników pomiaru napięć i prądów w obwodzie z baterią.

Wstęp

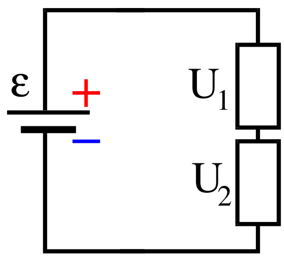
I prawo Kirchhoffa dotyczy natężeń prądu i jest rezultatem zasady zachowania ładunku elektrycznego. Ma szczególne znaczenie w węzłach obwodu elektrycznego, tzn. w punktach, gdzie zbiega się kilka przewodów. Stwierdza ono, że suma natężeń prądów wpływających do węzła jest równa sumie natężeń prądów z niego wypływających. Dla sytuacji przedstawionej na rysunku 1 ma ono postać:



Rys. 1 Węzeł w obwodzie elektrycznym.

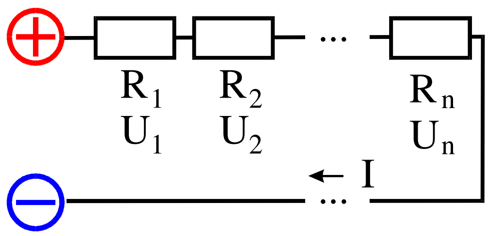
$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{1}$$

II prawo Kirchhoffa dotyczy napięć. Treść tego prawa brzmi następująco: w dowolnym obwodzie zamkniętym algebraiczna suma sił elektromotorycznych, ε_n, (tj. napięć generowanych np. przez znajdujące się w obwodzie baterie lub zasilacze) jest równa sumie spadków napięć na elementach obwodu, U_m. Co zapisujemy wzorem:

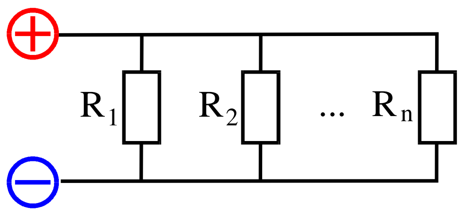


Rys. 2 Obwód z ogniwem.

$$\sum_n \varepsilon_n = \sum_m U_m \,, \tag{2}$$



Rys 3 Szeregowe połączenie oporników



Rys. 4. Oporniki połączone równolegle.

Z praw Kirchhoffa wynika, że sumaryczny spadek napięcia na opornikach połączonych szeregowo U_S, jest równy sumie napięć $U_1 + U_2 + .. + U_n$ (rys. 3). Ponieważ przez wszystkie oporniki płynie ten sam prąd, I, możemy wszystkie napięcia podzielić przez ten prąd. Otrzymujemy wtedy równanie mówiące, że całkowity opór, R_S, przewodników połączonych szeregowo jest równy sumie oporów, R_n, tych przewodników:

$$R_S = R_1 + R_2 + .. + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i \qquad (3)$$

Analogicznie można pokazać, że efektywny opór, R_E, przewodników połączonych równolegle (rys. 4), spełnia zależność:

$$\frac{1}{R_E} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + .. + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \qquad (4)$$

Niepewności pomiarowe miernika

Na zajęciach posługiwać się będziemy między innymi multimetrem przenośnym Brymen 805.
W tabelach 1 - 3 (poniżej) przedstawione są parametry dotyczące pomiarów natężenia prądu stałego, napięcia stałego i oporu dla wykorzystywanego przez nas miernika uniwersalnego Brymen 805 (w temperaturze 23°C ± 5°C, wilgotności względnej poniżej 75% i miejscu użycia miernika poniżej 2000 m nad poziomem morza – wpływ ciśnienia).

Tabela 1. Dokładność dla pomiarów natężenia prądu stałego.

zakres	**dokładność:**
400.0 μA	2,0% + 5c
4000 μA	1,2% + 3c
40.00 mA	2,0% + 5c
400.0 mA	1,2% + 3c
4.000 A	2,0% + 5c
10.00 A	1,2% + 3c

Tabela 2. Dokładność dla pomiarów napięcia stałego (DC).

zakres	**dokładność:**
400.0 mV	0,3% + 4c
4.000 V; 40.00 V; 400.0 V	0,5% + 3c
1000 V	1,0% + 4c

Tabela 3. Dokładność dla pomiarów oporu.

zakres	dokładność:
400.0 Ω	0,8% + 6c
4.000 kΩ; 40.00 kΩ; 400.0 kΩ	0,6% + 4c
4.000 MΩ	1,0% + 4c
40.00 MΩ	2,0% + 4c

Aktualny zakres pomiarowy miernika rozpoznajemy po formacie liczbowym wyświetlanego wyniku. Wielkość Δ – dopuszczalny błąd graniczny wskazania miernika na danym zakresie pomiarowym, wyznacza się na podstawie wzoru:

$$\Delta = w \cdot x + n \cdot c, \qquad (5)$$

gdzie kolejne dwa składniki oznaczają:

$w \cdot x$ - niepewność procentowa dla wskazywanej przez przyrząd wartości x. Wartość w odczytujemy z powyższych tabeli dla użytego zakresu pomiarowego miernika.

$n \cdot c$ – dokładność cyfrowa określana jako liczba n pojedynczych cyfr na najmniej znaczącej pozycji c wyświetlanej na mierniku. Zależy ona od wybranego zakresu pomiarowego i jakości miernika (przetwornika analogowo-cyfrowego A/C w mierniku), a nie zależy od wartości pomiaru.

Przykład 1.
Jeśli producent podaje dokładność 0,5% na wybranym zakresie pomiarowym, to dla wskazania x = 30,00 V otrzymujemy niepewność procentową $w \cdot x$ = 0,005·30,00 V = 0,15 V.

Przykład 2.
Jeśli producent podaje, że na zakresie pomiarowym 40,00 V DC dokładność cyfrowa wynosi 3c, to znaczy, że wartość dokładna może się różnić maksymalnie dodatkowo o ± 0,03 V od odczytanej wartości (pojedyncza cyfra na najmniej znaczącej pozycji odczytu 40,00 V to 0,01 V). Sumując obie wartości otrzymamy dopuszczalny błąd graniczny Δ pomiaru przy wskazaniu 30 V równy: Δ = 0,15V + 0,03V = 0,18 V (co stanowi 0,6% pomiaru) dla zakresu 40,00 V DC. Wykonując analogiczne obliczenia dla tej samej wartości mierzonej 30,0 V, ale na niewłaściwie dobranym zakresie pomiarowym miernika 400,0 V DC, przy tych samych parametrach dokładności, otrzymamy niekorzystnie większy dopuszczalny błąd graniczny: Δ = 0,15 V + 0,3 V = 0,45 V, co stanowi 1,5% wartości z pomiaru. Należy więc mierzyć na najkorzystniejszym zakresie miernika.

Przykład 3 (obrazujący pojęcie dokładności miernika)

Dla wyobrażenia sobie, co oznacza dokładność przyrządu pomiarowego, rozważmy następujący model procesu produkcji takich przyrządów. W fabryce, w seryjnej produkcji, wytwarzane są „identyczne” mierniki. Jak każdy proces fizyczny, proces technologiczny nie jest jednak kontrolowany absolutnie dokładnie. Na skutek przypadkowych zakłóceń w jego przebiegu wskazania mierników z wyprodukowanej serii różnią się nieznacznie podczas mierzenia tego samego obiektu. Przyjmijmy, że producent wypuszcza z fabryki, przyrządy pokazujące wartość zgodną z wartością dokładną μ, w ramach maksymalny błędu wskazań (dopuszczalny błąd graniczny). Czyli różnica między wskazaniem x dowolnego miernika z serii, a wartością dokładną μ, nie przekracza co do wartości bezwzględnej wartości Δ. Oznacza to że uzyskana w wyniku pomiaru konkretnym miernikiem wartość x zawiera się przedziale (μ

– Δ, μ + Δ). Przyjmujemy, że każdy wynik z tego przedziału jest jednakowo prawdopodobny, zatem wariancja σ^2 zmiennej losowej x dla serii mierników wynosi:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\Delta}\int_{-\Delta}^{\Delta} x^2 dx = \frac{\Delta^2}{3} \qquad (6)$$

czyli dyspersja, (odchylenie standardowe) wynosi

$$\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \qquad (7)$$

Szczegóły są opisane w skrypcie A. Majhofera, [1]

Biorąc pod uwagę powyższe rozważania, wynik x pojedynczego pomiaru wielkości mierzonej miernikiem podajemy jako ($x \pm \sigma$), gdzie jako niepewność pomiaru bierzemy odchylenie standardowe $\sigma = \Delta/\sqrt{3}$, w którym Δ jest dopuszczalnym błędem granicznym wskazań miernika na użytym zakresie pomiarowym.

Wartość oczekiwana i niepewność sumy dwu zmiennych losowych.

Rozważamy sytuację, w której poszukiwana przez nas wielkość nie jest mierzona bezpośrednio (jednym pomiarem), a jest sumą dwu niezależnie zmierzonych wielkości, na przykład dwu natężeń prądów wpływających dwoma przewodami do węzła obwodu elektrycznego. Pomiar pierwszej wielkości x_1 daje wartość oczekiwaną $E(x_1) = \overline{x_1}$ z niepewnością pomiarową $\sigma_1 = \sqrt{E((x_1 - \overline{x_1})^2)}$, a pomiar drugiej wielkości x_2 daje wartość oczekiwaną $\overline{x_2}$ z niepewnością σ_2. Wielkość sumy $x_1 + x_2$ poszukiwana przez nas ma wartość oczekiwaną $\overline{x_1} + \overline{x_2}$ $\overline{x_1} + \overline{x_2}$, a jej wariancja σ^2 wynosi:

$$E\left[(x_1 + x_2 - (\overline{x_1} + \overline{x_2}))^2\right] = E\left[(x_1 - \overline{x_1})^2 + (x_1 - \overline{x_1})(x_2 - \overline{x_2}) + (x_2 - \overline{x_2})^2\right] =$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_1^2 + 2E\left[(x_1 - \overline{x_1})(x_2 - \overline{x_2})\right].$$

Dla przypadku kiedy pomiary obu wielkości x_1 i x_2 są niezależne wartość oczekiwana dana trzecim wyrazem tej sumy wynosi 0 i wariancja $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Niepewność sumy dwu **niezależnych** zmiennych losowych wynosi $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Taki sam wynik dostajemy dla niepewności różnicy dwu niezależnych zmiennych losowych. Jest to najprostszy przypadek pokazujący, jak niepewności pomiaru wielkości składających się na pewną wielkość wynikową przenoszą się na niepewność tej wielkości wynikowej. Bardziej złożone sytuacje dowolnej funkcji, a nie tylko sumy dwu zmiennych losowych, poznamy w przyszłości jako metodę propagacji małych błędów (ćwiczenie A3 oraz wykład ze Wstępu do analizy danych [1]).

TEST 3σ

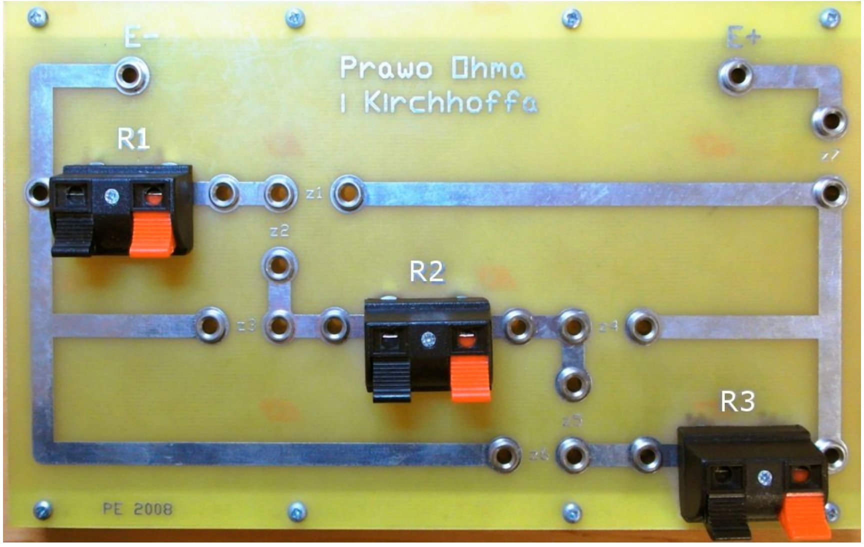
Wartość liczbowa uzyskana z pomiaru każdej wielkości fizycznej obarczona jest niepewnością pomiarową (niedokładnością pomiaru). Uzasadnione jest więc pytanie o kryteria rozstrzygania, czy pomiar wykonany z niepewnością pomiarową jest zgodny, czy niezgodny z modelem mierzonego zjawiska.
Elementem niniejszego ćwiczenie jest sprawdzanie zgodności wyników doświadczeń z przewidywaniami teoretycznymi (prawami Kirchhoffa) lub też sprawdzanie wzajemnej zgodności wyników różnych pomiarów, a więc, mówiąc ogólnie, testowanie hipotez. Najprostszym testem zgodności wyników jest tzw. **test 3σ** spotykany w dwóch następujących typach zagadnień:

- Hipoteza teoretyczna głosi, że „wielkość mierzona ma wartość μ". Wynik pomiaru, x, tej wielkości jest określony z dyspersją (niepewnością pomiaru) σ, gdzie σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji σ^2. Test prowadzimy w ten sposób, że wyznaczamy wartość $|x-\mu|$ i sprawdzamy, jak uzyskana wartość ma się do wartości 3σ. Jeśli znajdujemy, że $|x-\mu| > 3\sigma$, to odrzucamy hipotezę teoretyczną o wartości μ wielkości mierzonej. Jeśli zaś spełniony jest warunek $|x-\mu| \leq 3\sigma$, to konkludujemy, że hipoteza ta nie jest sprzeczna z danymi z pomiaru.

- Hipoteza teoretyczna głosi, że „dwa pomiary uzyskane różnymi metodami (w różnych warunkach) dają tą samą wartość". Niech wynik x uzyskany jedną metodą będzie określony z dyspersją σ_x zaś wynik y uzyskany drugą metodą będzie określony z dyspersją σ_y. Test prowadzimy w ten sposób, że wyznaczamy wartość $|x-y|$ i sprawdzamy, jak wartość ta ma się do wartości 3σ, gdzie $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$. Jeśli znajdujemy: $|x-y| > 3\sigma$, to odrzucamy hipotezę, że oba pomiary dają tę samą wartość. Jeśli zaś spełniony jest warunek, że $|x-y| \leq 3\sigma$, to konkludujemy, że hipoteza ta nie jest sprzeczna z danymi. Należy z całą mocą podkreślić, że w przypadku, gdy test 3σ nie odrzuca hipotezy, nie oznacza to, że udowodniliśmy jej słuszność, a jedynie godzimy się z nią, gdyż nie jest sprzeczna z danymi z pomiaru. Jeśli pomiary opisywane się rozkładem Gaussa (wykład ze *Wstępu do analizy danych* [1]), to testowi można nadać interpretację probabilistyczną: dopuszczamy odrzucenie prawdziwej hipotezy nie częściej niż 3 razy na 1000 decyzji. Zastąpienie testu 3σ analogicznym testem 2σ oznacza odrzucanie prawdziwej hipotezy nie częściej niż 1 raz na 20 decyzji.

Układ pomiarowy

Do dyspozycji masz:
- dwa mierniki uniwersalne,
- zasilacz napięcia stałego,
- przewody z końcówkami,
- 2 zestawy pomiarowe.



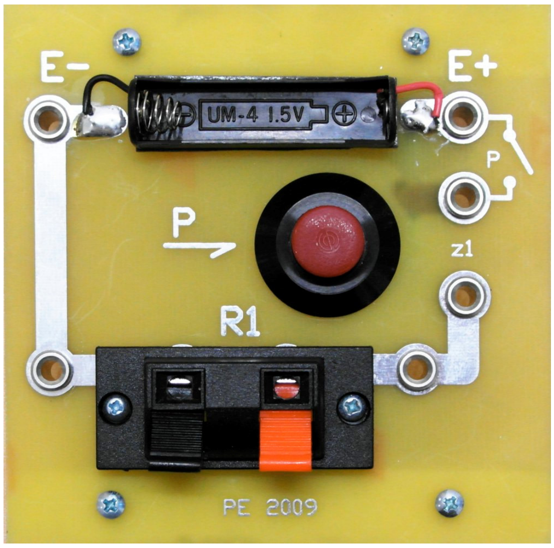
Rys. 5. Widok płytki drukowanej do badania praw Kirchhoffa. Przerwy w obwodzie, zaznaczone jako R1, R2 oraz R3, to miejsca, gdzie można wpiąć oporniki, zaś przerwy z1 do z7 służą do wpinania zworek pozwalających uzyskać połączenia szeregowe lub równoległe tych oporników lub do przyłączania mierników. Punkty E– oraz E+ to miejsca przyłączenia zasilania.

Zestaw pomiarowy 1:

- płytka drukowana do testowania praw Kirchhoffa,
- oporniki o oporach w zakresie od kilku do kilkudziesięciu kΩ.·

Zestaw pomiarowy 2:

- płytka drukowana z baterią (rys. 6),
- oporniki o oporach w zakresie od kilkudziesięciu do 200 Ω.



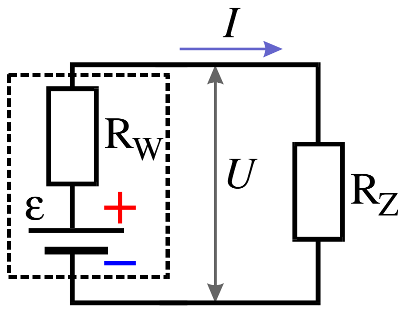
Rys. 6. Układ pomiarowy do wyznaczania oporu wewnętrznego baterii.

Wykonanie ćwiczenia

1. Zmierz omomierzem wartości oporów oporników w zestawie pomiarowym 1 oraz wyznacz ich niepewności pomiarowe na podstawie tabeli 3.
2. Zbuduj obwód szeregowy, jak na rysunku 3. Wykorzystaj zasilacz jako źródło napięcia.
   Uwaga praktyczna: do dobrej praktyki (wymaganej przez normy) należy przestrzeganie zasady: czerwony kabel podłączamy zawsze do „gorącego" zacisku na zasilaczu.
3. Włącz zasilacz i zmierz napięcia U_1, U_2, U_3 na każdym z oporników oraz na wszystkich trzech opornikach łącznie U_S, czyli napięcie (siłę elektromotoryczną) źródła. Notuj dokładnie format liczb, w jakim miernik wyświetla wartości (także w przypadku wyboru automatycznego zakresu pomiarowego miernika), gdyż format ten określa zakres, na którym wykonano pomiar, a więc określa też dopuszczalny błąd graniczny pomiaru (tabela 2).
4. Wyznacz dla zmierzonych wartości napięć U_1, U_2, U_3 i U_S dopuszczalne błędy graniczne wskazań woltomierza oraz wartości niepewności pomiaru σ. Wyznacz także niepewność sumy $U_{123} = U_1 + U_2 + U_3$. W tym celu skorzystaj z opisanej wyżej metody sumowania wariancji składników dla wyznaczenia wariancji sumy tych składników.
5. Zastosuj metodę testu 3σ dla rozstrzygnięcia, czy otrzymane z pomiarów wartości U_{123} i U_S są ze sobą zgodne, a więc czy pomiary są zgodne z II prawem Kirchhoffa. Do obliczeń w punkcie 4 i 5 możesz wykorzystać arkusz kalkulacyjny dla niniejszego ćwiczenia w programie Calc z OpenOffice.
6. Zbuduj obwód równolegle połączonych oporników, jak na rysunku 4. Zastosuj zasilacz jako źródło napięcia.
7. Po podłączeniu zasilacza, zmierz natężenia prądu I_1, I_2 oraz I_3 w kolejnych gałęziach z opornikami R_1, R_2 i R_3 obwodu z równoległym połączeniem oporników oraz zmierz wartość całego prądu, I, płynącego ze źródła napięcia.
8. Wyznacz niepewności danych uzyskanych w pomiarach w punkcie 7 i sprawdź zgodność wyników pomiaru prądu, I_S, oraz sumy $I_1 + I_2 + I_3$ stosując kryterium testu 3σ. W ten sposób sprawdzamy zgodność pomiarów z I prawem Kirchhoffa. Do obliczeń możesz znowu wykorzystać arkusz kalkulacyjny dla niniejszego ćwiczenia w programie Calc z OpenOffice.

Pomiary z wykorzystaniem zestawu 2 (wyznaczanie oporu wewnętrznego baterii).

9. Zmierz omomierzem wartości oporników z zestawu pomiarowego 2 oraz wyznacz ich niepewności pomiarowe. Nie wymieszaj oporników z zestawów 1 i 2.
10. Korzystając z elementów zestawu pomiarowego 2 zbuduj według rysunku 7 obwód, w którym źródłem siły elektromotorycznej, ε, będzie bateria o nieznanym oporze wewnętrznym R_W, a opór R_Z to jeden z oporników z zestawu 2.
11. Za pomocą mierników zmierz napięcie na zaciskach baterii oraz natężenie prądu płynącego w obwodzie. Wykonaj taki pomiar dla każdego opornika z zestawu 2 zmieniając w ten sposób prąd płynący w obwodzie.
    Czy obserwujesz zmiany mierzonego napięcia?
    Czy w tym doświadczeniu zmienia się siła elektromotoryczna baterii?



Rys. 7. Obwód do pomiaru oporu wewnętrznego baterii.

Uwaga: czerwony okrągły przycisk służy do zamykania obwodu; wykorzystuj go tylko na czas odczytywania wskazań mierników – nie trzymaj baterii włączonej przez dłużej niż przez kilka sekund, bo powoduje to rozładowywanie baterii, a więc zmianę jej parametrów w czasie doświadczenia.

12. Z praw Kirchhoffa wynika, iż jeśli do zacisków baterii o sile elektromotorycznej ε i oporze wewnętrznym R_W podłączymy opór zewnętrzny R_Z (rys. 7), to natężenie I prądu płynącego przez baterię i napięcie U na jej zaciskach spełniają zależność: $U = \varepsilon - R_W I$. Zakładając, że siła elektromotoryczna i opór wewnętrzny baterii są stałe, wykorzystaj dane uzyskane w punkcie 9 do wyznaczenia obu wielkości ε oraz R_W. W tym celu wykonaj wykres $U = f(I)$ i dopasowanie do niego linii prostej metodą najmniejszych kwadratów - wyznacz wartości ε oraz R_W z tego dopasowania.
13. Na wykresie zaznacz niepewności pomiarów U oraz I. Aby to zrobić, w programie Scidavis należy w tabeli danych utworzyć dwie dodatkowe kolumny, oznaczyć je (Set Column As…) jako zawierające X Error oraz Y Error, a następnie z menu Graph/Add Error Bars… przez wybór odpowiednich kolumn dorysować błędy dla punktów pomiarowych.

W sprawozdaniu (z części A) opisz przebieg doświadczeń oraz:
- Przedstaw w tabelach wyniki pomiarów i obliczeń niepewności z punktów 1, 3, i 7.
- Przedstaw wyniki zastosowania testu 3σ.
- Przedstaw wyniki pomiarów z punktu 11 i wykres wraz z dopasowaniem z punktu 12.
- Opisz krótko uzyskane wyniki i sformułuj wnioski z pomiarów.

Literatura

[1] A. Majhofer, "Analiza niepewności pomiarowych i pracownia wstępna", skrypt FUW

Wersja z dnia 4 IV 2018, K. Korona, K. Lekenta
(na podst. materiałów z Prac. Fiz. i Elektronicznej, WF UW)