

Pracownia fizyczna i elektroniczna

Wykład 1: Obwody prądu stałego i zmiennego

Kontakt: mkuich@fuw.edu.pl

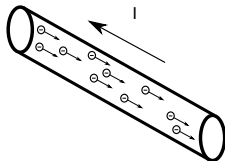
Materiały: Pracownia fizyczna i elektroniczna (1100-2F23,1100-2BF21)

- kurs na platformie Kampus

Przypomnienie podstawowych pojęć i praw 1

- **Napięcie elektryczne** (U) - spadek potencjału na części obwodu elektrycznego nie zawierającej źródeł prądu
- **Siła elektromotoryczna** (E) - napięcie na odcinku obwodu zawierającego źródło prądu, a nie zawierającego rezystancji
- **Prąd elektryczny** - uporządkowany ruch ładunków elektrycznych
- **Natężenie prądu** (I) - ilość ładunku dQ przepływająca przez przewodnik w jednostce czasu dt :

$$I = \frac{dQ}{dt}$$



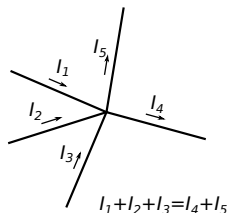
Przypomnienie podstawowych pojęć i praw 2

- **Prawo Ohma:** $U = R \cdot I$
- **Opór / rezystancja (R)** - współczynnik proporcjonalności między napięciem i natężeniem

- **Pierwsze prawo Kirchhoffa:**

$$\sum_i I_i = 0$$

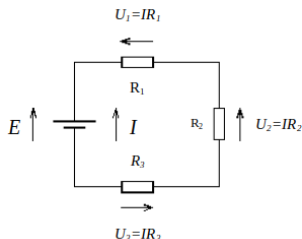
dla dowolnego węzła sieci elektrycznej



- **Drugie prawo Kirchhoffa:**

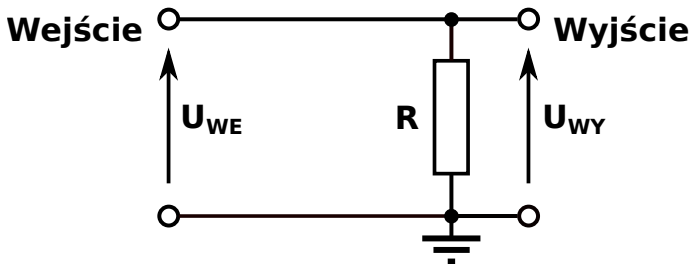
$$\sum_i IR_i = E$$

dla obwodu zamkniętego



Wejście i wyjście układu

- Parametrami prawie każdego układu elektronicznego są:
 - rodzaj sygnału doprowadzonego do *wejścia* (zwykle napięcie, U_{WE})
 - rodzaj sygnału otrzymanego na *wyjściu* (zwykle napięcie, U_{WY})

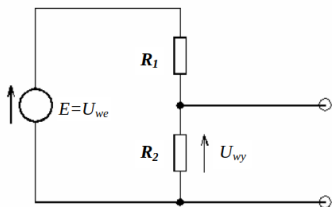


- Stosunek napięcia na *wyjściu* układu do (ustalonej) wartości na jego *wejściu* nazywamy **transmitancją**:

$$T = \frac{U_{WY}}{U_{WE}}$$

Dzielnik napięcia, dzielnik prądowy

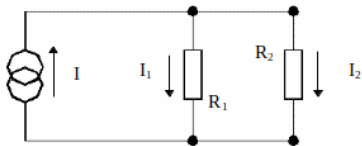
- **Dzielnik napięcia** - układ pozwalający otrzymać określone napięcie na wyjściu układu



$$U_{WY} = U_{WE} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

→ Działanie większości obwodów elektrycznych można opisać jako układ jednego lub kilku dzielników napięcia

- **Dzielnik prądowy** - układ pozwalający otrzymać określony prąd w odpowiednich gałęziach układu; wygodnie go rozpatrywać w funkcji **przewodności** gałęzi układu (**G**)



$$I_1 = I \frac{G_1}{G_1 + G_2}$$

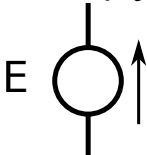
$$I_2 = I \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

$$G_1 = \frac{1}{R_1}$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2}$$

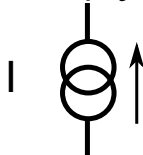
Idealne i rzeczywiste źródła energii elektrycznej

Źródło napięciowe



Napięcie E na zaciskach nie zależy od natężenia prądu wyjściowego

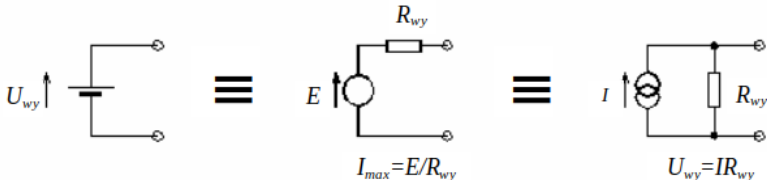
Źródło prądowe



Prąd wyjściowy I nie zależy od napięcia na zaciskach

Każde rzeczywiste źródło energii elektrycznej może być przedstawione jako:

- źródło napięciowe i szeregowo rezystancja wewnętrzna
- lub
- źródło prądowe i bocznikująca je rezystancja wewnętrzna



Zasada Thevenina:

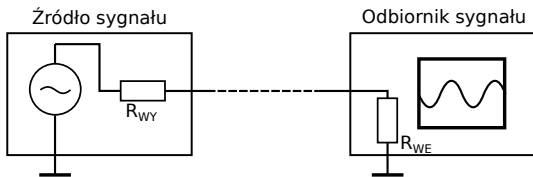
Każdą sieć elektryczną można przedstawić w postaci obwodu zastępczego składającego się ze źródła napięciowego i szeregowej rezystancji wewnętrznej

Zasada Nortona:

Każdą sieć elektryczną można przedstawić w postaci obwodu zastępczego składającego się ze źródła prądowego zbocznikowanego rezystancją wewnętrzną

Rezystancja (impedancja) wewnętrzna urządzeń

- W układach elektronicznych wyjście jednego układu zawsze łączy się z wejściem innego układu



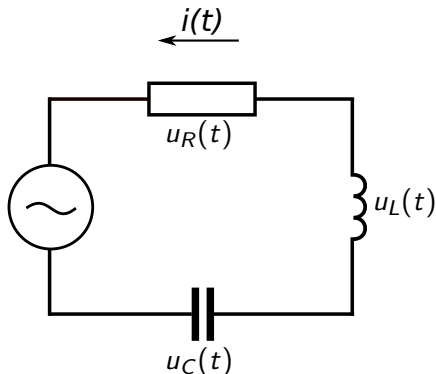
- Każdy układ, zgodnie z zasadą Thevenina, można sprowadzić do źródła/odbiornika obciążonego impedancją wyjściową/wejściową
- Taki układ tworzy dzielnik napięcia i efektywnie może prowadzić do zmniejszenia amplitudy sygnału widzianego przez odbiornik
- Minimalizujemy ten efekt gdy: $R_{WE} \gg R_{WY}$
- Wyjątki:
 - układy dużej częstotliwości (\sim GHz)
 - linie transmisyjne
 - badamy sygnał prądowy (nie napięciowy)

Napięcie i natężenie prądu zmiennego







- Natężenie prądu: $I = \frac{dQ}{dt} \rightarrow i(t)$
- Napięcie w zamkniętym obwodzie elektrycznym, $u(t)$, jest funkcją natężenia prądu $i(t)$
- Pierwsze prawo Kirchhoffa
→ każdym punkcie obwodu szeregowego natężenie prądu ma jednakową wartość
- Drugie prawo Kirchhoffa:

$$E = \sum_i U_i$$

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$



Układy złożone z elementów biernych

Elementy bierne	opór (R)		
	indukcyjność (L)		
	pojemność (C)		

Uogólnienie prawa Ohma dla prądów zmiennych:

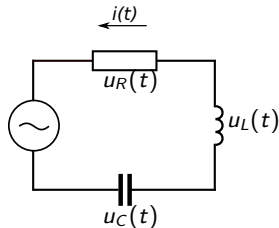
opór R : $u_R(t) = Ri(t)$

indukcyjność L : $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

pojemność C : $u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int i(t)$

Równanie ruchu
ładunku
elektrycznego

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \int \frac{i(t)}{C} \end{array} \right.$$



Obwody prądu zmiennego - podejście zespolone

- Napięcie i natężenie prądu zależne od czasu i częstości kołowej:

$$u(\omega, t) = U_0 e^{j\omega t}$$

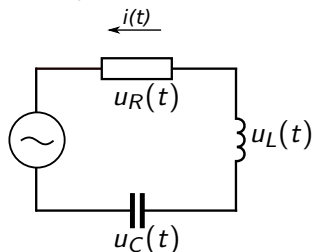
$$i(\omega, t) = I_0 e^{j\omega t} \quad \begin{matrix} j = \sqrt{-1} \\ \omega = 2\pi\nu \end{matrix}$$

U_0 - zespolona amplituda napięcia I_0 - zespolona amplituda natężenia

$E(t) = \text{Re}[u(t)]$ ← rzeczywista wartość napięcia

- Impedancja (Z) - wielkość zespolona charakteryzująca zależność między natężeniem prądu i napięciem w obwodach prądu zmiennego

$$\frac{u(\omega, t)}{i(\omega, t)} = \frac{U_0}{I_0} = Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$



opór: $Z_R = R$

indukcyjność: $Z_L(t) = j\omega L$

pojemność: $Z_C(t) = \frac{1}{j\omega C}$

Więcej o impedancji

$$Z(\omega) = \frac{u(\omega, t)}{i(\omega, t)} = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{I_0 e^{j\omega t - \varphi}} = \frac{U_0}{I_1 e^{j\varphi}} = \frac{U_0}{I_1} e^{-j\varphi} = |Z| e^{-j\varphi} = R + jX$$

$\text{Re}(Z) = R \leftarrow$ **Rezystancja** (opór czynny)

$\text{Im}(Z) = X \leftarrow$ **Reaktancja** (opór bierny)

$\varphi \leftarrow$ przesunięcie fazowe między napięciem i natężeniem prądu

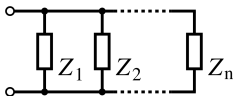
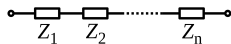
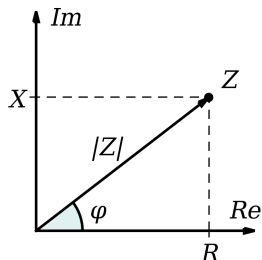
$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \leftarrow$ moduł impedancji (tzw. zawada)

Szeregowe łączenie impedancji:

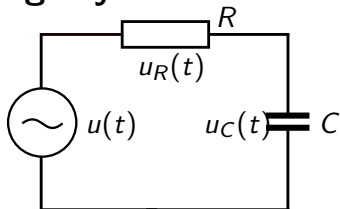
$$Z = \sum_i Z_i$$

Równoległe łączenie impedancji:

$$\frac{1}{Z} = \sum_i \frac{1}{Z_i}$$



Szeregowy obwód RC



← Źródło napięciowe $u(t)$ o zmiennej sile elektromotorycznej:

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

← Prąd płynący w obwodzie:

$$i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$$

↑ Równanie ruchu ładunku elektrycznego: $u(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt$

Podstawmy prąd do równania ruchu: $u(t) = u_R(t) + \frac{1}{RC} \int u_R(t) dt$

Napięcie na oporniku:

$$u_R = RC \frac{d[u(t) - u_R(t)]}{dt}$$

$$\text{dla } u_R(t) \ll u(t) \rightarrow u_R \approx RC \frac{d}{dt} u(t)$$

Napięcie na kondensatorze:

$$u_C = \frac{1}{RC} \int [u(t) - u_C(t)] dt$$

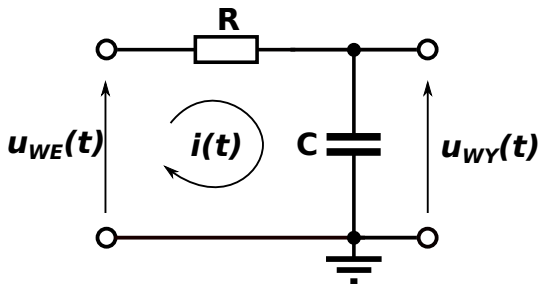
$$\text{dla } u_C(t) \ll u(t) \rightarrow u_C \approx \frac{1}{RC} \int u(t) dt$$

← **Napięcie na oporze jest zróżniczkowanym napięciem na kondensatorze**

$$u_C(t) = u(t) - u_R(t)$$

← **Napięcie na kondensatorze jest scałkowanym napięciem na oporniku**

Obwód całkujący - filtr dolno-przepustowy



Napięcie wyjściowe:

$$u_{WY}(t) = u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t)$$

$$u_{WY}(t) = \frac{1}{RC} \int [u_{WE}(t) - u_{WY}(t)] dt$$

Prąd płynący w obwodzie:



gdy $u_{WY} \ll u_{WE}$:

$$i(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{u_{WE}(t) - u_{WY}(t)}{R}$$

$$u_{WY}(t) = \frac{1}{RC} \int u_{WE}(t) dt$$

Charakterystyka filtra dolno-przepustowego

Dla sygnału harmonicznego: $u_{WE}(t) = U_{WE}e^{j\omega t}$

Filtr RC można sprowadzić do **dzielnika napięcia**, wtedy sygnał wyjściowy:

$$u_{WY}(t) = \frac{u_{WE}(t)Z_C}{Z}$$

Stosunek napięć: $\frac{u_{WY}(t)}{u_{WE}(t)} = \frac{1/(j\omega C)}{R+1/(j\omega C)}$

Transmitancja:

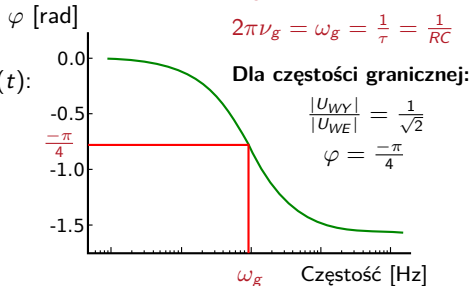
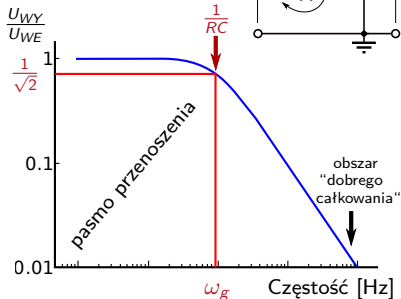
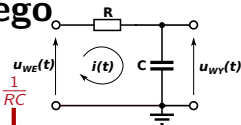
$$\frac{|U_{WY}|}{|U_{WE}|} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}}$$

Przesunięcie fazowe między $u_{WY}(t)$ a $u_{WE}(t)$:

$$\varphi = \arctan(-\omega RC) \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im}[Z_C/Z]}{\operatorname{Re}[Z_C/Z]}$$

Pasmo transmisji (przenoszenia) filtra dolnoprzepustowego w skali częstotliwości:

od 0 do ω_g



Efekt całkowania sygnału

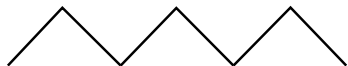


$u_{WE}(t)$

$$\propto 1 - \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$$

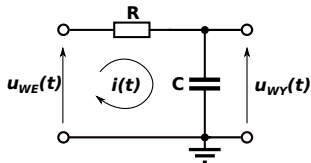


$$u_{WY}(t) = \frac{1}{RC} \int [u_{WE}(t) - u_{WY}(t)] dt$$



dla $U_{WY} \ll U_{WE}$

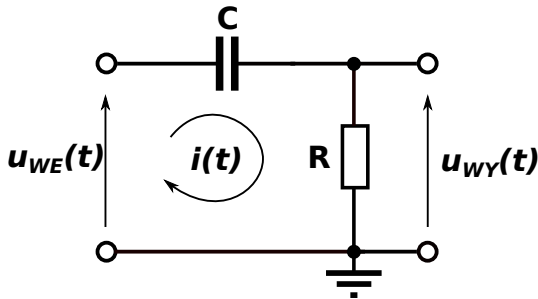
$$u_{WY}(t) \approx \frac{1}{RC} \int u_{WE}(t) dt$$



Zastosowanie filtra dolno-przepustowego:

- filtracja sygnałów (np. eliminacja zakłóceń)
- kształtowanie sygnałów

Obwód różniczkujący - filtr górno-przepustowy



Napięcie wyjściowe:

$$u_{WY}(t) = u_R(t) = Ri(t)$$

$$u_{WY}(t) = RC \frac{d}{dt} [u_{WE}(t) - u_{WY}(t)]$$

Prąd płynący w obwodzie:



$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{d}{dt} (u_{WE}(t) - u_{WY}(t))$$

gdy $u_{WY} \ll u_{WE}$:

$$u_{WY}(t) = RC \frac{d}{dt} u_{WE}(t)$$

Charakterystyka filtra górno-przepustowego

Dla sygnału harmonicznego: $u_{WE}(t) = U_{WE}e^{j\omega t}$

Filtr RC można sprowadzić do **dzielnika napięcia**, wtedy sygnał wyjściowy:

$$u_{WY}(t) = \frac{u_{WE}(t)R}{Z}$$

Stosunek napięć: $\frac{u_{WY}(t)}{u_{WE}(t)} = \frac{R}{R+1/(j\omega C)}$

Transmitancja:

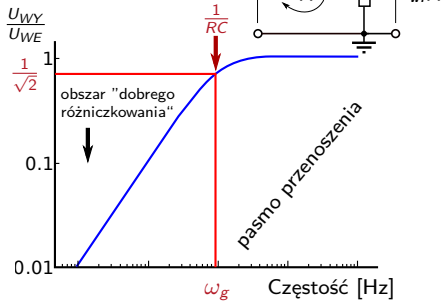
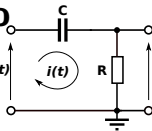
$$\frac{|U_{WY}|}{|U_{WE}|} = \frac{\omega RC}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}}$$

Przesunięcie fazowe między $u_{WY}(t)$ a $u_{WE}(t)$:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right) \quad \text{tg}\varphi = \frac{\text{Im}[R/Z]}{\text{Re}[R/Z]}$$

Pasmo transmisji (przenoszenia) filtra dolnoprzepustowego w skali częstotliwości:

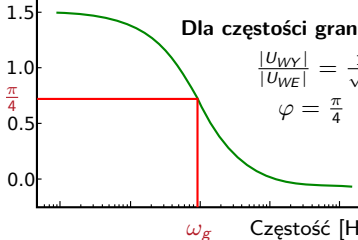
od ω_g do ∞



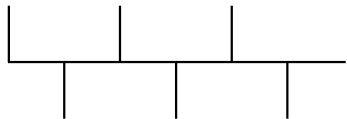
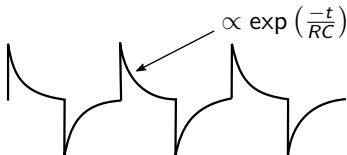
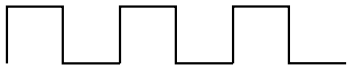
$$\varphi \text{ [rad]} \quad 2\pi\nu_g = \omega_g = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$$

Dla częstotliwości granicznej:

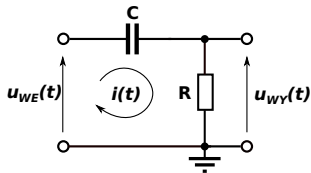
$$\frac{|U_{WY}|}{|U_{WE}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$



Efekt różniczkowania sygnału



$$u_{WE}(t)$$



$$u_{WY}(t) = RC \frac{d}{dt} [u_{WE}(t) - u_{WY}(t)]$$

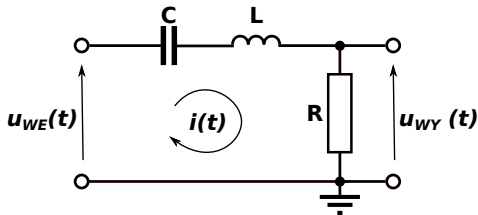
$$\text{dla } U_{WY} \ll U_{WE}$$

$$u_{WY}(t) \approx \frac{d}{dt} u_{WE}(t)$$

Zastosowanie filtra dolno-przepustowego:

- filtracja sygnałów (np. eliminacja składowej stałej)
- kształtowanie sygnałów
- szybkie wykrywanie zboczy sygnałów

Obwód rezonansowy szeregowy



Napięcie wejściowe:

$$u_{WE}(t) = u_C(t) + u_L(t) + u_R(t)$$

Równanie ruchu ładunku elektrycznego

$$u_{WE}(t) = \frac{q}{C} + L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt}$$

Ustalamy źródło energii elektrycznej: $u_{WE}(t) = U_0 e^{j\omega t}$

→ sygnał harmoniczny o częstotliwości kołowej ω i amplitudzie U_0

→ zmienna siła elektromotoryczna $E(t) = \text{Re}[u_{WE}(t)]$

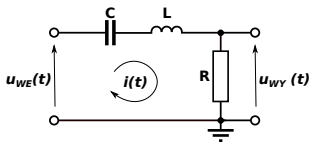
→ prąd płynący w obwodzie: $i(t) = I_0 e^{j\omega t}$

Impedancja układu: $\frac{U_0}{I_0} = Z = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R$

Układ rozważany jako dzielnik napięcia:

$$u_C(t) = \frac{1/(j\omega C) u_{WE}(t)}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)} \quad u_L(t) = \frac{j\omega L u_{WE}(t)}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)} \quad u_R(t) = \frac{R u_{WE}(t)}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)}$$

Charakterystyka filtra rezonansowego szeregowego



Dla sygnału harmonicznego: $u_{WE}(t) = U_{WE} e^{j\omega t}$

Napięcie wyjściowe:

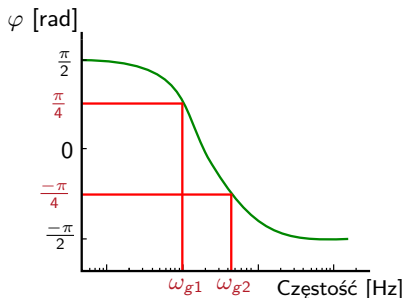
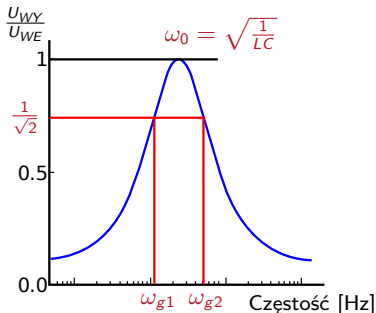
$$u_{WY}(t) = \frac{u_{WE}(t)R}{Z} = \frac{R u_{WE}(t)}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)}$$

Transmitancja:

$$\frac{|U_{WY}|}{|U_{WE}|} = \frac{R}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Przesunięcie fazowe między $u_{WY}(t)$ a $u_{WE}(t)$:

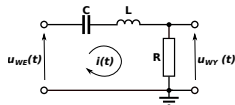
$$\varphi = \arctan\left(\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC}\right) \quad \text{tg}\varphi = \frac{\text{Im}[R/Z]}{\text{Re}[R/Z]}$$



Częstotliwość rezonansowa obwodu RLC

Napięciowe źródło sygnału harmonicznego:

$$u_{WE}(t) = U_0 e^{j\omega t}$$



Dla częstotliwości rezonansowej: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow \text{Im}(Z) = 0$

→ **amplituda napięcia wyjściowego osiąga wartość największą**

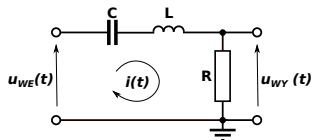
→ amplitudy napięć na elementach:

$$U_R = U_0 \qquad U_L = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad U_C = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

→ **znika łączna impedancja elementów reaktancyjnych: $Z = R$**

→ napięcia na kondensatorze i indukcyjności osiągają wartości maksymalne (ich amplitudy mogą nawet przekroczyć amplitudę napięcia wejściowego)

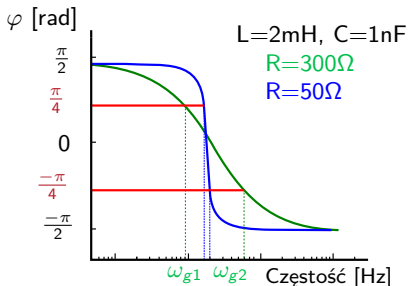
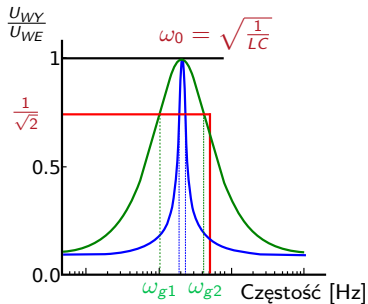
Pasmo przenoszenia filtra rezonansowego szeregowego



- Pasmo przenoszenia zlokalizowane jest w okolicach częstotliwości rezonansu: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
- Pasmo przenoszenia filtra rozciąga się od ω_{g1} do ω_{g2} - częstotliwości graniczne
- Dla częstotliwości granicznych:

$$\frac{|U_{WY}|}{|U_{WE}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\varphi| = \frac{\pi}{4}$$



Dobroć obwodu

- Dobroć wyraża stosunek energii zmagazynowanej w układzie rezonansowym (E_L) do mocy traconej (P) w ciągu jednego okresu drgań (T) przy częstotliwości rezonansowej:

$$Q = \frac{2\pi E_L}{T P}$$

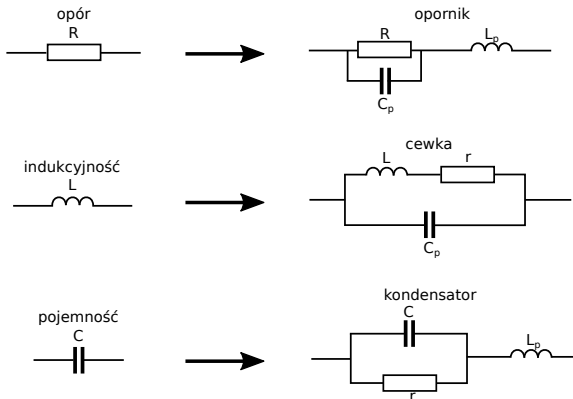
- Dobroć można wyrazić przez amplitudy napięcia dla częstotliwości rezonansowej:

$$Q = \frac{U_L}{U_0} = \frac{U_C}{U_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Magazynowanie energii w elementach reaktancyjnych obwodu rezonansowego o wysokiej dobroci i wywołane przez nie „podbijanie” napięcia jest wykorzystywane do filtracji i transformowania sygnałów o określonej częstotliwości

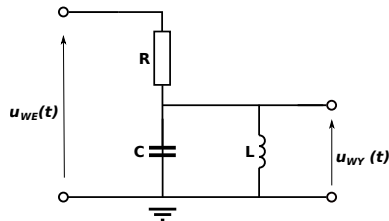
Rzeczywiste bierne elementy układów

- Opór, indukcyjność i pojemność to pojęcia teoretyczne
- Rzeczywiste konstrukcje - opornik, cewka czy kondensator zawierają **wielkości pasożytnicze** (z indeksem p) i są złożonym układem impedancji



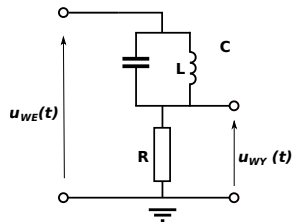
Przy pewnych częstotliwościach sygnału wielkości pasożytnicze mogą istotnie zniekształcić własności elementu

Filtr rezonansowy równoległy



$$u_{WY}(t) = u_{WE}(t) \frac{(j\omega C + \frac{1}{j\omega L})^{-1}}{R + (j\omega C + \frac{1}{j\omega L})^{-1}}$$

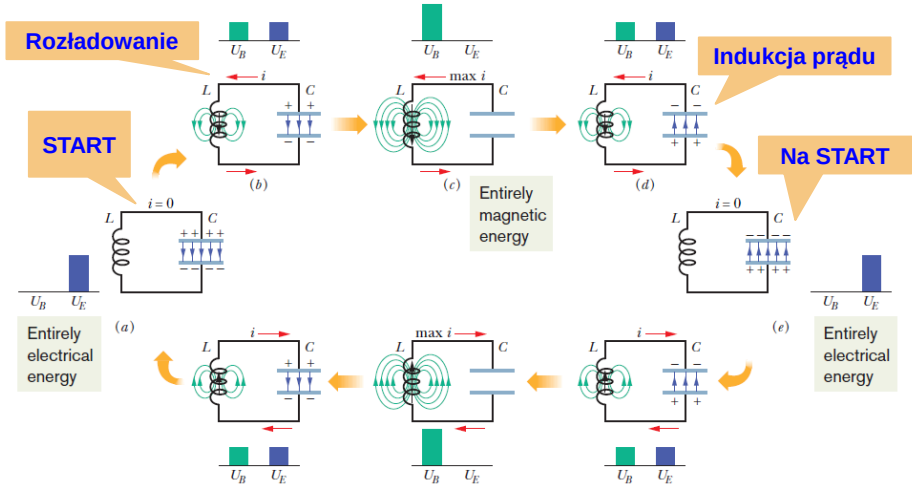
Dla częstotliwości rezonansowej napięcie wyjściowe osiąga wartość największą



$$u_{WY}(t) = u_{WE}(t) \frac{R}{R + (j\omega C + \frac{1}{j\omega L})^{-1}}$$

Dla częstotliwości rezonansowej napięcie wyjściowe osiąga wartość najmniejszą

Dodatek - magazynowanie energii w układzie LC



Drgania układu LC

- ▶ **START** – zaczynamy od całkowicie naładowanego kondensatora. Prąd nie płynie, cała energia pochodzi z pola elektrycznego kondensatora:

$$E_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

- ▶ **ROZŁADOWANIE** – kondensator się rozładowuje, przez układ zaczyna płynąć prąd. Energia kondensatora maleje, rośnie energia cewki:

$$E_B = \frac{1}{2} LI^2$$

- ▶ **INDUKCJA PRĄDU** w cewce – malejący prąd przepływający przez cewkę indukuje w niej prąd, który podtrzymuje pierwotny prąd. Ładuje wtedy kondensator, ale z przeciwną polarnością.
- ▶ **NA START**- cykl powtarza się, ale prąd płynie w **przeciwną stronę**.

