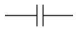
Układy złożone z elementów biernych

Bierne elementy elektroniczne to:

opór (R) 

indukcyjność (L)

pojemność (C) 

Uogólnienie prawa Ohma dla prądów zmiennych: $\boxed{i =: f(t)}$

napięcie *u(t)* jest liniowym funkcjonałem prądu *i(t)*

opór R: $u(t) = Ri(t)$

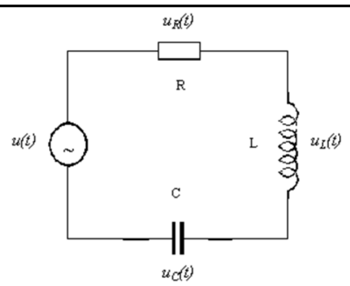
indukcyjność L: $u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

pojemność C: $u(t) = \dfrac{q(t)}{C} = \dfrac{1}{C}\int i(t)dt$

Prawa Kirchhoffa obowiązują !!!

Rezystancja R ➔➔➔ Impedancja Z

Szeregowy obwód RLC



Źródło napięciowe *u(t)* o zmiennej sile elektromotorycznej *E*(t)=Re [*u(t)*]

Z drugiego prawa Kirchhoffa: $u(t)=u_R(t)+u_L(t)+u_C(t)$

Równanie ruchu ładunku elektrycznego: $u(t) = Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{\int i(t)dt}{C}$

Prąd płynący w obwodzie: $i(t) = \dfrac{u_R(t)}{R}$

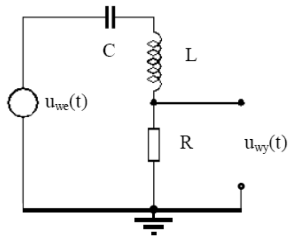
czyli: $u(t) = u_R(t) + \dfrac{L}{R}\dfrac{du_R(t)}{dt} + \dfrac{\int u_R(t)dt}{RC}$

jeśli $u(t) = U_0 \cdot e^{j\omega t}$ ➔ impedancja $\boxed{\dfrac{U_0}{I_o} = Z = R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}}$

Obwód rezonansowy szeregowy - częstość rezonansowa

Szeregowy układ RLC:
- napięciowe źródło sygnału przemiennego
- częstość ω
- amplituda U_0

$$u_{we}(t) = U_0 \sin \omega t$$



Z zasady **dzielnika napięcia**:

$$u_C(t) = \frac{u_{we}(t) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \qquad u_L(t) = \frac{j\omega L \cdot u_{we}(t)}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \qquad u_{WY}(t) = u_R(t) = \frac{R \cdot u_{we}(t)}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

Dla **częstości rezonansowej** $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ ➡ Im(Z) = 0

- amplituda napięcia wyjściowego osiąga **wartość największą**
- amplitudy napięć na elementach obwodu mają wartości:

$$U_R = U_0 \qquad U_L = \frac{U_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad U_c = \frac{U_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- znika łączna impedancja elementów reaktancyjnych ➔ impedancja obwodu = R
- napięcia na kondensatorze i indukcyjności osiągają wartości maksymalne
- W rezonansie amplitudy napięcia na indukcyjności lub na pojemności mogą przekroczyć amplitudę napięcia wejściowego !!!

DOBROĆ OBWODU

Wielkość: $$Q = \frac{U_L}{U_0} = \frac{U_C}{U_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$ **dobroć obwodu**

amplitudy dla częstości rezonansowej !!!

Ogólna definicja:
Dobroć wyraża stosunek energii zmagazynowanej w układzie rezonansowym (E_L) do mocy traconej *(P)* w ciągu jednego okresu drgań *(T)* przy częstości rezonansowej

Inna postać wyrażenia na dobroć: $$Q = \frac{U_L}{U_0} = \frac{|j\omega_0 L|}{R} = \frac{2\pi}{T}\frac{(\frac{1}{2} I_0^2 L)}{(\frac{1}{2} I_0^2 R)} = \frac{2\pi}{T}\frac{E_L}{P}$$

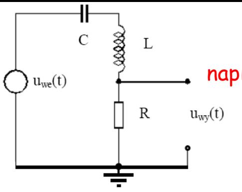
Magazynowanie energii w elementach reaktancyjnych obwodu rezonansowego o wysokiej dobroci i wywołane przez nie „podbijanie" napięcia jest wykorzystywane do filtracji i transformowania sygnałów o określonej częstości

Filtr rezonansowy szeregowy

Dzielnik napięcia !!!

Sygnał wejściowy harmoniczny, częstość ω

$$u_{we}(t) = U_{we} e^{j\omega t}$$



napięcie wyjściowe := napięcie na oporniku

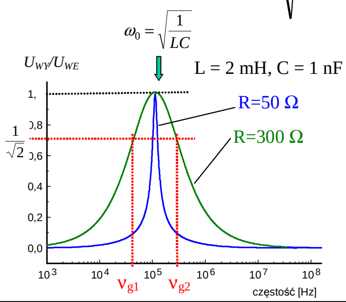
$$u_{wy}(t) = u_R(t) = \frac{R u_{we}(t)}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

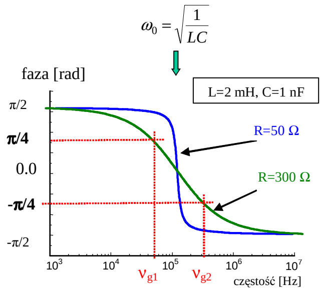
Transmitancja obwodu:
Stosunek **amplitud** napięcia wyjściowego do wejściowego:

$$\frac{|u_{wy}(t)|}{|u_{we}(t)|} = \frac{|U_{wy}|}{|U_{we}|} = \frac{R}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Przesunięcie fazowe między napięciem wyjściowym i wejściowym:

$$tg\varphi = \frac{\mathrm{Im}\frac{R}{Z}}{\mathrm{Re}\frac{R}{Z}} \qquad \varphi = \arctan\frac{1-\omega^2 LC}{\omega RC}$$

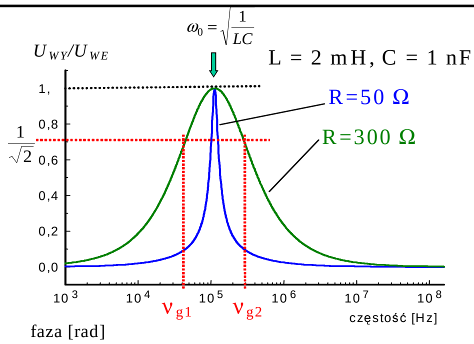


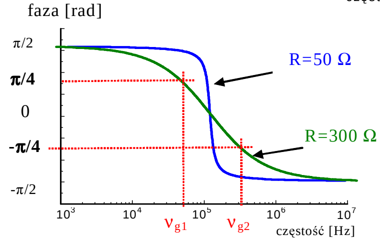


Filtr rezonansowy szeregowy c.d.

Pasmo przenoszenia
zlokalizowane jest
w okolicach częstości rezonansu:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$



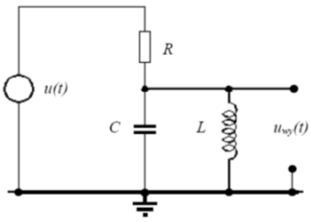


Pasmo przenoszenia filtru rozciąga się od νg_1 do νg_2 - *częstości graniczne*

Dla częstości granicznych: $\frac{|U_{wy}|}{|U_{we}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad |\varphi| = \frac{\pi}{4}$

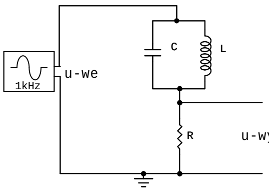
Dobroć: $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

Filtr rezonansowy równoległy



$$u_{wy}(t) = u(t)\frac{\left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L}\right)^{-1}}{R + \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L}\right)^{-1}}$$

Dla **częstości rezonansowej** $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ **napięcie wyjściowe osiąga wartość największą**



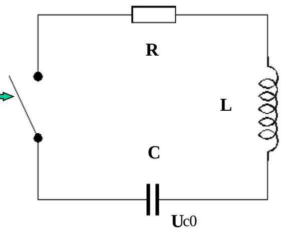
$$u_{wy}(t) = u(t)\frac{R}{R + \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L}\right)^{-1}}$$

Dla **częstości rezonansowej** $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ **napięcie wyjściowe osiąga wartość najmniejszą**

→ *filtr pasmowy zaporowy*

Obwód drgań elektrycznych (obwód RLC)

kondensator naładowany do napięcia U_{C0}



Równanie ruchu ładunku w obwodzie:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{\int i dt}{C} = 0$$

różniczkujemy: $L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$ **zakładamy** postać rozwiązania: $i(t) = Ae^{\alpha t}$

podstawiamy do równania różniczkowego → równanie algebraiczne: $L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C} = 0$

pierwiastki równania kwadratowego: $\alpha_1 = -\frac{R + \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$ $\alpha_2 = -\frac{R - \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$

Rozwiązanie równania kombinacją liniową rozwiązań z α_1 i α_2: $i(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$

Amplitudy A_1 i A_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$i(0) = 0 = A_1 + A_2, \Rightarrow A_1 = -A_2 \qquad U_{C0} = [L\frac{di}{dt} + Ri]\Big|_{t=0} = LA_1(\alpha_1 - \alpha_2) \Rightarrow A_1 = \frac{U_{C0}}{L(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

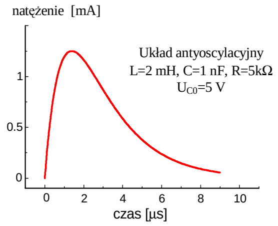
Przypadki:

1. $R^2 \ge \frac{4L}{C}$

$\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$ jest liczbą rzeczywistą,

rozwiązania mają charakter dwuwykładniczy:
po wzbudzeniu prąd w obwodzie **zanika**

$$i(t) = A_1(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t})$$

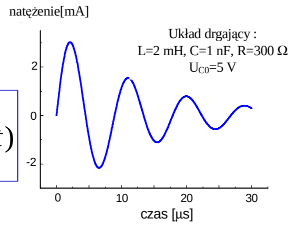


2. $R^2 < 4\frac{L}{C}$

$\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$ jest liczbą urojoną

rozwiązania mają **charakter oscylacyjny**:

$$i(t) = \frac{U_{C0}}{L\omega_x} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega_x t)$$



częstość oscylacji: $\omega_x = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

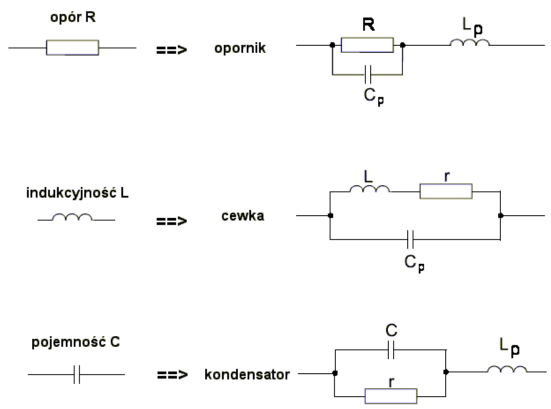
$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad \Rightarrow e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

Przypadek szczególny, gdy *R=0*:

drgania niegasnące $i(t) = U_{C0}\sqrt{\frac{C}{L}}\sin(\omega_0 t)$ **częstość oscylacji**: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Opór, indukcyjność i pojemność to pojęcia teoretyczne

Rzeczywiste konstrukcje - opornik, cewka czy kondensator zawierają **wielkości pasożytnicze** (z indeksem *p*)



Przy pewnych częstościach sygnału wielkości pasożytnicze mogą istotnie zniekształcić własności elementu

Każdy rzeczywisty bierny element elektroniczny jest złożonym układem impedancji

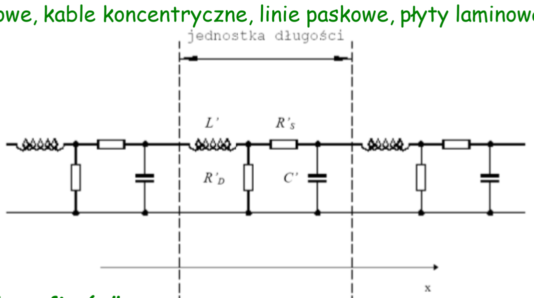
Elementy bierne o parametrach rozłożonych:

Rezystancja, indukcyjność i pojemność nie są zlokalizowane w konkretnych punktach, lecz są rozłożone w przestrzeni układu

Tak należy traktować układ, gdy rozmiary geometryczne układu są porównywalne lub większe od długości transmitowanej fali

Linie przesyłowe, kable koncentryczne, linie paskowe, płyty laminowane itd.

Model linii długiej:

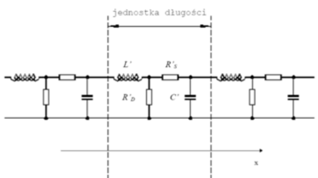


Układ „równań telegrafistów":

Spadek napięcia wzdłuż linii przesyłowej: $$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = L'\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + R'_S\, i(x,t)$$

Straty prądu: $$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = C'\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{u(x,t)}{R'_D}$$

linia bez strat $R'_S \to 0$ oraz $R'_D \to \infty$



➔ poprawne przybliżenie dla typowych warunków laboratoryjnych

$$\boxed{-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = L'\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}} \qquad \boxed{-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = C'\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}}$$

- Przypadek drgań o częstości ω wzbudzonych w linii bez strat:

Napięcie: $u(x,t)=u(x)e^{j\omega t}$ natężenie prądu: $i(x,t) = i(x)e^{j\omega t}$

$$=> \frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\omega^2 L'C' \cdot u(x) = -\gamma^2 \cdot u(x)$$

$$\gamma = \omega\sqrt{L'C'}$$ => stała propagacji

rozwiązanie równania:

$$u(x)=(A_1e^{-j\gamma x}+A_2e^{j\gamma x}) \rightarrow u(x,t)=(A_1e^{-j\gamma x}+A_2e^{j\gamma x})e^{j\omega t}$$

czyli

$$i(x)=(A_1e^{-j\gamma x}-A_2e^{j\gamma x})/Z \rightarrow i(x,t)=(A_1e^{-j\gamma x}-A_2e^{j\gamma x})e^{j\omega t}/Z$$

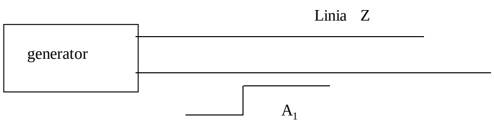
impedancja linii przesyłowej $\boxed{Z=\frac{\omega L'}{\gamma}=\frac{\omega L'}{\omega\sqrt{L'C'}}=\sqrt{\frac{L'}{C'}}}$

A_1 - amplituda fali biegnącą **zgodnie** z kierunkiem osi x

A_2 - amplituda fali biegnącej **w kierunku przeciwnym**.

DOŚWIADCZENIE MYŚLOWE

Nieskończenie długa linia bez strat połączona z generatorem sygnałów:

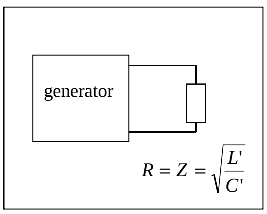


W układzie istnieje tylko fala propagująca się w kierunku osi X, czyli: $A_2=0$

$$\frac{u(x,t)}{i(x,t)}=Z \qquad Z=\sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

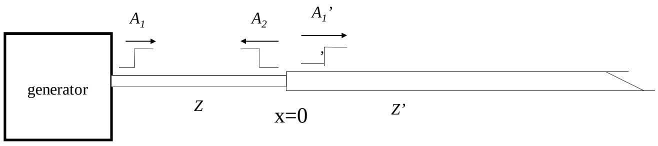
Impedancja falowa **nieskończenie długiej**

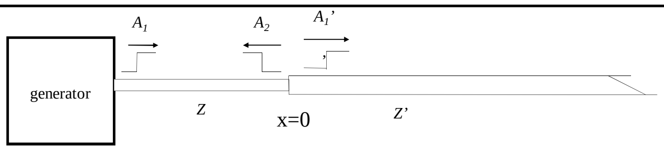
→ **obciążenie** dla generatora



Nieskończona linia jest równoważna oporowi o wartości $R = Z$

- Rzeczywiste linie transmisji mają zawsze skończoną długość
- Istnieje sygnał odbity od końca linii interferujący z sygnałem wysłanym
- Skończone linie w wielu doświadczeniach zachowują się analogicznie do rezystancji Z w czasie krótszym od podwójnego czasu propagacji sygnału przez nią.
- Impedancja falowa linii jest określona przez jej budowę
- W technice stosuje się linie o ustalonych standardach, np. 50 Ω (układy pomiarowe), 55 Ω, 110 Ω (układy transmisji danych), 75 Ω, 300 Ω (układy antenowe) i inne.





Z warunku ciągłości (po obu stronach złącza napięcia i prądy są równe) :

$$U_Z = A_1 + A_2 = A_1' = U_{Z'}$$

$$I_Z = \frac{A_1 - A_2}{Z} = \frac{A_1'}{Z'} = I_{Z'}$$

Stosunek amplitud A_2 / A_1 jest **współczynnikiem odbicia fali** na złączu dwóch linii:

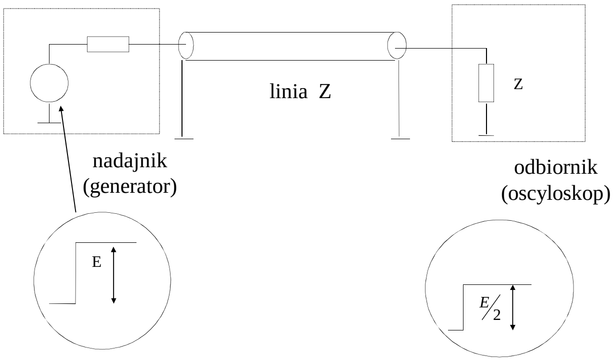
$$\boxed{\frac{A_2}{A_1} = \frac{Z' - Z}{Z' + Z}}$$

Na złączu linii **odbicie fali nie nastąpi**, gdy ich impedancje są sobie równe: Z=Z'

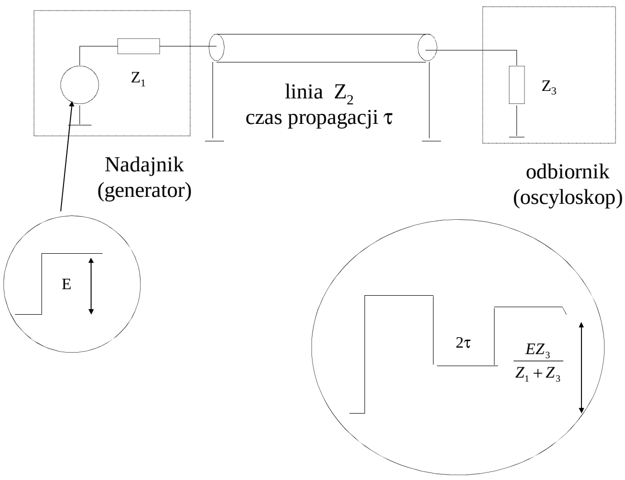
- **linia zakończona jest zwarciem**, Z'=0, współczynnik odbicia: $A_2/A_1 = -1$
  fala odbita od końca linii ma przeciwną fazę do fali padającej

- **linia jest rozwarta na końcu**, Z'→ ∞ współczynnik odbicia wynosi: $A_2/A_1=1$
  fala odbita ma tę samą fazę, co fala padająca **(interferencja konstruktywna)**

Bezodbiciowe zakończenie linii można osiągnąć przez zakończenie oporem *R=Z*

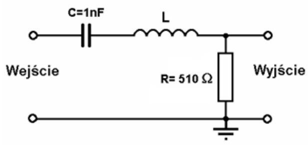


Brak dopasowania falowego:



Ćwiczenie 2

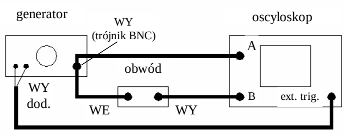
Filtr rezonansowy szeregowy
Obwody drgań elektrycznych



Dokonać pomiaru charakterystyki amplitudowej (transmitancji) dla sygnału harmonicznego

$$\frac{U_{wy}}{U_{we}}(\omega)$$

oraz fazowej – przesunięcia fazowego $\varphi(\omega)$



Na podstawie otrzymanych wyników ustalić indukcyjność cewki

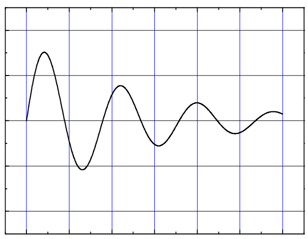
Przy pomocy drugiego (identycznego) kondensatora przebudować obwód tak, aby jego częstość rezonansowa wynosiła

$$\omega_0\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

Zastąpić opornik 510 Ω opornikiem 50 Ω i dokonać pomiaru częstości rezonansowej

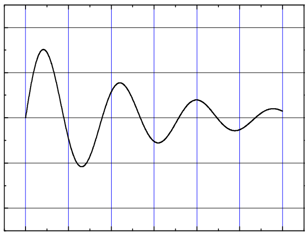
- Przemontować układ zamieniając miejscami opornik i kondensator
- Na wejście należy podać sygnał prostokątny o częstości 1kHz i maksymalnej amplitudzie
  Zbocza narastające i opadające tego sygnału pobudzają drgania w obwodzie
- Zaobserwować drgania ładunku w obwodzie oscylacyjnym

Dokonać pomiaru kształtu pojedynczego ciągu oscylacji, **rejestrując jego maksima i minima oraz przejścia przez zero**



- Nanieść na wykresy punkty doświadczalne
- Do zarejestrowanych przebiegów dopasować funkcję $U_0 e^{-\alpha t}$
- Na podstawie pomiaru stałej tłumienia wyznaczyć indukcyjność obwodu cewki
- **Dla poprawnej interpretacji wyników należy uwzględnić rezystancję wyjściową generatora (50 Ω)**
- *Czy pojemności kabli i rezystancja wejściowa oscyloskopu mają istotny wpływ na pracę obwodu oscylującego?*

Dopasowanie funkcji $U_0e^{-\alpha t}$ do danych doświadczalnych.



Tworzymy pomocniczy wykres (współrzędne : czas - napięcie, oś napięciowa - logarytmiczna) dla bezwzględnych wartości zarejestrowanych maksimów i minimów.

Punkty doświadczalne ułożą się wzdłuż prostej:

$log(|U|) = -\alpha * t + logU_0.$

Należy dopasować tę prostą do punktów doświadczalnych
Stąd znajdujemy współczynnik nachylenia α (współczynnik tłumienia dla funkcji wykładniczej) oraz amplitudę U_0