KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI wieku* współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ELEMENTARZ POMIARU I RACHUNKU BŁĘDU POMIAROWEGO

DLA STUDENTÓW OPTYKI OKULAROWEJ

Rafał Kasztelanic
Na podstawie wykładu dra hab. Zygmunta Szeflińskiego

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

POMIAR PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO METODĄ WAHADŁA MATEMATYCZNEGO

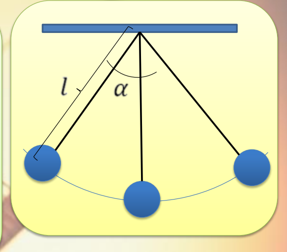
Wyznaczymy doświadczalnie wartość przyśpieszenia ziemskiego *g* badając zjawisko tzw. drgań harmonicznych („oscylator harmoniczny") pod wpływem siły ciężkości, w polu grawitacyjnym Ziemi.

$$T \cong 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$

$$\boxed{g \cong 4\pi^2 \frac{l}{T^2}} \quad (2)$$

l — długość wahadła

T — okres wahań



Rafał Kasztelanic

IDEA POMIARU

Mierzymy: *T* i *l*

ze wzoru $g \cong 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$ **obliczamy g.**

Mówimy, że *T* i *l* są wyznaczane w pomiarach bezpośrednich, zaś *g* — w pomiarach pośrednich.

Zwróćmy uwagę na znak przybliżenia we wzorach, wynikający z przybliżonego charakteru przyjętego modelu zjawiska fizycznego (równania ruchu wahadła, przy małych wychyleniach).

Inne istotne elementy na które trzeba zwrócić uwagę:

- Zależność liniowa od *l*
- Zależność odwrotnie proporcjonalna do kwadratu *T*

Rafał Kasztelanic

POJĘCIA PODSTAWOWE

WIELKOŚĆ FIZYCZNA

Właściwość ciała lub zjawiska fizycznego, której można przypisać wartość liczbową.

POMIAR

Pewna sekwencja czynności doświadczalnych i obliczeniowych, prowadząca do wyznaczenia liczbowej wartości wielkości fizycznej. Ta wybrana sekwencja powinna minimalizować wpływ oddziaływań zewnętrznych na badane zjawisko i przyrządy pomiarowe.

Rafał Kasztelanic

POJĘCIA PODSTAWOWE

WYNIK POMIARU = WARTOŚĆ POMIARU ± NIEPEWNOŚĆ (BŁĄD) POMIARU

BŁĄD POMIARU

odstępstwo wyniku jednostkowego pomiaru od wartości prawdziwej, której na ogół nie znamy

Rafał Kasztelanic

Wyróżniamy dwa rodzaje błędów:

- **Błąd systematyczny**
- **Błąd przypadkowy**

W przyrodzie „wszystko oddziałuje ze wszystkim". Przygotowując pomiar staramy się uprościć sytuację przeprowadzając izolację danego zjawiska od innych zjawisk (wpływów zewnętrznych). To się do końca nie udaje, a skutek zauważamy w postaci błędu pomiarowego przypadkowego. Z kolei, błąd pomiarowy systematyczny może być spowodowany zbyt uproszczonym modelem teoretycznym zjawiska fizycznego, nie uwzględniającym pewnych istotnych czynników. Błąd ten jest trudniejszy do zauważenia — wymaga zmiany modelu teoretycznego lub co najmniej metody pomiaru.

Rafał Kasztelanic

BŁĄD POMIAROWY SYSTEMATYCZNY

stała, nieznana, wartość zmiany wyniku pomiaru, wynikająca z ograniczoności modelu fizycznego zjawiska, którym się (w danej chwili) posługujemy, ograniczoności metody pomiaru, czy też niewłaściwej kalibracji przyrządu pomiarowego; błąd ten ujawnia się zwykle dopiero po zmianie metody pomiaru lub modelu fizycznego zjawiska.

BŁĄD SYSTEMATYCZNY O ZNANEJ WARTOŚCI NAZYWAMY POPRAWKĄ.

Błąd systematyczny zwykle zmienia wyniki pomiaru jednostronnie.

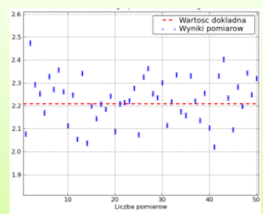
Dlatego też przy wielokrotnym powtarzaniu pomiaru nie jest możliwe wykrycie błędu systematycznego

Przykłady:
- zmiany obiektu badanego po dołączeniu do urządzenia lub układu pomiarowego
- wykonanie przyrządów pomiarowych - skalowanie lub wzorcowanie, montaż, itp.
- wpływ otoczenia na stanowisko pomiarowe.

BŁĄD POMIAROWY PRZYPADKOWY (STATYSTYCZNY)

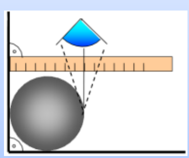
Średnia wartość zmiennych zaburzeń mierzonej wielkości fizycznej, pochodzących od wielu słabych oddziaływań zewnętrznych, lub skutek tzw. nieokreśloności obiektu. Błąd ten jest najczęściej nieznany, a wyznacza się go w pomiarach razem z wartością pomiaru, jako tzw. błąd pojedynczego pomiaru.

Błąd przypadkowy manifestuje się rozrzutem wartości pomiaru przy jego powtarzaniu



ŹRÓDŁA BŁĘDÓW PRZYPADKOWYCH

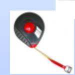
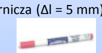
- **Błędy przypadkowe obiektu:**
  Małe a liczne zaburzenia pomiaru: efekty mechaniczne (zmienne tarcie, kurczliwość, wstrząsy), wahania napięcia zasilania przyrządów, prądy powietrza, rozpad promieniotwórczy, zmienne pola elektromagnetyczne, itp.
- **Błędy przypadkowe metody**
  np. błąd paralaksy



- **Błędy przypadkowe przyrządu**
  rozpad promieniotwórczy

POMIAR DŁUGOŚCI WAHADŁA

Przyrządy:
- liniał krótki (Δl = 1 mm)
- liniał długi (Δl = 1 mm)
- taśma miernicza (Δl = 5 mm)
- flamaster
- kartka papieru


POMIAR DŁUGOŚCI WAHADŁA

- **Pomiar liniałem a nie taśmą mierniczą**
  Wybór przyrządu — błąd przypadkowy przyrządu
- **Pomiar liniałem krótkim a nie długim i znakowanie flamastrem**
  Wybór metody — błąd przypadkowy metody: dokładność przyłożenia liniału, dokładność znakowania flamastrem
- **Liniał ma urwany koniec**
  Błąd systematyczny — poprawka lub błąd w pomiarach
- **Pomiar kartką papieru, flamastrem**
  Niestandardowe jednostki, problem z zamianą jednostek

Wynik pomiaru
d = 120,20 ± 0,14 [cm]

OBLICZANIE BŁĘDU PRZYPADKOWEGO

Niech:
x – wielkość fizyczna mierzona,
x_i – wartości zmierzone, gdzie: $i = 1, \ldots, n$
n – liczba pomiarów.

Szukamy tzw. „wartości prawdziwej" μ wielkości fizycznej x, dysponując n liczbami–wynikami pomiarów.

Czy będzie to któraś z nich? Która? Może wszystkie? Jakaś średnia?

Poszukujemy również wartości błędu pomiarowego pojedynczego pomiaru σ, charakteryzującej warunki pomiaru (liczba, „ukryta" w rozrzucie wartości x_i).

OBLICZANIE BŁĘDU PRZYPADKOWEGO

Średnia wyników pomiaru („wynik pomiaru")

$$\mu \cong \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad (3)$$

Błąd pojedynczego pomiaru (średni kwadratowy)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n}} \quad (4)$$

Rafał Kasztelanic

OBLICZANIE BŁĘDU PRZYPADKOWEGO

W miejsce μ we wzorze (4) możemy podstawić $\bar{x}$ ze wzoru (3).
Okazuje się jednak, że wtedy należy w mianowniku (4) zamienić „n" na „n-1":

$$\sigma \cong \Delta x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (5)$$

W teorii informacji takie powiększenie wartości błędu („n-1" zamiast „n" w mianowniku) odzwierciedla powiększenie niepewności statystycznej wskutek mniejszej dostępnej informacji (zamiast ścisłej wartości μ dysponujemy tylko jej przybliżeniem $\bar{x}$).

Rafał Kasztelanic

OBLICZANIE BŁĘDU PRZYPADKOWEGO

- x przyjmowane jest za „wartość pomiaru".
- Δx nie jest jeszcze „błędem pomiarowym" („błędem wartości pomiaru").
- Jest to dopiero błąd pojedynczego pomiaru, charakteryzujący same warunki pomiaru.
- Błąd wartości pomiaru będzie zależny również od krotności pomiarów n:

Błąd wartości średniej („BŁĄD POMIAROWY")

$$\Delta\bar{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

Rafał Kasztelanic

OBLICZANIE BŁĘDU PRZYPADKOWEGO

WYNIK POMIARU

$$\bar{x} \pm \Delta\bar{x} \quad (7)$$

gdzie:
$\bar{x}$ – wartość pomiaru
$\Delta\bar{x}$ – błąd pomiarowy

Często podawany jest WZGLĘDNY BŁĄD POMIAROWY

$$\frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (8)$$

Uwaga !
W podanych błędach pomiarowych nie uwzględniono jeszcze błędu przypadkowego przyrządu

Rafał Kasztelanic

BŁĄD PRZYPADKOWY PRZYRZĄDU

Przyrząd jest źródłem dodatkowej składowej błędu przypadkowego — błędu przypadkowego przyrządu.

W statystyce matematycznej obowiązuje zasada „sumowania" różnych składowych błędu przypadkowego. Jest to sumowanie specjalnego rodzaju — tzw. „suma kwadratów pod pierwiastkiem".

Zgodnie z tą zasadą całkowite błędy przypadkowe pomiarów dane są wzorem:

$$\Delta x_C \approx \sqrt{(\Delta\bar{x})^2 + \left(\Delta x_p\right)^2} \quad (9)$$

gdzie:
Δx_C – błąd całkowity
Δx_p – błąd przyrządu

Rafał Kasztelanic

WYNIK POMIARU WIELKOŚCI FIZYCZNEJ

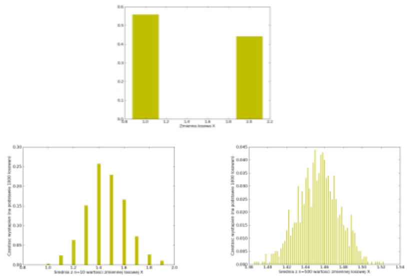
Ostateczny wynik pomiaru wielkości fizycznej x:

$$\bar{x} \pm \Delta x_C \quad (10)$$

Rafał Kasztelanic

ROZKŁAD NORMALNY

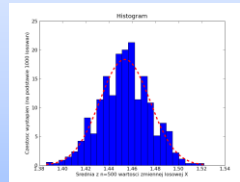
Rozpatrzmy przykładowy, dowolnie wybrany, eksperyment losowy, np. rzut nierzetelną monetą:



ROZKŁAD NORMALNY

Centralne twierdzenie graniczne

Dla dowolnego rozkładu prawdopodobieństwa, średnia z dużej liczby wartości losowań dąży do rozkładu normalnego (Gaussa):



$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ZALEŻNOŚĆ OD LICZBY POMIARÓW

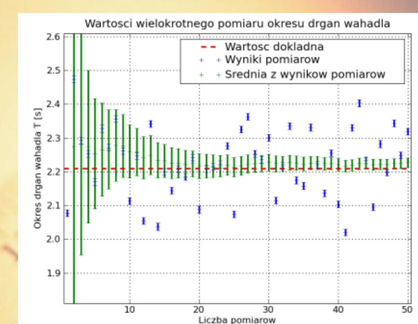
Wraz ze wzrostem liczby dokonywanych pomiarów zmieniają się wartości:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma = const$$

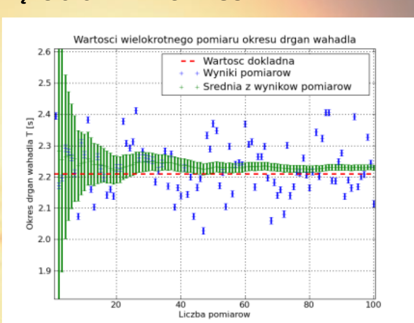
$$\Delta\bar{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{const}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu = const'$$

DLA BŁĘDU PRZYPADKOWEGO



DLA BŁĘDU SYSTEMATYCZNEGO



PRAWO PROPAGACJI BŁĘDU POMIAROWEGO

Wiemy już, jak obliczać błędy pomiarowe wielkości fizycznych bezpośrednio mierzonych, np. okresu wahań *(T)* i długości wahadła *(l)* w naszych pomiarach.

Jak obliczyć błąd pomiarowy wielkości określanej pośrednio w naszych pomiarach — przyspieszenie ziemskie *(g)*?

OGÓLNIE

Chcemy wyznaczyć doświadczalnie wartość wielkości fizycznej f mierząc inną wielkość fizyczną x, związaną z f zależnością funkcyjną:

$$f = f(x)$$

FUNKCJA JEDNEJ ZMIENNEJ

Niech:

x – wielkość fizyczna bezpośrednio mierzona

$\bar{x} \pm \Delta x_c$ – wynik jej pomiaru

? Jaki jest wynik pomiaru f ?
$f \pm \Delta f$

Zgodnie z intuicją $\bar{f} = f(\bar{x})$

Rafał Kasztelanic

FUNKCJA JEDNEJ ZMIENNEJ

Chcąc obliczyć błąd pomiarowy *Δf* trzeba już znać rachunek różniczkowy

W statystyce matematycznej pokazuje się, że:

$$\Delta f \cong \left|\frac{df}{dx}(\bar{x})\right| \cdot \Delta x_c \qquad (11)$$

Wielkość $\frac{df}{dx}$ to tzw. pochodna funkcji $f(x)$ po zmiennej x.

Jest ona również funkcją zmiennej x.

Jak widać, błąd pomiarowy Δf otrzymujemy podstawiając do tej funkcji wartość $x = \bar{x}$ biorąc wartość bezwzględną wyniku (celem pozbycia się możliwego znaku ujemnego) i mnożąc go przez błąd pomiarowy Δx_c.

Rafał Kasztelanic

PRZYKŁAD

Chcemy wyznaczyć pole powierzchni koła.

$$S = S(x) = \pi\frac{x^2}{4}$$

W tym celu mierzymy jego średnicę d.
Wynik pomiaru średnicy:

$$\bar{x} \pm \Delta x_C$$

Z pomiarów wyznaczamy S:

$$S = \pi\frac{\bar{x}^2}{4}$$

Rafał Kasztelanic

PRZYKŁAD

Ze wzoru (11) błąd pomiaru pola powierzchni koła:

$$\Delta S \cong \left|\frac{dS}{dx}(\bar{x})\right| \cdot \Delta x_c = \left|2\frac{\pi\bar{x}^{2-1}}{4}\right| \cdot \Delta x_c = \frac{\pi\bar{x}}{2} \cdot \Delta x_c$$

Obliczmy błąd względny pomiaru S:

$$\frac{\Delta S}{S} \cong \frac{\frac{\pi\bar{x}}{2} \cdot \Delta x_c}{\frac{\pi\bar{x}^2}{4}} = 2\frac{\Delta x_c}{\bar{x}}$$

Rafał Kasztelanic

PRZYKŁAD

Widać, że błąd względny pomiaru powierzchni koła jest równy podwojonemu błędowi względnemu pomiaru jego średnicy.

Ta „dwójka” ma związek z faktem występowania we wzorze na powierzchnię koła średnicy w potędze „2”!

Sugeruje to pewną ogólną regułę ...

Ile wynosi błąd względny pomiaru objętości kuli wyznaczony z pomiaru jej średnicy?

Rafał Kasztelanic

FUNKCJA DWÓCH ZMIENNYCH

Niech:
$f = f(x, y)$

gdzie:
x, y – wielkości fizyczne bezpośrednio mierzone

$\bar{x} \pm \Delta x_C$, $\bar{y} \pm \Delta y_C$ – wyniki pomiarów

Jaki jest wynik pomiaru f:

$$\bar{f} \pm \Delta f \qquad (12)$$

Można się spodziewać, że:

$$\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

Rafał Kasztelanic

FUNKCJA DWÓCH ZMIENNYCH

Z kolei, w wyrażeniu na Δf pojawią się dwa wyrażenia podobne do prawej strony wzoru (11), dla każdej zmiennej.

W statystyce matematycznej pokazuje się, że:

$$\Delta f \cong \sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x},\bar{y})\cdot\Delta x_c\right)^2+\left(\frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x},\bar{y})\cdot\Delta y_c\right)^2} \qquad (13)$$

Wielkość $\frac{\delta f}{\delta x}$ to tzw. pochodna cząstkowa funkcji f(x, y) po zmiennej x;

podobnie jest dla zmiennej y.

Pochodną cząstkową po danej zmiennej wyznacza się tak samo jak „zwykłe" pochodne, traktując w tym rachunku pozostałe zmienne jak stałe.

Rafał Kasztelanic

OBLICZENIE BŁEDU POMIAROWEGO PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO

W przyjętej metodzie pomiaru przyspieszenie ziemskie jest funkcją dwóch zmiennych bezpośrednio mierzonych, *T* i *l*:

$$g = g(T,l) \cong 4\pi^2\frac{l}{T^2}$$

Jest to szczególna forma funkcji potęgowej dwóch zmiennych.
Dla obliczeń Δg dysponujemy już zmierzonymi wartościami: *T*, *l* oraz ΔTc, Δlc.

Rafał Kasztelanic

OBLICZENIE BŁEDU POMIAROWEGO PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO

Korzystając kolejny raz ze wzoru (13) można, pokazać, że względny błąd pomiarowy wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego wynosi:

$$\frac{\Delta g}{\bar{g}} \cong \sqrt{\left(2\cdot\frac{\Delta T_c}{\bar{T}}\right)^2+\left(1\cdot\frac{\Delta l_c}{\bar{l}}\right)^2}$$

Stąd, znając wartość *g*, obliczymy błąd pomiarowy Δg.
Zwróćmy uwagę na współczynniki „2" i „1" pod kwadratami odpowiednich „cząstkowych" błędów względnych, wywodzące się, jak to wskazano w komentarzu do wzoru (11), od wykładników potęgowych we wzorze na *g*.

Rafał Kasztelanic

OBLICZENIE BŁEDU POMIAROWEGO PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO

Szczegóły obliczeń: $g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}$

$$\Delta g = \sqrt{\Big(\underbrace{\frac{dg}{dT}(\bar{T},\bar{l})}_{-4\pi^2\frac{2l}{T^3}}\cdot\Delta T_c\Big)^2+\Big(\underbrace{\frac{dg}{dl}(\bar{T},\bar{l})}_{4\pi^2\frac{1}{T^2}}\cdot\Delta l_c\Big)^2} = 4\pi^2\sqrt{\left(\frac{-2l}{T^3}\cdot\Delta T_c\right)^2+\left(\frac{1}{T^2}\cdot\Delta l_c\right)^2}$$

$$\frac{\Delta g}{\bar{g}} = \frac{\cancel{4\pi^2}\sqrt{\left(\frac{-2l}{T^3}\cdot\Delta T_c\right)^2+\left(\frac{1}{T^2}\cdot\Delta l_c\right)^2}}{\cancel{4\pi^2}\frac{l}{T^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{-2l}{T^3}\cdot\Delta T_c\right)^2+\left(\frac{1}{T^2}\cdot\Delta l_c\right)^2}{\frac{l^2}{T^4}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\cancel{l^2}T^4}{T^6\cancel{l^2}}\cdot\Delta T_c^2+\frac{\cancel{T^4}}{\cancel{T^4}l^2}\cdot\Delta l_c^2} = \sqrt{\frac{4}{T^2}\cdot\Delta T_c^2+\frac{1}{l^2}\cdot\Delta l_c^2}$$

Rafał Kasztelanic

BŁĄD ŚREDNIEJ

Zgodnie z równaniem (3):

$$\bar{x} = f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}$$

Błędy pojedynczych pomiarów są równe, a pomiary są niezależne

$$\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n$$

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2\cdot\Delta x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\cdot\Delta x_i^2} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}}$$

Wyprowadziliśmy wzór na błąd średniej (6)!

Rafał Kasztelanic

ZAOKRĄGLENIE WYNIKU

Zbliżamy się do końca naszych pomiarów.
Pozostaje jeszcze zaokrąglić we właściwy sposób otrzymane wyniki liczbowe.

Z punktu widzenia zagadnienia pomiaru liczby dzielą się na:

- liczby dokładne
- liczby przybliżone

Liczby przybliżone

- wyniki pomiarów (w tym wartość pomiaru i błąd pomiarowy)
- dane tablicowe (większość stałych matematycznych i fizycznych), np. 3,14 (liczba π, tak zapisana!). Wiele danych tablicowych jest przecież wynikami pomiarów.

Rafał Kasztelanic

ZAOKRĄGLENIE WYNIKU

Liczby dokładne

We wzorze na objętość kuli $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ liczby:
„4”, „3”, „3”, π, a więc:

- ▸ współczynniki liczbowe,
- ▸ wykładniki potęg,
- ▸ liczba π (tak zapisana !) **...**
- ▸ we wzorach matematycznych (i niektórych fizycznych)

są liczbami dokładnymi .

- ▸ podobnie, we wzorze zamiany jednostek: $1^0 = 60'$ liczby „1” i „60”

są liczbami dokładnymi.

POZOSTAŁE LICZBY TO LICZBY PRZYBLIŻONE

Rafał Kasztelanic

CYFRY ZNACZĄCE

Przykłady:

9,81 — 3 cyfry znaczące (c.z.)

9,8 — 2 c.z.

10 — 2 c.z.

10,0 — 3 c.z.

6050 — 4 c.z.

$1{,}23\cdot10^2$ — 3 c.z.

$1{,}300\cdot10^{13}$ — 4 c.z.

0,037 — 2 c.z.

0,0370 — 3 c.z.

Z punktu widzenia zagadnienia cyfr znaczących liczby przybliżone 0,037 i 0,0370 są różnymi liczbami!
Druga z nich (3 c.z.) jest bardziej dokładna , tj. „mniej” przybliżona niż pierwsza (2 c.z.).

**Cyfry znaczące danej liczby to wszystkie jej cyfry (także zera),
z wyjątkiem tzw. „zer poprzedzających”.**

Rafał Kasztelanic

CYFRY ZNACZĄCE

A teraz weźmy dwie liczby przybliżone o tej samej liczbie cyfr znaczących, lecz różniące się wartością: 0,58 i 0,000058.

Która z nich są jest bardziej dokładna?

Obie są przedstawione z tą samą dokładnością! Czym się różnią ?

W liczbie 0,58 pierwsza od prawej cyfra znacząca (8) — mówimy „najczulsza” — jest na pozycji dziesiętnej setnych, zaś w liczbie 0,000058 ta sama cyfra znacząca jest na pozycji milionowych.

Wniosek:
Cyfry znaczące to nie to samo co pozycje dziesiętne!

Rafał Kasztelanic

ZAOKRĄGLANIE LICZBY PRZYBLIŻONEJ

Weźmy np. liczbę przybliżoną U = 3,4

Jest to liczba o 2 cyfrach znaczących.

Możemy ją zaokrąglić, np. do 3 (1 c.z.).

**Zaokrąglanie liczby przybliżonej oznacza
zmniejszanie liczby jej cyfr znaczących**

Rafał Kasztelanic

ZAOKRĄGLANIE LICZBY PRZYBLIŻONEJ

Jak dokładna jest liczba przybliżona o danej liczbie cyfr znaczących?

W podanym przykładzie przy zaokrąglaniu „zginęła” wartość 0,4 co oznacza popełnienie błędu zaokrąglenia (szacunkowo):

$$\frac{0{,}4}{3{,}4} \approx 12\%$$

Można zaryzykować twierdzenie, że każda liczba przybliżona zapisana z dokładnością 1 c.z. (np. 0,7) jest – jak mówimy – zaokrąglona z dokładnością kilkunastu-kilkudziesięciu % (rzędu 10 %).

Rafał Kasztelanic

ZAOKRĄGLANIE LICZBY PRZYBLIŻONEJ

Liczba przybliżona ...	
... o liczbie cyfr znaczących	... ma dokładność zaokrąglenia (szacunkowo)
1	≈ kilkanaście-kilkadziesiąt %
2	≈ kilka %
3	≈ kilka dziesiątych %

Rafał Kasztelanic

ZAOKRĄGLANIE WYNIKÓW POMIARU

Najpierw zaokrąglamy błąd pomiarowy.

ZASADA I
Błąd pomiarowy zaokrąglamy do 1 lub co najwyżej 2 cyfr znaczących.

Niech obliczony błąd pomiarowy przyspieszenia ziemskiego:

$\Delta g \cong 0{,}3869\ldots \frac{m}{s^2}$

„ …" — oznacza, że liczba została jedynie wstępnie zaokrąglona (tu: do 4 c.z.).

Prawidłowo zaokrąglony błąd pomiaru przyspieszenia ziemskiego:

$\Delta g \cong 0{,}4 \frac{m}{s^2}$ lub $0{,}39 \frac{m}{s^2}$

Przedstawienie błędu z większą liczbą cyfra znaczących, np. $\Delta g \cong 0{,}387 \frac{m}{s^2}$ stwarzałoby fałszywe wrażenie większej dokładności (fikcyjna dokładność). Innymi słowy: cyfra 7 (tu: na pozycji tysięcznych) równie dobrze może być zastąpiona przez 6, 8, itp. Dlatego należy ją usunąć, wprowadzając głębsze zaokrąglenie.

Rafał Kasztelanic

ZAOKRĄGLANIE WYNIKÓW POMIARU

Dlaczego ?
Statystyka matematyczna pokazuje się, że błąd przypadkowy nie jest dokładnie określonym pojęciem — niepewność jego wyznaczenia jest rzędu kilkunastu do kilkudziesięciu procent , dla typowych, niewielkich krotności pomiaru (n). Jest to swoisty „błąd błędu", tym razem wynikający nie z warunków pomiaru a z samej statystyki ! Pozostawienie w zaokrąglanym błędzie pomiarowym większej liczby cyfr znaczących niż to zaleca zasada I oznaczałoby — kolejny raz — fikcyjną dokładność.

Wyjątek od ZASADY I
Błąd pomiarowy zaokrąglamy zawsze do 2 cyfr znaczących, jeśli pierwsza z lewej (mówimy — „najmocniejsza") cyfra znacząca jest 1.
W tym wypadku błąd zaokrąglenia wartości błędu pomiarowego może być stosunkowo duży — większy niż kilkanaście procent (dlaczego ?). W związku z tym celowym będzie pozostawienie w zaokrąglanym błędzie pomiarowym większej liczby cyfr znaczących.

Rafał Kasztelanic

ZAOKRĄGLANIE WYNIKÓW POMIARU

Po zaokrągleniu błędu pomiarowego przystępujemy do zaokrąglania wartości pomiaru.

ZASADA II
Wartość pomiaru zaokrąglamy do tej pozycji dziesiętnej , na której znajduje się pierwsza od prawej („najczulsza") cyfra zaokrąglonego błędu pomiarowego.

Niech określona w wyniku pomiarów wartość przyspieszenia ziemskiego podana jest jako:

$$g \cong 9{,}6791\ldots \frac{m}{s^2}$$

gdzie, podobnie jak poprzednio, „ **…" oznacza, że liczba ta** została wstępnie zaokrąglona (do 5 c.z.)
Prawidłowo zaokrąglona wartość pomiaru przyspieszenia ziemskiego, odpowiednio do stopnia przeprowadzonego uprzednio zaokrąglenia błędu pomiarowego:

$g \cong 9{,}7 \frac{m}{s^2}$ lub $g \cong 9{,}68 \frac{m}{s^2}$

Rafał Kasztelanic

ZAOKRĄGLANIE WYNIKÓW POMIARU

Ostatecznie, wynik pomiaru:

$$g + \Delta g \cong 9{,}7 \pm 0{,}4 \ \frac{m}{s^2}$$

lub

$$g + \Delta g \cong 9{,}68 \pm 0{,}39 \ \frac{m}{s^2}$$

Rafał Kasztelanic

ZAOKRĄGLANIE WYNIKÓW POMIARU

Inne zapisy są nieprawidłowe, gdyż np.:

$9{,}7 \pm 0{,}39 \ \frac{m}{s^2}$

(wartość pomiaru zaokrąglona „za głęboko" w stosunku do błędu pomiarowego) oznacza stratę dokładności wartości pomiaru na zaokrągleniu w stosunku do (dobrej) dokładności pomiaru.

Z kolei **…**

$9{,}68 \pm 0{,}4 \ \frac{m}{s^2}$

(wartość pomiaru zaokrąglona „za płytko") oznacza fikcyjną dokładność wartości pomiaru w stosunku do (nie najlepszej) dokładności pomiaru.

Rafał Kasztelanic

ZAOKRĄGLANIE WYNIKÓW POMIARU

ZASADA III
Zasady I i II odnoszą się do zaokrąglania wyników końcowych pomiaru.

Wyniki pośrednie zaokrąglamy co najmniej o jedną cyfrę znaczącą „płycej" niż mówią zasady I i II.

I tak, „płycej" zaokrąglamy wyniki pomiarowe *T*, *l* a także ΔT, Δl oraz ΔT_c, Δl_c, przed podstawieniem ich do wzorów na *g* i Δg.

Normalnie (tj. wg zasad I i II) zaokrąglamy dopiero liczby przybliżone wyrażające *g* i Δg.

Dlaczego ?

Rafał Kasztelanic

BŁĄD PRAWDOPODOBNY

Wynik pomiaru:

$$\bar{x} \pm \Delta\bar{x}$$

oznacza, że prawdopodobieństwo, iż „wartość prawdziwa" µ znajduje się we wskazanym przedziale wynosi z **68.3%.**

Mający tę własność, wskazany błąd pomiarowy *Δx* jest nazywany błędem „1σ".

Moglibyśmy przyjąć za błąd pomiarowy wartość 2*Δx*.
Jak można pokazać w statystyce matematycznej „nowy" wynik pomiaru:

$$\bar{x} \pm 2\Delta\bar{x}$$

oznacza, że teraz „wartość prawdziwa" µ znajduje się we wskazanym przedziale z prawdopodobieństwem **95.4%** (tzw. błąd „2σ").

Nadal jednak nie jest to 100% … .

BŁĘDY SYSTEMATYCZNE – POPRAWKI WYNIKAJĄCE Z MODELU FIZYCZNEGO WAHADŁA

W badaniach fizycznych mamy zwykle do czynienia nie tyle z samym zjawiskiem, ile z jego fizycznym modelem .

Rzeczywistość spełnia założenia modelu tylko w pewnym stopniu — co jest przyczyną błędów systematycznych.

Dobre modele fizyczne i pomiary powinny umożliwiać wyznaczenie poprawek kompensujących błędy systematyczne.

Przeanalizujmy skutki przyjętych założeń upraszczających naszego modelu i możliwość poprawek do niego.

BŁĘDY SYSTEMATYCZNE – POPRAWKI WYNIKAJĄCE Z MODELU FIZYCZNEGO WAHADŁA

W przyjętym przez nas modelu drgań wahadła przyjęliśmy m.in., że jest ono tzw. wahadłem matematycznym, a więc punktem materialnym o pewnej masie zawieszonym na nieskończenie lekkiej nici.
To uproszczenie powoduje zawyżenie zmierzonej wartości *g*.
Poprawka będzie ujemna. Można ją oszacować liczbowo.

Kolejne uproszczenie dotyczy braku oporów ruchu: w ośrodku (powietrze) i w punkcie zawieszenia.
Powoduje ono zaniżenie (poprawka będzie dodatnia) zmierzonej wartości *g* (dlaczego?).
Można ją oszacować liczbowo, po dodatkowych pomiarach w tym samym, lecz udoskonalonym, układzie pomiarowym.

BŁĘDY SYSTEMATYCZNE – POPRAWKI WYNIKAJĄCE Z MODELU FIZYCZNEGO WAHADŁA

I wreszcie, założyliśmy, że kąt wychylenia wahadła z położenia równowagi *α* jest nieskończenie mały (warunek, aby ruch był harmoniczny).
To uproszczenie powoduje zaniżenie (poprawka będzie dodatnia) zmierzonej wartości *g*.
Tę poprawkę możemy wyliczyć:

$$g \cong 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\right)^2 sin^4\frac{\alpha}{2} + \cdots\right]$$

gdzie: *α* – kąt wychylenia wahadła.

REGRESJA LINIOWA

Załóżmy, że chcemy doświadczalnie sprawdzić jaka jest zależność okresu drgań wahadła matematycznego od jego długości:

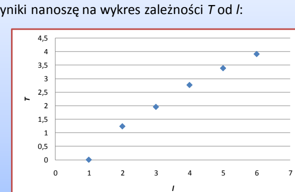
$$T \cong 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dokonujemy serii pomiarów *T* przy zmieniającej się długości wahadła *l*

l	*T*
l_1	T_1
l_2	T_2
…	…
l_n	T_n

REGRESJA LINIOWA

Uzyskane wyniki nanoszę na wykres zależności *T* od *l*:

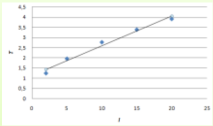


Jakiego typu to jest zależność: liniowa, kwadratowa, inna, …?

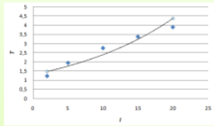
REGRESJA LINIOWA

Jakiego typu to jest zależność ?:

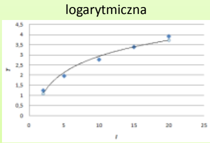
liniowa



kwadratowa



logarytmiczna



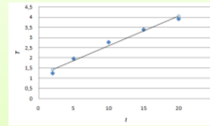
pierwiastkowa

Rafał Kasztelanic

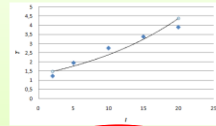
REGRESJA LINIOWA

Jakiego typu to jest zależność:

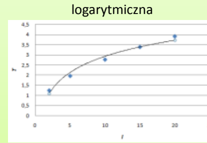
liniowa



kwadratowa



logarytmiczna



pierwiastkowa

Rafał Kasztelanic

REGRESJA LINIOWA

Czyli zależność jest typu:

$$T \cong c\sqrt{l}$$

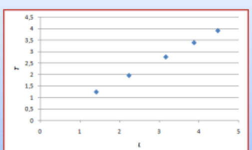
Regresja liniowa polega na dopasowaniu do zbioru danych linii prostej.

Aby uzyskać zależność liniową należy dokonać podstawienia:

$$L = \sqrt{l}$$

Teraz naszą zależność możemy przedstawić jako:

$$T \cong cL$$



Rafał Kasztelanic

REGRESJA LINIOWA

Zależność liniową przedstawiamy jako:

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad b = \frac{1}{n}\left(\sum y_i - a\sum x_i\right)$$

$$S_a = \sqrt{\frac{n\left[\sum y_i^2 - a\sum x_i y_i - b\sum y_i\right]}{(n-2)\left[n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2\right]}} \qquad S_b = \sqrt{\frac{1}{n}S_a^2\sum x_i^2}$$

S_a, S_b są błędami wyznaczenia stałych *a* oraz *b*.

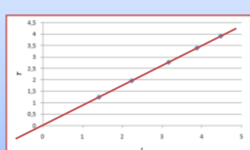
Rafał Kasztelanic

REGRESJA LINIOWA

W naszym przykładzie:

$$l = L^2 = a^2$$

Parametr *b* jest bliski zeru



Rafał Kasztelanic

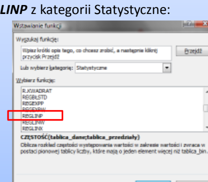
REGRESJA LINIOWA

Jak to policzyć w Excelu (zależność liniowa):

- Wpisać dane eksperymentalne – zależność *T* od *l*:

T	*l*
2	1,2
5	2,0
10	2,8
15	3,4
20	3,9

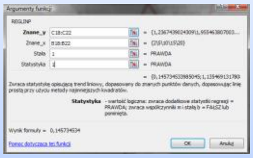
- Zaznaczyć poza obszarem danych 4 komórki (obszar 2x2):
- Wstawić funkcję ***REGLINP*** z kategorii Statystyczne:



Rafał Kasztelanic

REGRESJA LINIOWA

- Wstawić odpowiednie zakresy danych oraz 1 w pola wartości logicznych:



- Przejść do paka formuł:

=REGLINP(C18:C22;B18:B22;1;1)

- Nacisnąć Cntr + Shift + Enter. Wyniki ułożone są w następujący sposób:

a	b
Sa	Sb

Rafał Kasztelanic

ZAPRASZAMY NA LABORATORIUM

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI wieku* współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego