

## Ćwiczenie nr 1 WAHADŁO MATEMATYCZNE Instrukcja dla studenta

### I. WSTĘP

Celem ćwiczenia jest ukazanie początkującemu eksperymentatorowi fundamentalnej własności pomiarów, którą jest brak powtarzalności – uzyskiwane wyniki, mimo usilnych starań eksperymentatora, są różne. Uświadomienie sobie tego faktu rodzi dwie refleksje: pierwsza dotyczy potrzeby wprowadzenia rozmaitych wielkości, które w sposób graficzny i ilościowy opiszą i podsumują uzyskane rezultaty, zaś druga każe nam rozważyć możliwe modyfikacje sposobu prowadzenia doświadczenia i wykonywania pomiarów, wiodące do ograniczenia obserwowanej zmienności. Dla zilustrowania pojawiających się w tym kontekście zagadnień, wykonamy pomiary okresu wahadła matematycznego.

Wyniki tych pomiarów posłużą do konstruowania kolejno rozmaitych obiektów statystycznych, które opisują statystyczną naturę pomiarów i pomagają wyznaczać, z surowych wyników pomiarów, oceny wartości poszukiwanych wielkości fizycznych. Zrealizowanie tych zadań wymaga bogatych zbiorów danych, a więc wielokrotnych pomiarów tej samej wielkości fizycznej – w naszym przypadku – okresu wahadła.

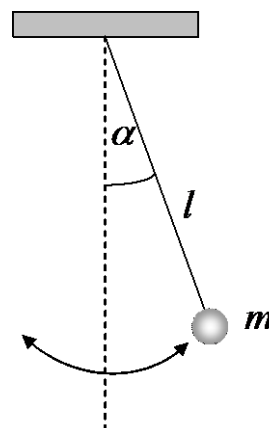
#### **PRZYPOMNIENIE**

Okres drgań wahadła matematycznego ( $T$ ) poruszającego się w zakresie małych kątów wynosi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1)$$

gdzie

$l$  - długość wahadła (odległość między punktem zaczepienia wahadła a jego środkiem ciężkości),  
 $g$  - przyspieszenie ziemskie.



**Rys. 1.** Wahadło matematyczne.  $m$  - masa wahadła,  $l$  - długość wahadła,  $\alpha$  - kąt wychylenia z położenia równowagi

### II. POMIARY

**Masz do dyspozycji:**

- wahadło o regulowanej długości;
- stoper pozwalający na odczyt czasu z dokładnością do 0,01 s;
- taśmę mierniczą pozwalającą na odczyt długości z dokładnością do 1 mm.

### **Wykonanie pomiarów**

- Ustal długość wahadła tak, aby dolna krawędź kuli wahadła znalazła się między kilka a kilkanaście centymetrów nad podłogą. Zmierz i zanotuj odległość między punktem zaczepienia wahadła a jego środkiem ciężkości (oznaczymy ją symbolem  $l$ ).
- Pod znajdującym się w położeniu równowagi wahadłem, umieść na podłodze długopis lub kartkę papieru z narysowaną wyraźną kreską. Wychyl wahadło, w kierunku prostopadłym do narysowanej na kartce kreski, na odległość około 20 – 30 cm od położenia równowagi i zwolnij je. Spróbuj różnych sposobów zwalniania wahadła i obserwuj je przez kilkanaście okresów. Zwróć uwagę, żeby wahadło nie krążyło po elipsie, kula wahadła nie „kiwała” się wokół własnego środka ciężkości, ani też nie obracała się wokół własnej osi. Wszystkie te efekty są niewskazane, gdyż zmieniają one okres drgań, który chcemy zmierzyć. Wykonaj także najpierw parę próbnych pomiarów, które pozwolą Ci poćwiczyć rękę.
- Zastanów się nad wyborem położenia wahadła, które będzie początkiem odmierzenia czasu trwania okresu  $T$  wahadła.
- Gdy „dopracujesz” się w miarę idealnego sposobu uruchamiania wahadła i wybierzesz punkt startu, **zapisz wyniki 216** (słownie: dwustu szesnastu) pomiarów **jednego** okresu wahań wahadła.

#### **Pamiętaj, że:**

- Okres wahań wyznaczaj jako przedział czasu między dwoma kolejnymi przejściami wahadła w tę samą stronę nad kreską na kartce.

### **III. ANALIZA DANYCH**

*Doświadczenie to dostarcza bardzo bogatego materiału statystycznego, którego nie da się przeanalizować w pełni w trakcie zajęć. Na ćwiczeniach zostanie zaprezentowany schemat statystycznej analizy danych pomiaru jednego okresu drgań wahadła, wykonanego przez asystentów, dla próby liczącej 432 wartości (dane - dodatek 1). Studentka/Student według przedstawionego schematu jest zobowiązany przeanalizować w domu własne dane i oddać je formie raportu. Aby uniknąć błędów zaokrągleń, pomyłek i skrócić czas potrzebny na ich wykonanie, zalecanym sposobem przeprowadzania obliczeń jest wykorzystanie arkusza kalkulacyjnego lub innego, podobnego narzędzia.*

#### **Konstrukcja histogramu**

Pierwszym krokiem analizy statystycznej wyników wielokrotnych pomiarów jest ich graficzna prezentacja w postaci histogramu, który syntetycznie obrazuje rozkład uzyskanych wyników w próbce.

- Konstruowanie histogramu rozpoczynamy od wyznaczenia najmniejszej ( $x_{\min}$ ), i największej ( $x_{\max}$ ) uzyskanej wartości w badanej próbce. Wartości te pozwalają ocenić rozpiętość histogramu. Symbolem  $N$  oznaczamy liczebność próbki.

W naszym przypadku, gdzie wartością mierzoną jest jeden okres  $T$  drgań wahadła wartości te wynoszą odpowiednio:

$$T_{\min} = 3,06 \text{ s}, \quad T_{\max} = 3,56 \text{ s}, \quad N = 432.$$

- Ustalamy dolną krawędź  $x_{\{1\}} < x_{\min}$  histogramu oraz szerokość  $\Delta_i$  przedziałów, czyli cały zakres wartości wielkości histogramowanej dzielimy na przedziały: od  $x_{\{1\}}$  do  $x_{\{2\}} = x_{\{1\}} + \Delta_1$ , od  $x_{\{2\}}$  do  $x_{\{3\}} = x_{\{2\}} + \Delta_2$ , od  $x_{\{3\}}$  do  $x_{\{4\}} = x_{\{3\}} + \Delta_3$  itd., aż do ostatniego,  $K$ -tego przedziału od wartości  $x_{\{K\}} = x_{\{K-1\}} + \Delta_{K-1}$  do wartości  $x_{\{K+1\}} = x_{\{K\}} + \Delta_K, x_{\{K+1\}} \geq x_{\max}$ .

W naszym przypadku:

dolną krawędź histogramu  $T_{\{1\}}$  ustalamy na 3,05 s;  
przyjmujemy stały przedział histogramowania o szerokości  $\Delta = 0,03$  s;  
liczba przedziałów histogramowania wyniosła  $K = 17$ .

- Następnie ustalamy, do którego przedziału należy każda z kolejnych wartości z próbki, otrzymując liczby  $n_i$  danych w każdym z przedziałów, zwane **liczebnościami** bądź **krotnościami**. W trakcie ustalania, do którego przedziału histogramowania należy włączyć daną wartość, możemy natknąć się na sytuację, w której wartość ta wypada na granicy przedziałów, a więc może zostać zaklasyfikowana zarówno do tego, w którym rozważana wartość stanowi górną granicę lub też do następnego przedziału obejmującego większe wartości zmiennej histogramowanej. Najczęściej przyjmujemy konwencję, w której przedział histogramowania jest z lewej strony otwarty zaś z prawej domknięty.
- Dla każdego przedziału histogramu konstruujemy **częstość**  $p_i = n_i / N$  oraz wielkość  $f_i$ , którą zwiemy **gęstością wielkości histogramowanej**, a którą definiujemy jako  $f_i = p_i / \Delta_i$ , czyli stosunek częstości  $p_i$  do szerokości  $\Delta_i$  przedziału histogramowania. W rezultacie otrzymujemy kolejne wiersze tabeli poniżej.

**Tabela 1.** Schemat opracowywania serii pomiarów bezpośrednich

| przedział                 | $(x_{\{1\}}, x_{\{2\}}]$ | $(x_{\{2\}}, x_{\{3\}}]$ | ... | $(x_{\{K\}}, x_{\{K+1\}}]$ | Suma |
|---------------------------|--------------------------|--------------------------|-----|----------------------------|------|
| krotność                  | $n_1$                    | $n_2$                    | ... | $n_k$                      | $N$  |
| częstość $p_i$            | $\frac{n_1}{N}$          | $\frac{n_2}{N}$          | ... | $\frac{n_K}{N}$            | 1    |
| gęstość $f_i$ [jednostki] | $\frac{n_1}{N\Delta_1}$  | $\frac{n_2}{N\Delta_2}$  | ... | $\frac{n_K}{N\Delta_K}$    | –    |

Zauważ, że wielkości  $f_i$  mają wymiar – w tym przypadku jest to odwrotność jednostki czasu, w której wyrażamy wyniki pomiaru okresu. Spełniają one także oczywisty związek

$$\sum_{i=1}^K f_i \Delta_i = 1,$$

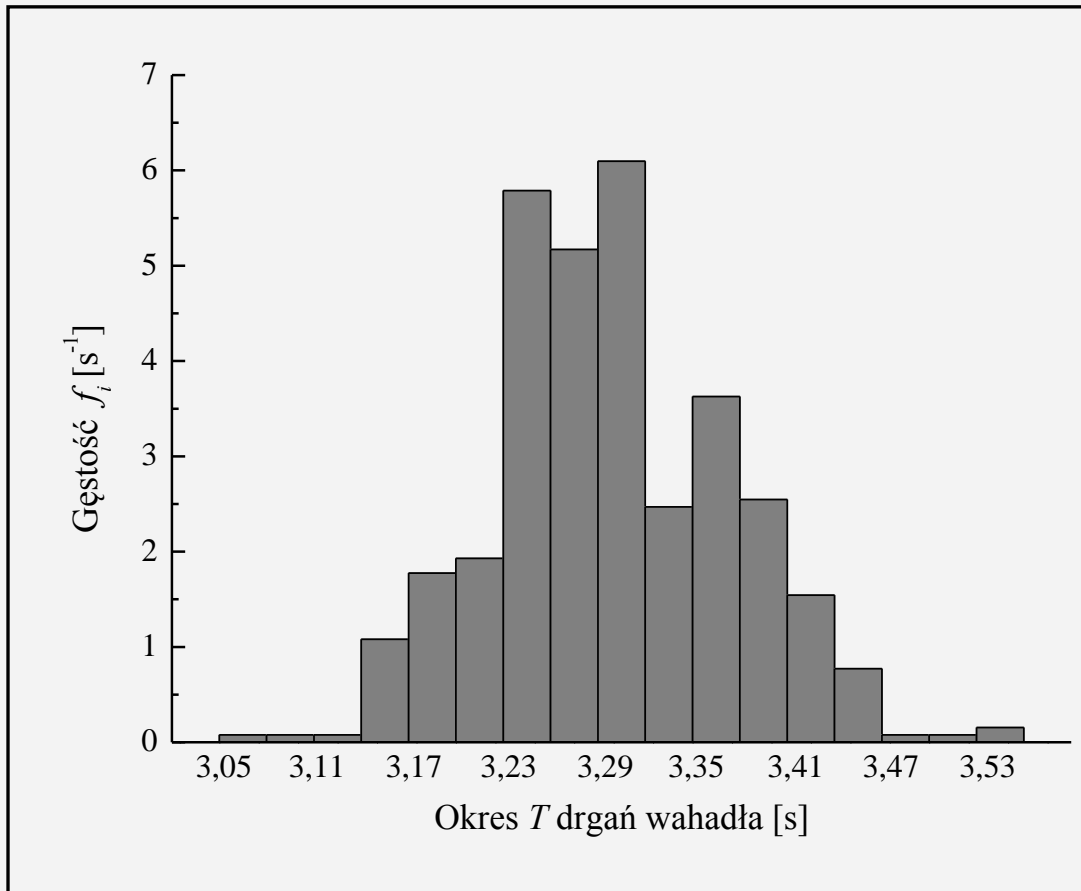
czyli pola powierzchni słupków histogramu sumują się do jedności – co jest definicją frazy: **histogram jest unormowany do jedności**.

W przypadku naszych danych wartości: krotności, częstości i gęstości zmierzonego okresu drgań wahadła dla wybranych przez nas przedziałów zostały zamieszczone w tabeli 2.

**Tabela 2.** Zbiorcze opracowanie serii pomiarów okresu  $T$  wahadła dla próby o liczebności równej 432 służące do konstrukcji histogramu o szerokości przedziału  $\Delta = 0,03$  s.

| przedział [s] | krotność $n_i$ | częstość $p_i$ | gęstość $f_i$ [ $s^{-1}$ ] |
|---------------|----------------|----------------|----------------------------|
| (3,05-3,08]   | 1              | 0,00231        | 0,07716                    |
| (3,08-3,11]   | 1              | 0,00231        | 0,07716                    |
| (3,11-3,14]   | 1              | 0,00231        | 0,07716                    |
| (3,14-3,17]   | 14             | 0,03241        | 1,08025                    |
| (3,17-3,20]   | 23             | 0,05324        | 1,77469                    |
| (3,20-3,23]   | 25             | 0,05787        | 1,92901                    |
| (3,23-3,26]   | 75             | 0,17361        | 5,78704                    |
| (3,26-3,29]   | 67             | 0,15509        | 5,16975                    |
| (3,29-3,32]   | 79             | 0,18287        | 6,09568                    |
| (3,32-3,35]   | 32             | 0,07407        | 2,46914                    |
| (3,35-3,38]   | 47             | 0,10880        | 3,62654                    |
| (3,38-3,41]   | 33             | 0,07639        | 2,5463                     |
| (3,41-3,44]   | 20             | 0,04630        | 1,54321                    |
| (3,44-3,47]   | 10             | 0,02315        | 0,77160                    |
| (3,47-3,50]   | 1              | 0,00231        | 0,07716                    |
| (3,50-3,53]   | 1              | 0,00231        | 0,07716                    |
| (3,53-3,56]   | 2              | 0,00463        | 0,15432                    |
| <b>Suma</b>   | <b>432</b>     | <b>1</b>       | <b>--</b>                  |

Rysunek 2 przedstawia rozkład wartości zmierzonego okresu  $T$  drgań wahadła.



Rys.2. Rozkład wartości zmierzonego okresu  $T$  drgań wahadła dla próby o liczebności  $N = 432$ .

- Rysując histogram należy zwrócić uwagę na niektóre elementy graficzne takiego rysunku. Histogram winien mieć tytuł, osie należy opisać zarówno słownie, jak i symbolem, jak również podać, w nawiasach kwadratowych lub okrągłych, jednostkę wielkości występującej na osiach. Normy wymagają, aby znaczniki na osiach zwrócone były ku dodatnim kierunkom osi, co powoduje, że w przypadku, gdy kreślone wielkości wypadają w pierwszej ćwiartce, znaczniki te „wchodzą” do rysunku, zaś prezentując wykres, który mieści się w trzeciej ćwiartce, znaczniki będą wskazywać na zewnątrz treści rysunku.
- Z histogramami związana jest konwencja, której należy bezwzględnie przestrzegać. Otóż, istnieją dwa typy wielkości, które histogramujemy: wielkości **ciągłe** (z taką wielkością mamy do czynienia w naszym zadaniu) oraz wielkości **dyskretne**. To rozróżnienie znajduje swe odbicie na histogramie – słupki histogramu wielkości ciągłej *zawsze* rysujemy połączone ze sobą, a słupki histogramu wielkości dyskretnej rozdzielone.

## Ocena prawdziwej wartości wielkości fizycznej

W środowisku fizyków za ocenę prawdziwej wartości wielkości fizycznej  $x$ , którą mierzymy, przyjmuje się **średnią arytmetyczną**, którą dla serii  $N$  wartości  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , definiujemy związkiem:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (2)$$

zaś za miarę rozrzutu uzyskanych wartości, czyli szerokości rozkładu, przyjmujemy wielkość  $s_x$ , zdefiniowaną za pomocą wyrażenia:

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (3)$$

Wielkość  $s_x$ , nazywamy **statystyczną niepewnością standardową** i często termin ten uzupełniamy słowami: **pojedynczego pomiaru**, gdyż określa ona średnie odchylenie **indywidualnego** wyniku od średniej. Fraza: *pojedynczego pomiaru* pojawia się tu dlatego, że wykonując **jeden** dodatkowy pomiar spodziewamy się, że średnio rzecz biorąc, odchyli się on od średniej właśnie o wartość  $s_x$  (ściślej: kwadrat odchylenia tego wyniku od wartości średniej przyjmie wartość zbliżoną do  $s_x^2$ ). Inna często spotykana nazwa wielkości  $s_x$  to **odchylenie standardowe eksperymentalne** lub też **odchylenie standardowe z próbki**.

Konwencjonalnie, za miarę **niepewności średniej arytmetycznej** uzyskanej z próbki o liczebności  $N$  przyjmujemy wielkość  $s_{\bar{x}}$ , której kwadrat definiuje następujący wzór:

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2, \quad (4)$$

Zauważmy, że wyrażenie to możemy zapisać w postaci:

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{s_x^2}{N}. \quad (5)$$

gdzie  $s_x$  jest niepewnością standardową pojedynczego pomiaru.

W literaturze można spotkać, iż **niepewności średniej arytmetycznej**  $s_{\bar{x}}$  zwana jest również **niepewnością standardową średniej** lub **odchyleniem standardowym średniej**.

Ocenę prawdziwej wielkości fizycznej  $x$  zapisujemy w postaci

$$\bar{x} \pm s_{\bar{x}}. \quad (6)$$

W naszym przypadku uzyskaliśmy następujące wartości średniej, niepewności pojedynczego pomiaru i niepewności średniej okresu drgań wahadła.

**Tabela 3.** Ocena prawdziwej wartości okresu  $T$  drgań wahadła z próbki o liczebności  $N = 432$ .

|   |        |
|---|--------|
| Średnia arytmetyczna $\bar{T}$ [s]                    | 3,3072 |
| Niepewność standardowa pojedynczego pomiaru $s_T$ [s] | 0,0797 |
| Niepewność średniej arytmetycznej $s_{\bar{T}}$ [s]   | 0,0038 |

Okres  $T$  wahadła wynosi  $3,3072 \pm 0,0038$  s.

UWAGA: niepewności zaokrąglamy do 2 cyfr znaczących

#### IV. RAPORT KOŃCOWY

*Raport końcowy z analizy statystycznej pomiarów okresu wahadła należy oddać na następujących zajęciach. Wykorzystaj własne dane i opis wykonaj samodzielnie!*

**Raport końcowy winien zawierać następujące elementy:**

1. Krótkie przedstawienie przedmiotu badań.
2. Konstrukcję histogramu przedstawiającego rozkład gęstości okresu  $T$  drgań wahadła według schematu przedstawionego w instrukcji. Wykonaj histogramy stosując stały przedział histogramowania  $\Delta = 0,03$  s oraz  $\Delta = 0,01$  s. Porównaj kształt histogramów i wymień zaobserwowane różnice.
3. Obliczoną wartość średnią, niepewność pojedynczego pomiaru i niepewność średniej okresu  $T$  drgań wahadła.
4. Zaznaczone na osi odciętych histogramu położenie: średniej oraz przedziału obejmującego jedną niepewność standardową pojedynczego pomiaru na lewo i na prawo od zaznaczonej wartości średniej. Jaki ułamek danych (w przybliżeniu) jest zawarty w tym przedziale?
5. Oszacowanie wartości przyspieszenia ziemskiego na podstawie uzyskanej wartości średniej okresu wahadła.

***Pamiętaj, że:***

*Każdy z raportów końcowych możesz napisać ręcznie, byle porządnie i czytelnie. Jeśli zdecydujesz się na wykorzystanie edytora tekstów, to przestrzegaj zasad typograficznych obowiązujących w publikacjach naukowych. Streszczenie podstawowych reguł jest umieszczone na stronie WWW. Ogólne zasady sporządzania raportu oraz przykładowy raport wzorcowy znajdziesz na stronie WWW Pracowni.*

**Dodatek 1.** Dane pomiarowe okresu  $T$  drgań wahadła o długości  $l = 264,8 \pm 0,1$  cm.

| Numer pomiaru | Okres $T$ [s] |             |             |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------|---------------|-------------|-------------|------|------|------|------|------|------|------|
|               | 0             | 1           | 2           | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
| 0             | -             | 3,32        | <b>3,56</b> | 3,28 | 3,44 | 3,25 | 3,18 | 3,37 | 3,22 | 3,16 |
| 10            | 3,22          | 3,37        | 3,28        | 3,41 | 3,32 | 3,32 | 3,41 | 3,32 | 3,32 | 3,28 |
| 20            | 3,16          | 3,22        | 3,18        | 3,28 | 3,28 | 3,25 | 3,41 | 3,35 | 3,28 | 3,47 |
| 30            | 3,35          | 3,32        | 3,25        | 3,28 | 3,32 | 3,32 | 3,44 | 3,37 | 3,22 | 3,16 |
| 40            | 3,25          | 3,44        | 3,28        | 3,35 | 3,35 | 3,28 | 3,32 | 3,28 | 3,18 | 3,28 |
| 50            | 3,35          | 3,37        | 3,37        | 3,32 | 3,16 | 3,37 | 3,28 | 3,32 | 3,37 | 3,25 |
| 60            | 3,22          | 3,37        | 3,16        | 3,37 | 3,25 | 3,28 | 3,56 | 3,25 | 3,18 | 3,35 |
| 70            | 3,22          | 3,18        | 3,18        | 3,25 | 3,32 | 3,18 | 3,18 | 3,25 | 3,25 | 3,32 |
| 80            | 3,18          | 3,41        | 3,35        | 3,18 | 3,32 | 3,25 | 3,25 | 3,18 | 3,28 | 3,25 |
| 90            | 3,25          | 3,37        | 3,28        | 3,32 | 3,25 | 3,28 | 3,28 | 3,18 | 3,28 | 3,35 |
| 100           | 3,37          | 3,28        | 3,22        | 3,18 | 3,25 | 3,35 | 3,32 | 3,32 | 3,35 | 3,35 |
| 110           | 3,28          | 3,32        | 3,28        | 3,32 | 3,28 | 3,35 | 3,44 | 3,35 | 3,22 | 3,35 |
| 120           | 3,28          | 3,32        | 3,32        | 3,32 | 3,37 | 3,22 | 3,35 | 3,28 | 3,28 | 3,32 |
| 130           | 3,25          | 3,25        | 3,22        | 3,47 | 3,53 | 3,25 | 3,35 | 3,32 | 3,22 | 3,41 |
| 140           | 3,37          | 3,28        | 3,28        | 3,32 | 3,32 | 3,35 | 3,35 | 3,37 | 3,41 | 3,28 |
| 150           | 3,32          | 3,25        | 3,16        | 3,47 | 3,41 | 3,37 | 3,37 | 3,35 | 3,32 | 3,32 |
| 160           | 3,44          | 3,28        | 3,41        | 3,35 | 3,44 | 3,22 | 3,22 | 3,35 | 3,22 | 3,32 |
| 170           | 3,22          | 3,37        | 3,28        | 3,44 | 3,32 | 3,16 | 3,47 | 3,18 | 3,35 | 3,37 |
| 180           | 3,28          | 3,25        | 3,18        | 3,32 | 3,25 | 3,35 | 3,41 | 3,32 | 3,22 | 3,44 |
| 190           | 3,32          | 3,28        | 3,37        | 3,35 | 3,37 | 3,28 | 3,41 | 3,32 | 3,37 | 3,28 |
| 200           | 3,37          | 3,25        | 3,44        | 3,35 | 3,25 | 3,25 | 3,37 | 3,28 | 3,22 | 3,35 |
| 210           | 3,35          | 3,35        | 3,37        | 3,37 | 3,35 | 3,35 | 3,41 | 3,41 | 3,22 | 3,32 |
| 220           | 3,25          | 3,32        | 3,35        | 3,32 | 3,44 | 3,28 | 3,37 | 3,32 | 3,41 | 3,28 |
| 230           | 3,35          | 3,41        | 3,28        | 3,41 | 2,28 | 3,41 | 3,28 | 3,32 | 3,18 | 3,41 |
| 240           | 3,18          | 3,28        | 3,44        | 3,44 | 3,32 | 3,37 | 3,25 | 3,41 | 3,41 | 3,50 |
| 250           | 3,25          | 3,37        | 3,28        | 3,28 | 3,18 | 3,16 | 3,25 | 3,25 | 3,28 | 3,41 |
| 260           | 3,37          | 3,25        | 3,37        | 3,47 | 2,25 | 3,28 | 3,25 | 3,28 | 3,25 | 3,41 |
| 270           | 3,32          | 3,32        | 3,25        | 3,37 | 3,25 | 3,41 | 3,28 | 3,22 | 3,25 | 3,25 |
| 280           | 3,37          | 3,44        | 3,32        | 3,25 | 3,32 | 3,28 | 3,25 | 3,25 | 3,25 | 3,41 |
| 290           | 3,32          | 3,25        | 3,32        | 3,28 | 3,25 | 3,28 | 3,25 | 3,28 | 3,32 | 3,41 |
| 300           | 3,25          | 3,28        | 3,28        | 3,25 | 3,28 | 3,25 | 3,32 | 3,16 | 3,25 | 3,37 |
| 310           | 3,47          | 3,28        | 3,25        | 3,25 | 3,37 | 3,44 | 3,47 | 3,25 | 3,32 | 3,32 |
| 320           | 3,22          | <b>3,06</b> | 3,22        | 3,28 | 3,32 | 3,44 | 3,37 | 3,41 | 3,25 | 3,16 |
| 330           | 3,13          | 3,16        | 3,47        | 3,25 | 3,28 | 3,25 | 3,32 | 3,25 | 3,32 | 3,32 |
| 340           | 3,47          | 3,41        | 3,18        | 3,28 | 3,32 | 3,28 | 3,22 | 3,25 | 3,25 | 3,37 |
| 350           | 3,32          | 3,25        | 3,32        | 3,18 | 3,28 | 3,32 | 3,28 | 3,41 | 3,32 | 3,28 |
| 360           | 3,09          | 3,37        | 3,44        | 3,37 | 3,37 | 3,25 | 3,41 | 3,18 | 3,32 | 3,28 |
| 370           | 3,41          | 3,37        | 3,25        | 3,32 | 3,28 | 3,25 | 3,25 | 3,22 | 3,25 | 3,32 |
| 380           | 3,18          | 3,18        | 3,37        | 3,47 | 3,25 | 3,32 | 3,25 | 3,32 | 3,32 | 3,32 |
| 390           | 3,37          | 3,32        | 3,32        | 3,25 | 3,22 | 3,32 | 3,32 | 3,28 | 3,44 | 3,32 |
| 400           | 3,37          | 3,37        | 3,25        | 3,32 | 3,32 | 3,25 | 3,44 | 3,25 | 3,25 | 3,41 |
| 410           | 3,41          | 3,22        | 3,28        | 3,32 | 3,41 | 3,32 | 3,32 | 3,41 | 3,16 | 3,16 |
| 420           | 3,37          | 3,28        | 3,44        | 3,37 | 3,32 | 3,25 | 3,37 | 3,25 | 3,32 | 3,44 |
| 430           | 3,16          | 3,25        | 3,25        |      |      |      |      |      |      |      |