Ćwiczenia rachunkowe
TEST ZGODNOŚCI χ^2 PEARSONA
ROZKŁAD GAUSSA

UWAGA: Na stronie, z której pobrałaś/pobrałeś instrukcję znajduje się gotowy do załadowania arkusz kalkulacyjny do programu Calc pakietu Open Office, niezbędny podczas ćwiczeń rachunkowych.

Test χ^2 służy do testowania hipotez. Wykorzystywany jest przy ocenianiu zgodności uzyskanych danych doświadczalnych z założonym modelem lub rozkładem teoretycznym.

1. Sposób postępowania przy wykonywaniu testu χ^2 Pearsona zgodności modelu wyrażonego zależnością matematyczną $f(x;\, a_1,\, a_2, \ldots,\, a_m)$, gdzie $\{a_j\}$ to zbiór parametrów, z danymi zadanymi w postaci zestawu n wartości $(x_i,\, y_i \pm \sigma_i)$ zmiennej niezależnej x_i i zmiennej zależnej y_i wraz z wartościami σ_i dyspersji wielkości y_i:

- ustalamy dopuszczalne prawdopodobieństwo α odrzucenia prawdziwej hipotezy (błędu pierwszego rodzaju);
- na podstawie zaobserwowanych wyników wyznaczamy te z parametrów $\{a_j\}$ zależności matematycznej, które nie są zadane jako część testowanej hipotezy;
- ustalamy liczbę stopni swobody $\nu = n - m$, gdzie n jest liczbą par danych $(x_i,\, y_i \pm \sigma_i)$, zaś m liczbą parametrów w zależności matematycznej, których wartości zostały wyznaczone na podstawie zaobserwowanych wyników;
- odczytujemy wartość krytyczną $\chi^2_{kr}(\alpha, \nu)$ odpowiadającą zadanemu prawdopodobieństwu α i liczbie ν stopni swobody (patrz Tabela 5 w DODATKU na końcu Instrukcji);
- obliczamy wartość:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - f(x_i; \{a_j\}))^2}{\sigma_i^2};$$

- porównujemy uzyskaną wartość χ_0^2 z wartością $\chi^2_{kr}(\alpha, \nu)$ odczytaną z Tabeli 5 – jeśli spełniony jest warunek: $\chi_0^2 > \chi^2_{kr}(\alpha, \nu)$, to odrzucamy testowaną hipotezę jako niezgodną z obserwacjami. W przeciwnym przypadku nie uważamy, że udowodniliśmy słuszność hipotezy lecz jedynie godzimy się z nią, jako niesprzeczną z obserwowanymi danymi.

2. Sposób postępowania przy wykonywaniu testu χ^2 Pearsona zgodności rozkładu modelowego z rozkładem doświadczalnym:

- ustalamy dopuszczalne prawdopodobieństwo α odrzucenia prawdziwej hipotezy (błędu pierwszego rodzaju);
- na podstawie zaobserwowanych wyników wyznaczamy parametry modelowego rozkładu, jeśli nie są one zadane jako część testowanej hipotezy;
- dzielimy cały (teoretyczny) zakres wartości zmiennej losowej na n przedziałów (niekoniecznie tej samej długości – porównaj z Tabelą 3) tak, aby liczba N_k oczekiwanych wyników w każdym z przedziałów była nie mniejsza niż 5 (w praktyce zadowalamy się zaobserwowaną liczbą danych n_k w przedziale nie mniejszą niż 5);
- ustalamy liczbę stopni swobody $\nu = n - 1 - m$, gdzie n jest liczbą przedziałów, zaś m liczbą parametrów, których wartości zostały wyznaczone na podstawie zaobserwowanych wyników;

- wyznaczamy wartość krytyczną $\chi^2_{kr}(\alpha,\nu)$ odpowiadającą zadanemu prawdopodobieństwu α i liczbie ν stopni swobody (patrz Tabela 5 w DODATKU na końcu Instrukcji);
- na podstawie modelu i obliczonych bądź zadanych wartości parametrów, obliczamy prawdopodobieństwo p_k znalezienia wartości zmiennej losowej w przedziale o numerze k;
- obliczamy oczekiwaną liczbę $N_k = p_k N$ danych w przedziale o numerze k, gdzie N jest liczbą wszystkich danych;
- obliczamy wartość:

$$\chi_0^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n_k - p_k N)^2}{p_k N};$$

- porównujemy uzyskaną wartość χ_0^2 z wartością $\chi^2_{kr}(\alpha,\nu)$ odczytaną z Tabeli 5 – jeśli spełniony jest warunek: $\chi_0^2 > \chi^2_{kr}(\alpha,\nu)$, to odrzucamy testowaną hipotezę jako niezgodną z obserwacjami. W przeciwnym przypadku nie uważamy, że udowodniliśmy słuszność hipotezy lecz jedynie godzimy się z nią, jako niesprzeczną z obserwowanymi danymi.

Uwaga: jeśli dysponujemy oprogramowaniem, które umożliwia wyznaczanie całek rozkładów prawdopodobieństwa, lepiej jest w miejsce wartości krytycznej, podawać tzw. **wartość *p* testu**, czyli prawdopodobieństwo p, że zmienna $u = \chi^2$ przyjmie wartość większą niż wartość χ_0^2 uzyskana z danych:

$$p := P(u \geq \chi_0^2) = \int_{\chi_0^2}^{\infty} f_\nu(u)\,du,$$

gdzie

$$f_\nu(u) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} u^{\frac{\nu}{2}-1} \exp(-\frac{u}{2}),$$

to rozkład zmiennej χ^2 o ν stopniach swobody. Podejście to nie zwalnia Cię z obowiązku podjęcia decyzji co do zgodności wybranego modelu z danymi, a dostarcza większej ilości informacji czytelnikowi, umożliwiając mu niekiedy, wyrażenie własnej opinii (jak również pozwala mu zorientować się w jakości i rygoryzmie Twych decyzji).
Symbol Γ we wzorze powyżej oznacza funkcję gamma Eulera, zdefiniowaną za pomocą całki

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} \mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

Tabela 6 zamieszczona w DODATKU na końcu Instrukcji zawiera wartości prawdopodobieństwa $P(\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}_0^2)$, dla wybranych wartości ν i $\tilde{\chi}_0^2$, gdzie $\tilde{\chi}^2$ i $\tilde{\chi}_0^2$ to zredukowane wartości χ^2 i χ_0^2, równe odpowiednio $\frac{\chi^2}{\nu}$ i $\frac{\chi_0^2}{\nu}$.

TEST χ^2 PEARSONA JAKOŚCI DOPASOWANIA PROSTEJ DO DANYCH

Zadanie 1

Student badając drgania wahadła, wyznaczył czas trwania okresu dla kilku różnych jego długości. Jak wiadomo, dla małych wychyleń, okres drgań T wahadła o długości L wynosi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

zaś g to przyspieszenie ziemskie. Jeśli wprowadzimy wielkości: H – wysokość punktu zawieszenia wahadła nad podłogą oraz h – wysokość środka ciężkości wahadła na podłogą, to:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}(H-h) = b + ah$$

Swoje dane pomiarowe student wykorzystał do wyznaczenia, za pomocą metody najmniejszych kwadratów, wysokości punktu zawieszenia wahadła nad podłogą. Uzyskane przez niego dane, ich niepewności oraz oceny parametrów a oraz b linii prostej $y = ax + b$ zawiera Tabela 1.

a) Przeprowadź test χ^2 Pearsona jakości dopasowania prostej do danych uzyskanych przez studenta.

b) Odwołując się do nominalnej wartości g = 9,8123 m/s^2 przyspieszenia ziemskiego w lewobrzeżnej Warszawie, wyznacz ocenę wysokości H punktu zaczepienia kuli nad podłogą wraz z niepewnością tej oceny.

c) Skorzystaj z ocen wartości parametrów linii prostej i podaj swoją ocenę wartości przyspieszenia ziemskiego w Warszawie oraz niepewność tej oceny, jakie wynikają z przeprowadzonego eksperymentu.

Tabela 1

wielkość	pomiar			
	1	2	3	4
x_i [m] ($x = h$)	0,04	0,69	1,4	1,72
y_i [s^2] ($y = T^2$)	11,76078	9,10591	6,24000	4,98272
u_i [s^2]	0,08004	0,07035	0,05893	0,05234
$1/u_i^2$	156,08	202,03	287,95	364,97
wyniki	$\bar{a} \pm s_{\bar{a}}$ = –4,0324 ± 0,0519 $\bar{b} \pm s_{\bar{b}}$ = 11,9036 ± 0,0681			
$(y_i - \bar{a}x_i - \bar{b})^2 / u_i^2$				
$\chi_0^2 =$				= $P(\chi^2 \geq \chi_0^2)$

PORÓWNANIE GRAFICZNE ROZKŁADU MODELOWEGO I DOŚWIADCZALNEGO

Zadanie 2

Zakładając, że wyniki pomiarów okresu drgań wahadła T można opisać rozkładem Gaussa

$$G(T;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(T-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), -\infty < T < \infty,$$

z wartościami parametrów $\mu = \bar{T}$ = 3,4408 s oraz $\sigma = s_T$ = 0,0456 s, obliczonymi dla indywidualnych danych, naszkicuj ten rozkład na histogramach gęstości i liczebności

(poniżej). Skorzystaj z Tabeli 2. Porównaj przybliżone wartości N'_k oczekiwanej liczby wyników w k-tym przedziale z dokładnymi wartościami N_k.
Przypominamy wzór służący do wyznaczenia oczekiwanej liczby N_k pomiarów w przedziale:

$$N_k = N\,p_k = NP(T_k \le T < T_k + \Delta) = N \int_{T_k}^{T_k+\Delta} G(T;\mu,\sigma)\,dT\,,$$

gdzie Δ jest szerokością przedziału histogramowania, a N liczbą wszystkich pomiarów. Najprostsza, i przybliżona, metoda obliczenia całki polega na zastąpieniu jej wyrażeniem $G(T_{[k]};\mu,\sigma)\Delta$, określającym pole powierzchni prostokąta o wysokości $G(T_{[k]};\mu,\sigma)$ i podstawie Δ, gdzie $T_{[k]}$ wyznacza środek przedziału histogramowania, a wtedy

$$N_k \approx N'_k = NG(T_{[k]};\mu,\sigma)\Delta\,.$$

Jeśli chcemy wyznaczyć całkę dokładnie, wprowadzamy nową zmienną całkowania

$$z = \frac{T-\mu}{\sigma}\,,$$

zwaną **standaryzowaną** i wartość N_k wyznaczamy za pomocą:

$$N_k = NP(z_k \le z < z_{k+1}) = N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \aleph\, dz = N(F(z_{k+1}) - F(z_k))\,,$$

$$\text{gdzie } z_k = \frac{T_k-\mu}{\sigma},\quad z_{k+1} = \frac{T_k+\Delta-\mu}{\sigma},\quad F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\,.$$

Wartości przydatnych całek $F(z)$ rozkładu Gaussa znajdują się w Tabeli 7, zamieszczonej w DODATKU na końcu Instrukcji. Funkcję, którą tu całkujemy

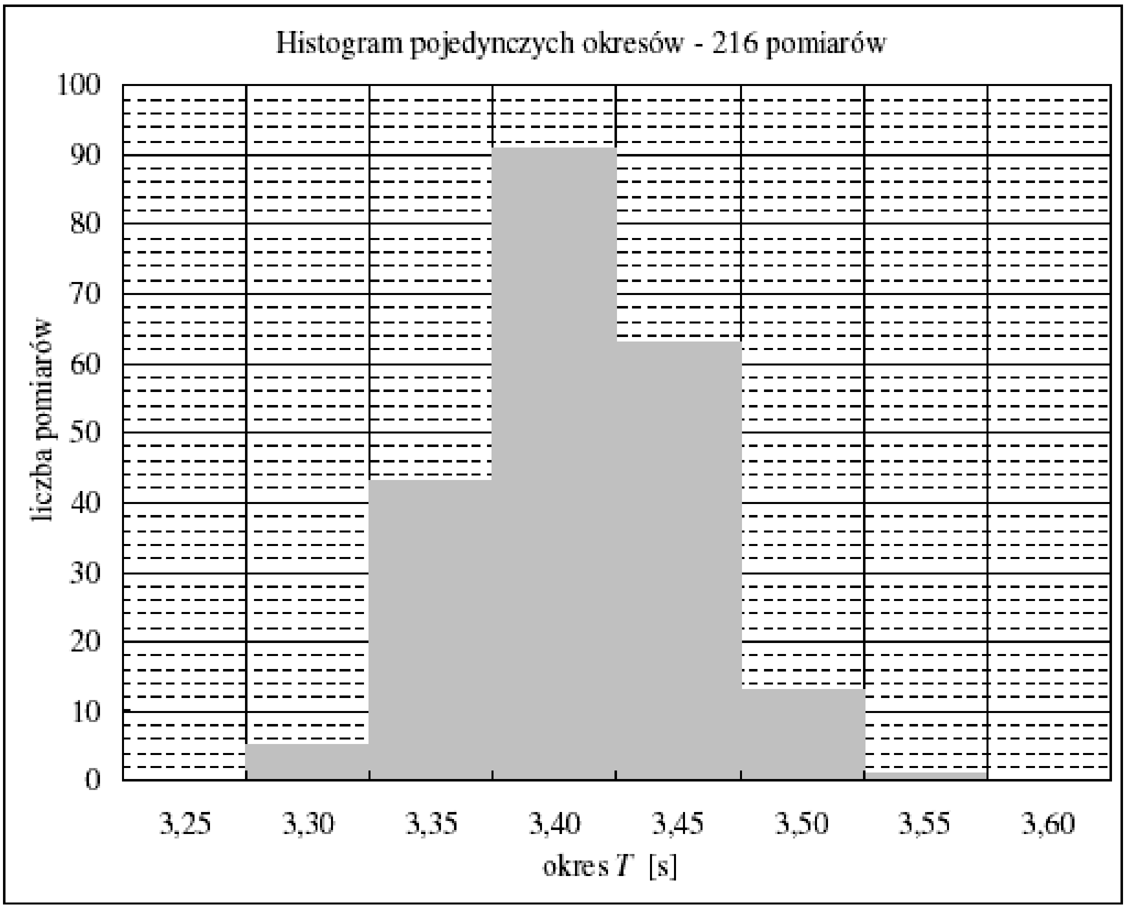
$$\aleph(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right),$$

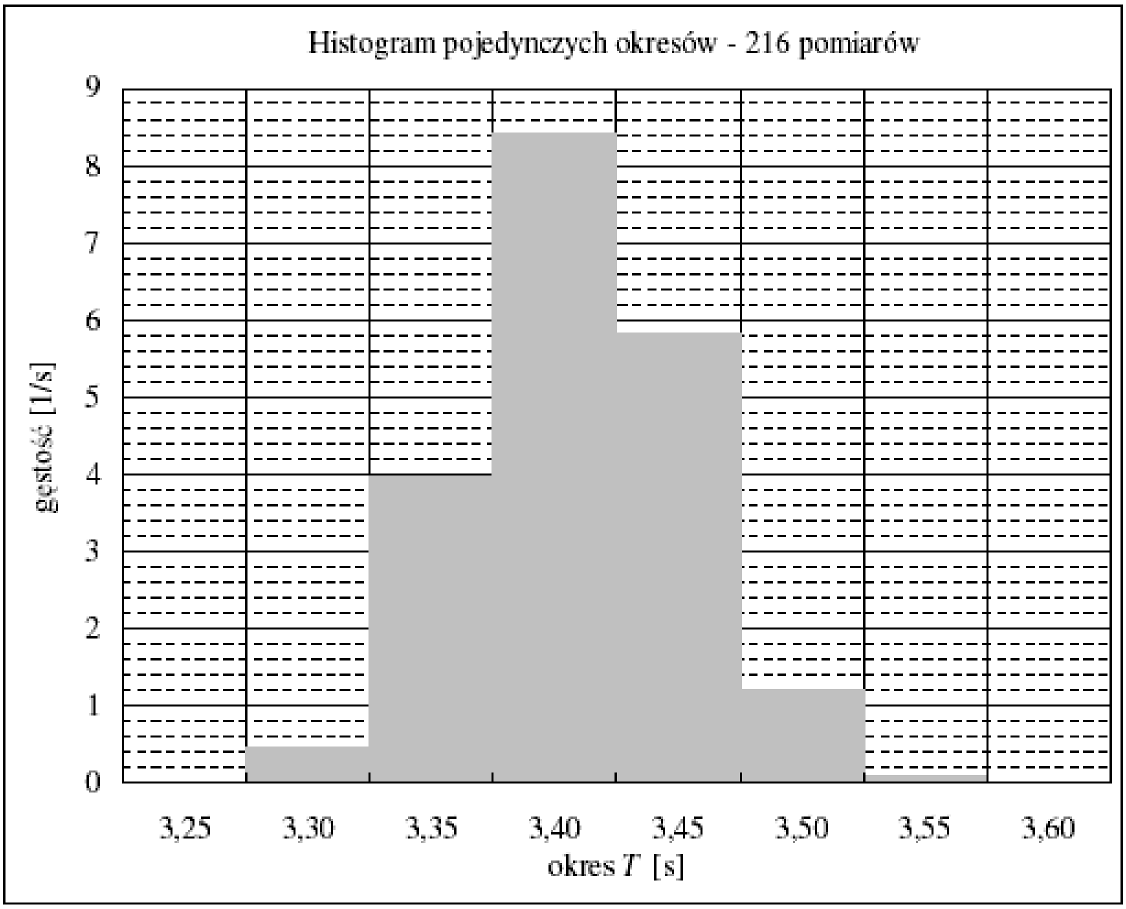
nazywamy **standaryzowanym rozkładem Gaussa**.

Tabela 2

krawędź dolna T_k [s]	3,25	3,30	3,35	3,40	3,45	3,50	3,55	3,60	–
krawędź górna $T_k + \Delta$ [s]	3,30	3,35	3,40	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	–
środek przedziału $T_{[k]}$ [s]	3,275	3,325	3,375	3,425	3,475	3,525	3,575	3,625	suma
liczba n_k danych*	0	5	43	91	63	13	1	0	$N = 216$
gęstość eksperyment. [s^{-1}]	0,00	0,46	3,98	8,43	5,83	1,20	0,09	0,00	–
gęstość $G\left(T_{[k]};\overline{T},s_T\right)$ [s^{-1}]	0,01	0,35	3,09		6,60	1,59	0,12	0,00	–
$N'_k = NG\left(T_{[k]};\overline{T},s_T\right)\Delta$	0,13	3,76	33,36		71,32	17,18	1,24	0,03	
z_k	–4,18	–3,09	–1,99		0,20	1,30	2,39	3,49	–
$F(z_k)$	0,0000	0,0010	0,0233		0,5793	0,9032	0,9916	0,9998	–
z_{k+1}	–3,09	–1,99	–0,89		1,30	2,39	3,49	4,59	–
$F(z_{k+1})$	0,0010	0,0233	0,1867		0,9032	0,9916	0,9998	1,0000	–
$p_k = F(z_{k+1}) - F(z_k)$	0,0010	0,0223	0,1634		0,3239	0,0884	0,0082	0,0002	
$N_k = Np_k$	0,22	4,82	35,30		69,96	19,09	1,76	0,04	

* n_k jest zaobserwowaną liczbą danych w k-tym przedziale


Histogram pojedynczych okresów - 216 pomiarów
liczba pomiarów
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
3,25
3,30
3,35
3,40
3,45
3,50
3,55
3,60
okres T [s]


Histogram pojedynczych okresów - 216 pomiarów
gęstość [1/s]
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
3,25
3,30
3,35
3,40
3,45
3,50
3,55
3,60
okres T [s]

TEST ZGODNOŚCI χ^2 PEARSONA ROZKŁADU MODELOWEGO I DOŚWIADCZALNEGO

Zadanie 3

Przyjmując, że wyniki T_i pomiaru okresu drgań wahadła podlegają rozkładowi Gaussa, przeprowadź test χ^2 Persona zgodności tego modelu z danymi doświadczalnymi. Skorzystaj z całek rozkładu Gaussa (Tabela 7, DODATEK) oraz z Tabeli 3 poniżej.

Tabela 3

krawędź dolna T_k [s]	$-\infty$	3,35	3,40	3,45	3,50	–
krawędź górna $T_k + \Delta$ [s]	3,35	3,40	3,45	3,50	∞	suma
obserwowana liczba n_k danych	5	43	91	63	14	216
z_k	$-\infty$	–1,99	–0,89	0,20		–
$F(z_k)$		0,0233	0,1867	0,5793		–
z_{k+1}		–0,89	0,20	1,30		–
$F(z_{k+1})$		0,1867	0,5793	0,9032		–
$p_k = P(z_k < z < z_{k+1})$		0,1634	0,3925	0,3239		
oczekiwana liczba $N_k = p_k N$ danych		35,30	84,79	69,97		
$(n_k - p_k N)^2 / (p_k N)$		1,680	0,455	0,694		

OCENIANIE PARAMETRÓW ROZKŁADU NA PODSTAWIE HISTOGRAMU

Zadanie 4 (jeśli pozostanie czas)

Niekiedy zdarza się, że nie dysponujemy indywidualnymi wartościami wielkości zmierzonych, a jedynie zbiorczymi wynikami, kiedy to dane pogrupowane są w klasy. Tabela 4 podaje dane (uzyskane przez autorów instrukcji), które posłużyły do wykreślenia histogramu liczebności okresów drgań wahadła, ukazanego na rysunku do zadania 2. Uzupełnij tę tabelę i wyznacz oceny wartości średniej i niepewności standardowej pojedynczego pomiaru.

Tabela 4

krawędź dolna T_k [s]	krawędź górna $T_k + \Delta$ [s]	środek przedziału $T_{[k]}$ [s]	liczba n_k danych	$n_k T_{[k]}$	$T_{[k]} - \tilde{T}$	$n_k (T_{[k]} - \tilde{T})^2$
3,30	3,35	3,325	5	16,625	–0,109	0,059
3,35	3,40	3,375	43	145,125	–0,059	0,150
3,40	3,45	3,425	91			
3,45	3,50	3,475	63	218,925	0,041	0,106
3,50	3,55	3,525	13	45,825	0,091	0,108
3,55	3,60	3,575	1	3,575	0,141	0,020
		suma =	216		suma =	
			średnia $\tilde{T}$ =		$\tilde{s}_T$ =	

Zwracamy uwagę, że:

$$\overline{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} n_k T_{[k]} = \widetilde{T}\,, \qquad s_T^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(T_i - \overline{T})^2 \approx \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{n} n_k (T_{[k]} - \widetilde{T})^2 = \widetilde{s}_T^{\,2}\,,$$

$$N = \sum_{k=1}^{n} n_k\,,$$

gdzie T_i oznacza wynik i-tego indywidualnego pomiaru okresu, n jest liczbą przedziałów histogramu, n_k, k = 1, 2, ..., n, to liczebności danych w każdym z przedziałów, N jest liczbą wszystkich danych (sumą liczebności n_k), zaś $T_{[k]}$ to pozycje środków przedziałów. Porównaj uzyskane wartości $\widetilde{T}$ oraz $\widetilde{s}_T$ z wartościami $\overline{T}$ = 3,4408 s oraz s_T = 0,0456 s uzyskanymi dla indywidualnych wyników pomiarów.

DODATEK

A. WARTOŚCI KRYTYCZNE ROZKŁADU χ^2

Tabela poniżej podaje wartości krytyczne $\chi^2_{kr}(\alpha, \nu)$ zmiennej χ^2 dla niektórych wartości ryzyka α błędu pierwszego rodzaju oraz liczb ν stopni swobody.

Tabela 5

Prawdopodobieństwo α błędu pierwszego rodzaju	Wartości krytyczne $\chi^2_{kr}(\alpha,\nu)$ dla podanych liczb ν stopni swobody									
	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$	$\nu = 5$	$\nu = 6$	$\nu = 7$	$\nu = 8$	$\nu = 9$	$\nu = 10$
0,001	10,83	13,82	16,27	18,47	20,51	22,46	24,32	26,12	27,88	29,59
0,005	7,88	10,60	12,84	14,86	16,75	18,55	20,28	21,95	23,59	25,19
0,010	6,63	9,21	11,35	13,28	15,08	16,81	18,47	20,09	21,67	23,21
0,050	3,84	5,99	7,82	9,49	11,07	12,59	14,07	15,51	16,92	18,31
0,100	2,71	4,61	6,25	7,78	9,24	10,64	12,02	13,36	14,68	15,99

Prawdopodobieństwo α błędu pierwszego rodzaju	Wartości krytyczne $\chi^2_{kr}(\alpha,\nu)$ dla podanych liczb ν stopni swobody									
	$\nu = 11$	$\nu = 12$	$\nu = 13$	$\nu = 14$	$\nu = 15$	$\nu = 16$	$\nu = 17$	$\nu = 18$	$\nu = 19$	$\nu = 20$
0,001	31,26	32,91	34,53	36,12	37,70	39,25	40,79	42,31	43,82	45,31
0,005	26,76	28,30	29,82	31,32	32,80	34,27	35,72	37,16	38,58	40,00
0,010	24,73	26,22	27,69	29,14	30,58	32,00	33,41	34,81	36,19	37,57
0,050	19,68	21,03	22,36	23,68	25,00	26,30	27,59	28,87	30,14	31,41
0,100	17,28	18,55	19,81	21,06	22,31	23,54	24,77	25,99	27,20	28,41

Prawdopodobieństwo α błędu pierwszego rodzaju	Wartości krytyczne $\chi^2_{kr}(\alpha,\nu)$ dla podanych liczb ν stopni swobody									
	$\nu = 21$	$\nu = 22$	$\nu = 23$	$\nu = 24$	$\nu = 25$	$\nu = 26$	$\nu = 27$	$\nu = 28$	$\nu = 29$	$\nu = 30$
0,001	46,80	48,27	49,73	51,18	52,62	54,05	55,48	56,89	58,30	59,70
0,005	41,40	42,80	44,18	45,56	46,93	48,29	49,65	50,99	52,34	53,67
0,010	38,93	40,29	41,64	42,98	44,31	45,64	46,96	48,28	49,59	50,89
0,050	32,67	33,92	35,17	36,42	37,65	38,89	40,11	41,34	42,56	43,77
0,100	29,62	30,81	32,01	33,20	34,38	35,56	36,74	37,92	39,09	40,26

B. PRAWDOPODOBIEŃSTWA DLA TESTU χ^2

Tabela poniżej podaje wartości prawdopodobieństwa $P(\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}_0^2)$ (w procentach), otrzymania w doświadczeniu o ν stopniach swobody, wartości zmiennej $\tilde{\chi}^2$ większej niż wartość $\tilde{\chi}_0^2$ uzyskana z danych. Puste miejsca oznaczają wartości prawdopodobieństwa mniejsze od 0,05%.

Tabela 6

$\tilde{\chi}_0^2$

ν	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	8,0	10,0
1	100	48	32	22	16	11	8,3	6,1	4,6	3,4	2,5	1,9	1,4	0,5	0,2
2	100	61	37	22	14	8,2	5,0	3,0	1,8	1,1	0,7	0,4	0,2	—	—
3	100	68	39	21	11	5,8	2,9	1,5	0,7	0,4	0,2	0,1	—	—	—
4	100	74	41	20	9,2	4,0	1,7	0,7	0,3	0,1	0,1	—	—	—	—
5	100	78	42	19	7,5	2,9	1,0	0,4	0,1	—	—	—	—	—	—

ν	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
1	100	65	53	44	37	32	27	24	21	18	16	14	12	11	9,4	8,3
2	100	82	67	55	45	37	30	25	20	17	14	11	9,1	7,4	6,1	5,0
3	100	90	75	61	49	39	31	24	19	14	11	8,6	6,6	5,0	3,8	2,9
4	100	94	81	66	52	41	31	23	17	13	9,2	6,6	4,8	3,4	2,4	1,7
5	100	96	85	70	55	42	31	22	16	11	7,5	5,1	3,5	2,3	1,6	1,0
6	100	98	88	73	57	42	30	21	14	9,5	6,2	4,0	2,5	1,6	1,0	0,6
7	100	99	90	76	59	43	30	20	13	8,2	5,1	3,1	1,9	1,1	0,7	0,4
8	100	99	92	78	60	43	29	19	12	7,2	4,2	2,4	1,4	0,8	0,4	0,2
9	100	99	94	80	62	44	29	18	11	6,3	3,5	1,9	1,0	0,5	0,3	0,1
10	100	100	95	82	63	44	29	17	10	5,5	2,9	1,5	0,8	0,4	0,2	0,1
11	100	100	96	83	64	44	28	16	9,1	4,8	2,4	1,2	0,6	0,3	0,1	0,1
12	100	100	96	84	65	45	28	16	8,4	4,2	2,0	0,9	0,4	0,2	0,1	—
13	100	100	97	86	66	45	27	15	7,7	3,7	1,7	0,7	0,3	0,1	0,1	—
14	100	100	98	87	67	45	27	14	7,1	3,3	1,4	0,6	0,2	0,1	—	—
15	100	100	98	88	68	45	26	14	6,5	2,9	1,2	0,5	0,2	0,1	—	—
16	100	100	98	89	69	45	26	13	6,0	2,5	1,0	0,4	0,1	—	—	—
17	100	100	99	90	70	45	25	12	5,5	2,2	0,8	0,3	0,1	—	—	—
18	100	100	99	90	70	46	25	12	5,1	2,0	0,7	0,2	0,1	—	—	—
19	100	100	99	91	71	46	25	11	4,7	1,7	0,6	0,2	0,1	—	—	—
20	100	100	99	92	72	46	24	11	4,3	1,5	0,5	0,1	—	—	—	—
22	100	100	99	93	73	46	23	10	3,7	1,2	0,4	0,1	—	—	—	—
24	100	100	100	94	74	46	23	9,2	3,2	0,9	0,3	0,1	—	—	—	—
26	100	100	100	95	75	46	22	8,5	2,7	0,7	0,2	—	—	—	—	—
28	100	100	100	95	76	46	21	7,8	2,3	0,6	0,1	—	—	—	—	—
30	100	100	100	96	77	47	21	7,2	2,0	0,5	0,1	—	—	—	—	—

C. CAŁKI ROZKŁADU GAUSSA.

Tabela poniżej podaje wartość całki standaryzowanego rozkładu Gaussa

$$F(z) = P(-\infty < x \le z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \quad z>0.$$

Z uwagi na symetrię rozkładu, wartość całki dla ujemnych wartości argumentu można wyznaczyć ze związku $F(-z) = 1 - F(z)$.

Tabela 7

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,10	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,20	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,30	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,40	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,50	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,60	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,70	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,80	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,90	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,00	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,10	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,20	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,30	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,40	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,50	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,60	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,70	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,80	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,90	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,00	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,10	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,20	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,30	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,40	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,50	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,60	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,70	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,80	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,90	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,00	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,10	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,20	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,30	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,40	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,50	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,60	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,70	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,80	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,90	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000