Rozkład Gaussa i test $\chi 2$

Rozkład Gaussa jest scharakteryzowany dwoma parametrami- wartością oczekiwaną rozkładu $\boldsymbol{\mu}$ oraz dyspersją $\boldsymbol{\sigma}$:

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

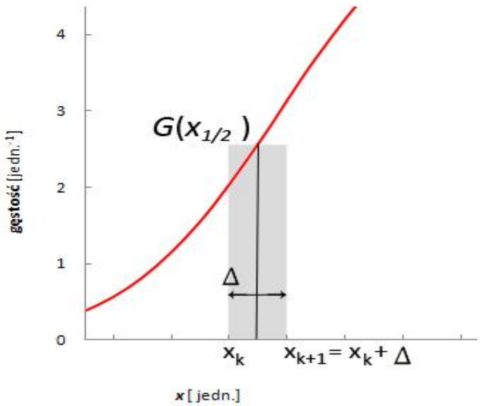
W warunkach eksperymentu, przy skończonej liczbie pomiarów N, najlepszym oszacowaniem tych parametrów są odpowiednio średnia arytmetyczna $x_{śr}$ oraz niepewność standardowa pojedynczego pomiaru s_x.

Jeśli chcemy nanieść krzywą teoretyczną na histogram pomiarów musimy dla każdego przedziału histogramowania obliczyć oczekiwaną częstość p_k (lub oczekiwaną liczbę zliczeń (krotność) $N_k = N{\cdot}p_k$) wynikającą z rozkłady Gaussa, która jest równa:

$$N_k = Np_k = N\int_{x_k}^{x_k+1} G\,(x)dx$$

W celu obliczenia całki z rozkładu Gaussa w granicach x_k do x_{k+1} możemy zastosować dwie metody:

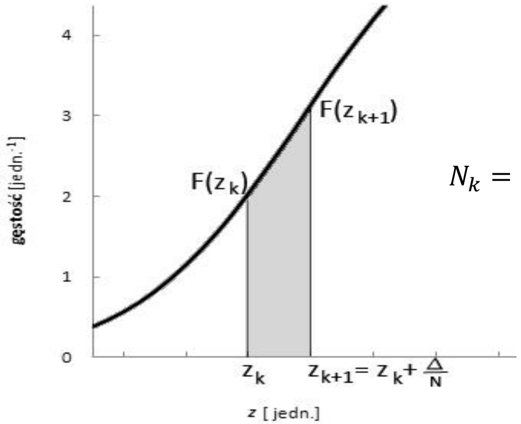
METODA 1 (przybliżona) polega na wyznaczeniu p_k poprzez obliczenie wartości gęstości w połowie k-tego przedziału histogramowania $G(x_{1/2})$ i pomnożeniu przez szerokość przedziału Δ.



$$p_k \approx G(x_{1/2})\Delta$$

$$N_k \approx N_k' = NG(x_{1/2})\Delta$$

METODA 2 (dokładna) polega na zmianie zmiennych $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ i na obliczeniu p_k jako różnicy całek ze standaryzowanego rozkładu Gaussa na krańcach przedziałów (w nowych zmiennych):



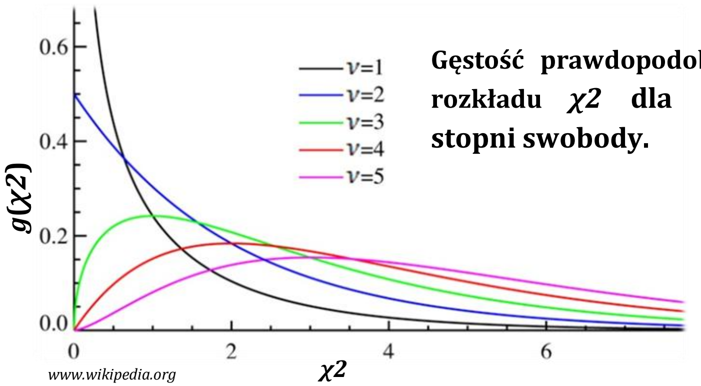
$$p_k = F(z_{k+1}) - F(z_k)$$

$$N_k = N \cdot p_k = N\big(F(z_{k+1}) - F(z_k)\big)$$

Wartości $F(z)$ odczytujemy z tabeli 7 ze skryptu.

Należy zauważyć, że w naszych rozważaniach rozkład Gaussa to gęstość prawdopodobieństwa i jest to wielkość tożsama z tym co nazywaliśmy gęstością przy tworzeniu histogramów (proszę zauważyć że wartości rozkładu Gaussa też mają jednostki [jedn.]$^{-1}$). Działają tutaj znane już wzory wiążące częstość, liczbę zliczeń i gęstość. Przykład naniesienia teoretycznego rozkładu Gaussa (obliczonego dwiema metodami) na histogram uzyskany z 432 pomiarów okresu drgań wahadła (z pierwszej instrukcji) jest przedstawiony w tabeli 1 i na wykresie 1. Proszę zauważyć że rozkład teoretyczny można nanieść na histogram zarówno liczby zliczeń (krotności), częstości jak i gęstości.

Test $\chi 2$ pozwala nam odpowiedzieć na pytanie czy rozkład teoretyczny jest zgodny z rozkładem doświadczalnym, ale nie daje nam jednoznacznej odpowiedzi TAK lub NIE. Związane jest to z probabilistycznym charakterem tego testu i jak każdy hazard pociąga za sobą ryzyko. Ryzyko to, zwane błędem pierwszego rodzaju i powszechnie oznaczane symbolem α, równe jest prawdopodobieństwu odrzucenia testowanej hipotez, nawet wtedy, gdy hipoteza jest prawdziwa. Dzieje się tak dlatego, że w teście obliczana jest wartość statystyki testowej $\chi 2$ o rozkładzie prawdopodobieństwa $g(\chi^2)$.

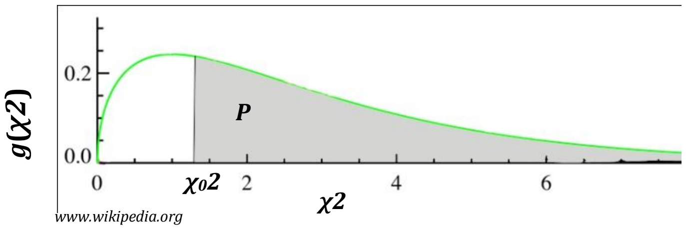


Gęstość prawdopodobieństwa $g(\chi 2)$ rozkładu $\chi 2$ dla różnej liczby stopni swobody.

Statystyka w wielokrotnie powtarzanych, w tych samych warunkach, eksperymentach może przyjąć różne wartości, przy czym, na mocy swej konstrukcji, duże jej wartości sugerują brak zgodności z modelu teoretycznego z modelem doświadczalnym. Z powodu losowego charakteru statystyki może się zdarzyć, że jej wartość $\chi 2$ w konkretnym doświadczeniu jest na tyle duża, że odrzucimy badaną hipotezę, nawet jeżeli ona jest prawdziwa. Tolerowalne prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wyznacza poziom wspomnianego ryzyka. Przykładowo, jeśli owe ryzyko ustalimy na 5%, to będzie to oznaczało, że gotowi jesteśmy odrzucić hipotezę o zgodności rozkładów w jednym przypadku na 20, nawet wtedy, gdy rozkład doświadczalny jest realizacją modelu teoretycznego.

Prawdopodobieństwo że wartość statystyki testowej $\chi 2$ będzie większa niż obserwowana wartość $\chi_0 2$ jest równe:

$$P(\chi_0^2 \leq \chi^2) = \int_{\chi_0^2}^{\infty} g(\chi^2) d\chi^2$$

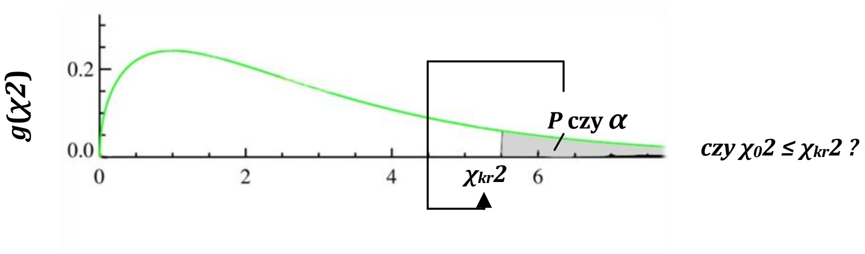


Postać analityczna $g(\chi 2)$ jest podana w instrukcji.

Wartość P można odczytać z tabeli 6 z instrukcji (w tabeli znajdują się wartości P nie dla wartości $\chi_0 2$ tylko dla zredukowanej wartości równej $\chi_0 2/\nu$).

Im odczytana wartość P jest większa tym bardziej rozkłady otrzymany (eksperymentalny) i zadany (teoretyczny) są ze sobą zgodne. Jeśli prawdopodobieństwo jest małe prawdopodobnie rozkłady są ze sobą niezgodne- w szczególności jeżeli P<5% uważamy taką niezgodność za **istotną** (http://en.wikipedia.org/wiki/Chi-square_distribution).

Zauważmy, że test *χ2* może być sformułowany nieco inaczej: zamiast odczytywania dla naszego $\chi_0 2$ prawdopodobieństwa *P* z tablic możemy najpierw założyć pewne prawdopodobieństwo *P (czyli α),* zobaczyć jaka granica całkowania $\chi_{kr}2$ odpowiada temu prawdopodobieństwu i porównać nasz parametr $\chi_0 2$ już z liczbą - $\chi_{kr}2$ ale pamiętając że porównanie zostało zrobione na poziomie *P* (czyli *α*). Taka taktyka jest przyjęta w skrypcie.



Wartości $\chi_{kr}2$ dla paru wartości *α* w granicach 0.1-10% można odczytać z tabeli 5 z instrukcji. Widzimy że podane *α* są małe co skutkuje dużą tolerancją testu *χ2* – przykładowo jeśli dopuścimy możliwość odrzucenia prawdziwej hipotezy z prawdopodobieństwem *α*= 1% dla zagadnienia w którym stopień swobody wyniósł 6 odczytujemy $\chi_{kr}2$= 16.81 co daje nam dużą szansę że obliczone dla naszego przypadku $\chi_0 2$ będzie od $\chi_{kr}2$ mniejsze i test *χ2* i hipoteza o zgodności rozkładów nie będzie odrzucona. Jeśli jednak obliczone $\chi_0 2$ będzie większe niż 16.81 możemy zmienić nasz warunek na *α*, z mniejszą *α* $\chi_{kr}2$ rośnie a więc szanse na to że $\chi_0 2 < \chi_{kr}2$ rosną.

W tabeli 2 przeprowadzony został test *χ2* dla rozkładu 432 pomiarów drgań wahadła (ograniczono się do liczenia wartości oczekiwanych p_k drugą, dokładną metodą). Ponieważ warunkiem przeprowadzenia testu *χ2* jest liczba zliczeń w każdym przedziale powyżej 5, połączone zostały ze sobą cztery pierwsze i cztery ostatnie przedziały histogramowania. Stopień swobody $\nu = m - 1 - 2$, gdzie m to liczba przedziałów histogramowania, wyniósł 8.

Parametr $\chi_0 2$ policzony ze znanego Państwu wzoru:

$$\chi_0^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(n_k - N_k)^2}{N_k}$$

wyniósł 38.41 (czyli zredukowana wartość $\chi_0 2$ wyniosła 4.80). Oznacza to, patrząc na tabele 5 z instrukcji, że **odrzucamy hipotezę o zgodności rozkładów na poziomie (z prawdopodobieństwem błędu pierwszego rodzaju) poniżej 0.1%.** Tabela 6 z instrukcji, jako mniej dokładna, jest w tym wypadku mniej dla nas użyteczna ponieważ mówi nam że błąd pierwszego rodzaju jest poniżej 0.2%.

W tabeli 3 przedstawiono wymyślony rozkład okresów drgań wahadła taki by dobrze „pasował" do rozkładu Gaussa. Parametr $\chi_0 2$ wyniósł 1.61 (zredukowana wartość 0.20). Widzimy, że w tym przypadku tabela 5 jest dla nasz bezużyteczna a z tabeli 6 odczytujemy że odrzucenie hipotezy wiązało by się z błędem pierwszego rodzaju 99%. **Tutaj lepiej powiedzieć że nasze pomiary są niesprzeczne z hipotezą o zgodności rozkładów w 99%** (na poziomie 99%).

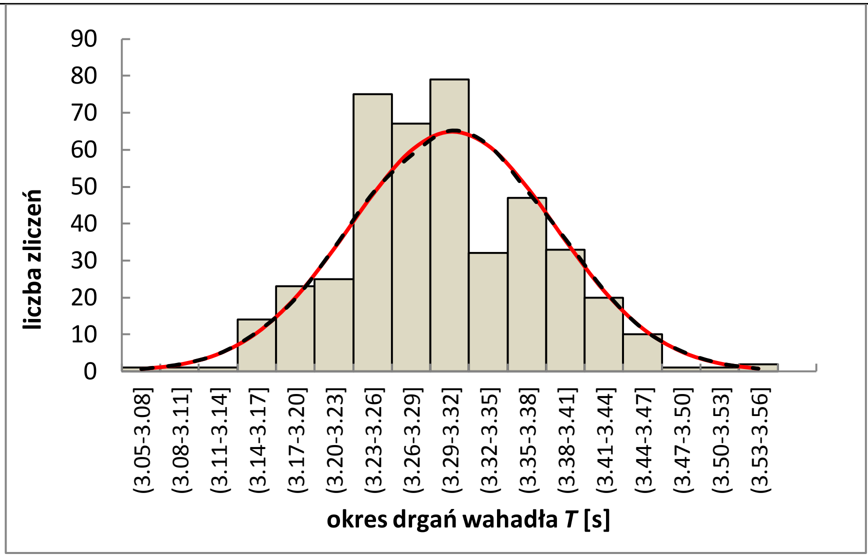
Bibliografia:

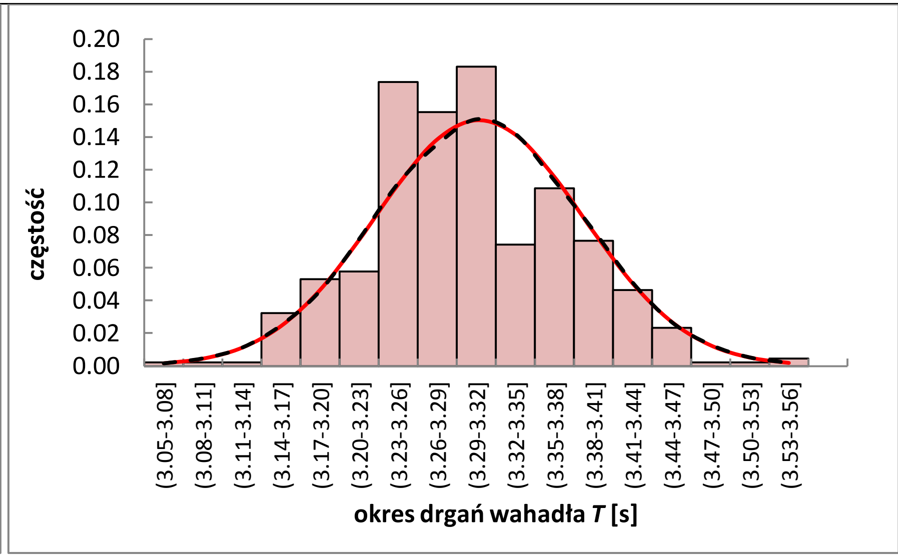
- J.R Taylor, *Wstęp do analizy błędu pomiarowego*, PWN, 1995
- www.wikipedia.org

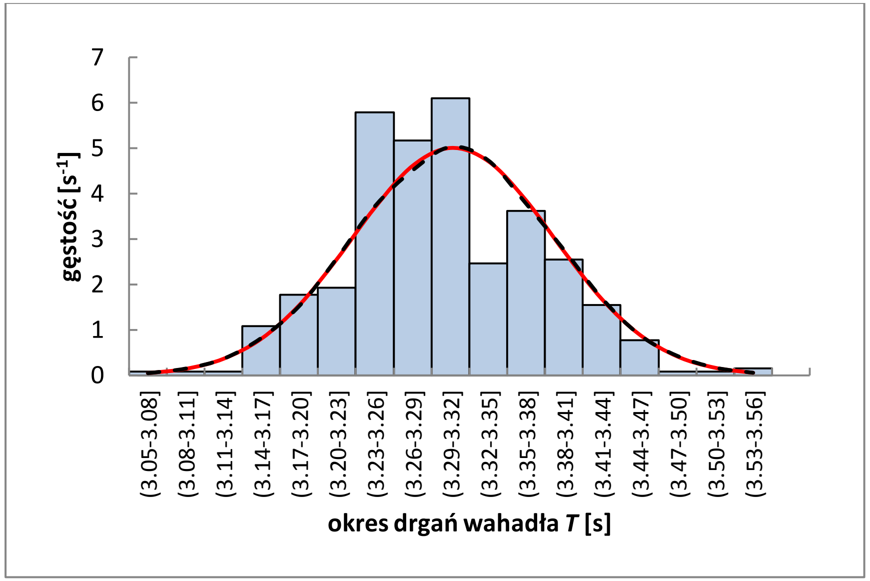
Wartości eksperymentalne				Wartości oczekiwane (z rozkładu teoretycznego, tu: rozkładu Gaussa)							
				metoda przybliżona				metoda dokładniejsza			
przedział k	**liczba zliczeń n_k**	**częstość p_k**	**gęstość f_k [s^{-1}]**	**½ przedziału $T_{1/2}$ [s]**	**$f_k \leftrightarrow G(T_{1/2})$ [s^{-1}]**	**$p_k = G(T_{1/2}) \cdot \Delta$**	**$N_{k'} = p_k \cdot N$**	**przedział k w nowych zmiennych z**	**$p_k = F(z_{k+1}) - F(z_k)$**	**$f_k = p_k / \Delta$ [s^{-1}]**	**$N_k = N \cdot p_k$**
(3.05-3.08]	1	0.002	0.08	3.065	0.049	0.001	0.64	(-3.23 , -2.85]	0.002	0.05	0.67
(3.08-3.11]	1	0.002	0.08	3.095	0.145	0.004	1.87	(-2.85 , -2.47]	0.005	0.15	1.99
(3.11-3.14]	1	0.002	0.08	3.125	0.367	0.011	4.76	(-2.47 , -2.10]	0.011	0.37	4.80
(3.14-3.17]	14	0.032	1.08	3.155	0.808	0.024	10.48	(-2.10 , -1.72]	0.025	0.83	10.71
(3.17-3.20]	23	0.053	1.77	3.185	1.545	0.046	20.03	(-1.72 , -1.35]	0.046	1.53	19.79
(3.20-3.23]	25	0.058	1.93	3.215	2.564	0.077	33.22	(-1.35 , -0.97]	0.078	2.58	33.48
(3.23-3.26]	75	0.174	5.79	3.245	3.691	0.111	47.84	(-0.97 , -0.59]	0.112	3.72	48.21
(3.26-3.29]	67	0.155	5.17	3.275	4.613	0.138	59.79	(-0.59 , -0.22]	0.135	4.51	58.45
(3.29-3.32]	79	0.183	6.10	3.305	5.004	0.150	64.85	(-0.22 , 0.16]	0.151	5.02	65.10
(3.32-3.35]	32	0.074	2.47	3.335	4.710	0.141	61.04	(0.16 , 0.54]	0.142	4.73	61.26
(3.35-3.38]	47	0.109	3.63	3.365	3.848	0.115	49.87	(0.54 , 0.91]	0.113	3.77	48.90
(3.38-3.41]	33	0.076	2.55	3.395	2.728	0.082	35.36	(0.91 , 1.29]	0.083	2.76	35.81
(3.41-3.44]	20	0.046	1.54	3.425	1.679	0.050	21.76	(1.29 , 1.67]	0.051	1.70	22.03
(3.44-3.47]	10	0.023	0.77	3.455	0.897	0.027	11.62	(1.67 , 2.04]	0.027	0.89	11.58
(3.47-3.50]	1	0.002	0.08	3.485	0.416	0.012	5.39	(2.04 , 2.42]	0.013	0.43	5.57
(3.50-3.53]	1	0.002	0.08	3.515	0.167	0.005	2.17	(2.42 , 2.80]	0.005	0.17	2.25
(3.53-3.56]	2	0.005	0.15	3.545	0.058	0.002	0.76	(2.80 , 3.17]	0.002	0.06	0.79
suma:	**432**	**1**				**1**	**432**		**1**		**432**

średnia $T_{śr}$	**3.307 s**	**$\leftrightarrow \mu$**
niepewność standardowa pojedynczego pomiaru s_T	**0.080 s**	**$\leftrightarrow \sigma$**

Tabela 1. *Wartości eksperymentalne oraz wartości oczekiwane z rozkładu Gaussa okresu drgań wahadła.*







Wykres 1.
Histogram okresów drgań wahadła wraz z naniesioną krzywą teoretyczną wyznaczoną ***metodą przybliżoną*** *oraz* ***metodą dokładniejszą***

Wartości eksperymentalne		**Wartości oczekiwane**			
przedział *k*	**liczba zliczeń n_k**	**przedział *k*** w nowych zmiennych z	$p_k = F(z_{k+1}) - F(z_k)$	$N_k = N \cdot p_k$	$\frac{(n_k - N_k)^2}{N_k}$
(-∞ -3.17]	17	(-∞, -1.72]	0.0427	18.45	0.11
(3.17-3.20]	23	(-1.72, -1.35]	0.0458	19.79	0.52
(3.20-3.23]	25	(-1.35, -0.97]	0.0775	33.48	2.15
(3.23-3.26]	75	(-0.97, -0.59]	0.1116	48.21	14.89
(3.26-3.29]	67	(-0.59, -0.22]	0.1353	58.45	1.25
(3.29-3.32]	79	(-0.22, 0.16]	0.1507	65.10	2.97
(3.32-3.35]	32	(0.16, 0.54]	0.1418	61.26	13.97
(3.35-3.38]	47	(0.54, 0.91]	0.1132	48.90	0.07
(3.38-3.41]	33	(0.91, 1.29]	0.0829	35.81	0.22
(3.41-3.44]	20	(1.29, 1.67]	0.051	22.03	0.19
(3.44-∞]	14	(1.67, ∞]	0.0475	20.52	2.07
suma:	**432**			$\chi_0\ 2$	**38.41**
$\nu = 8$	liczba stopni swobody			$\chi_0\ 2/\nu$	**4.80**

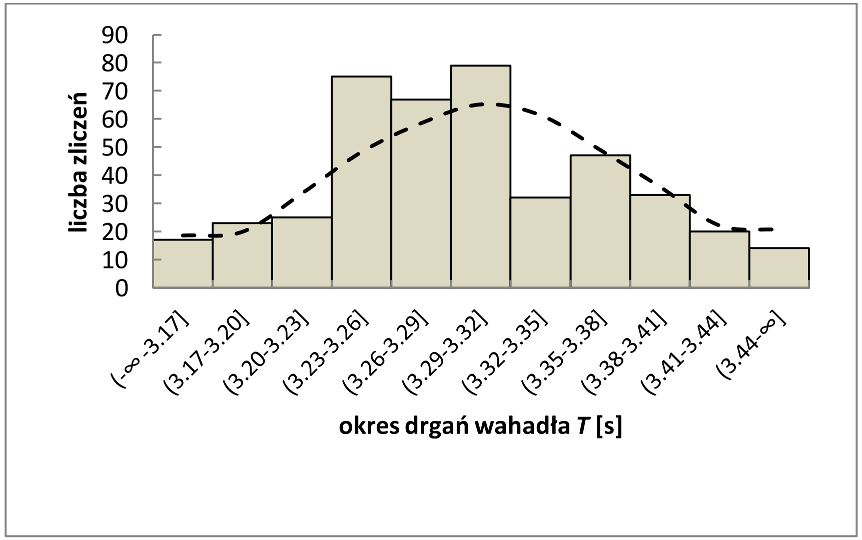


Tabela 2 + Wykres 2.
Wartości eksperymentalne oraz wartości oczekiwane liczby zliczeń n_k okresu drgań wahadła oraz obliczony parametr χ_0 2

Wartości eksperymentalne		Wartości oczekiwane			
przedział *k*	**liczba zliczeń n_k**	**przedział *k*** w nowych zmiennych z	**$p_k = F(z_{k+1}) - F(z_k)$**	**$N_k = N \cdot p_k$**	$\frac{(n_k - N_k)^2}{N_k}$
(-∞ -3.17]	19	(-∞ , -1.72]	0.0427	18.45	0.017
(3.17-3.20]	21	(-1.72 , -1.35]	0.0458	19.79	0.075
(3.20-3.23]	33	(-1.35 , -0.97]	0.0775	33.48	0.007
(3.23-3.26]	48	(-0.97 , -0.59]	0.1116	48.21	0.00093
(3.26-3.29]	54	(-0.59 , -0.22]	0.1353	58.45	0.34
(3.29-3.32]	73	(-0.22 , 0.16]	0.1507	65.10	0.96
(3.32-3.35]	60	(0.16 , 0.54]	0.1418	61.26	0.026
(3.35-3.38]	47	(0.54 , 0.91]	0.1132	48.90	0.074
(3.38-3.41]	36	(0.91 , 1.29]	0.0829	35.81	0.00098
(3.41-3.44]	22	(1.29 , 1.67]	0.051	22.03	0.00005
(3.44-∞]	19	(1.67 , ∞]	0.0475	20.52	0.11
suma:	**432**			***χ_0 2***	**1.61**
***ν* = 8**	liczba stopni swobody			***χ_0 2/ν***	**0.20**

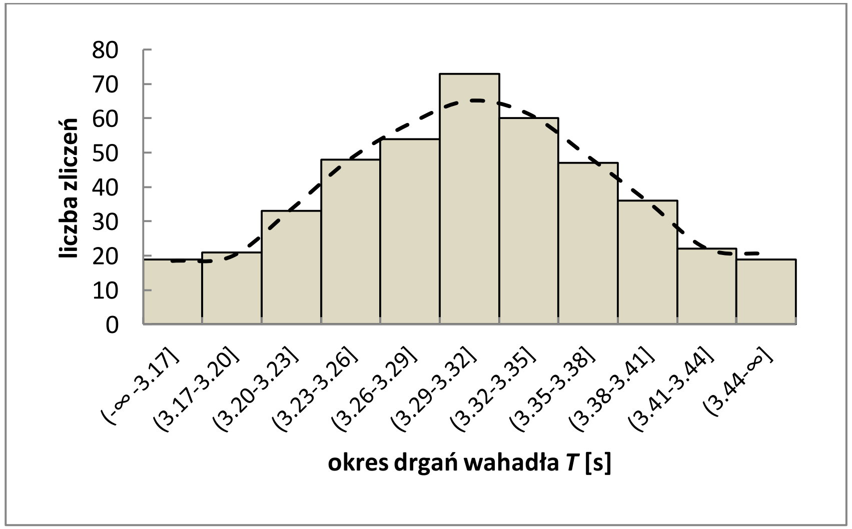


Tabela 3 + Wykres 3.
Wartości eksperymentalne (wymyślone) oraz wartości oczekiwane liczby zliczeń n_k okresu drgań wahadła oraz wyliczony parametr χ_0 2