Ćwiczenie nr 1 – WAHADŁO MATEMATYCZNE

Instrukcja dla studenta (wersja z dnia 4 VII 2018)

A. Majhofer i R. Nowak

WYMAGANIA TEORETYCZNE

- Równanie Newtona dla wahadła w przypadku małych drgań: wyprowadzenie, rozwiązanie, wzór na okres drgań i związek między częstością drgań a okresem.
- Definicja funkcji liniowej, zależności proporcjonalnej, odwrotnie proporcjonalnej, potęgowej i wykładniczej i ich wykresy.

WSTĘP

Wykonując serię pomiarów tej samej wielkości fizycznej w tych samych warunkach i tym samym przyrządem, napotykamy, w zależności od jakości przyrządu, dwie sytuacje:

- uzyskujemy zbiór różnych wartości,
- uzyskujemy stale tę samą wartość.

W tym ćwiczeniu zajmiemy się pierwszym przypadkiem. Występuje on, gdy pomiary wykonujemy przyrządem, którego rozdzielczość, rozumiana jako najmniejsza działka skali, jest znacznie mniejsza od zakresu naturalnej zmienności badanego zjawiska. Rozważymy rozmaite metody, które w sposób graficzny i ilościowy opiszą rozkład uzyskanych wyników. Zbadamy, jak suma kwadratów odchyleń od średniej skaluje się z liczbą pomiarów i wprowadzimy podstawowe parametry charakteryzujące właściwości rozkładu: **średnią** i **niepewność standardową pojedynczego pomiaru** i na tej podstawie zdefiniujemy **niepewność standardową średniej arytmetycznej**. Rozważymy możliwe modyfikacje sposobu przeprowadzania doświadczenia i wykonywania pomiarów wiodące do ograniczenia obserwowanej zmienności. Zrealizowanie tych zadań wymaga zbiorów dużej liczby danych, a więc wielokrotnych pomiarów tej samej wielkości fizycznej – w naszym przypadku – okresu wahadła.

POMIARY

Masz do dyspozycji:

- wahadło o regulowanej długości,
- stoper pozwalający na odczyt czasu z dokładnością do 0,01 s,
- taśmę mierniczą pozwalającą na odczyt długości z dokładnością do 1 mm.

Część pomiarowa I – Ustal długość wahadła tak, aby dolna krawędź kuli wahadła znalazła się na wysokości h_1 od kilku do kilkunastu centymetrów nad podłogą. Kula wahadła ma średnicę około 5 cm, więc musisz zdecydować, jaką wielkość będziesz mierzyć: od podłogi do dolnej krawędzi kuli, do środka czy też do jej górnej krawędzi. Zmierz i zanotuj tę odległość – **w żadnym wypadku nie próbuj mierzyć długości nici wahadła**. Pod znajdującym się w położeniu równowagi wahadłem umieść na podłodze długopis lub kartkę papieru z narysowaną wyraźną kreską. Wychyl wahadło w kierunku prostopadłym do narysowanej na kartce kreski o kilka stopni od położenia równowagi i zwolnij je. Spróbuj różnych sposobów zwalniania wahadła i obserwuj je przez kilkanaście okresów. Zwróć uwagę, żeby wahadło nie krążyło po elipsie, ani kula wahadła nie „kiwała" się wokół własnego środka ciężkości. Efekty te nie powinny się pojawić. Wykonaj także najpierw parę próbnych pomiarów, które pozwolą Ci poćwiczyć rękę, ... Gdy „dopracujesz" się w miarę idealnego sposobu uruchamiania wahadła i wykonania pomiaru, zapisz wyniki 216 (słownie: dwustu szesnastu) pomiarów **jednego** okresu wahań wahadła.

Okres wahań wyznaczaj jako przedział czasu między dwoma kolejnymi przejściami wahadła w tę samą stronę nad kreską na kartce.

Część pomiarowa II – Nie zmieniając układu doświadczalnego, wykonaj 54 (słownie: pięćdziesiąt cztery) pomiary **poczwórnego** okresu wahań wahadła (czasu trwania 4 pełnych okresów).

Część pomiarowa III – Zmierz 5 razy czas trwania 10 okresów. Skróć wahadło. Zmierz i zanotuj odległość h_2 między kulą a podłogą, mierzona w ten sam sposób, jak w części I. Zmierz pięciokrotnie i zanotuj czas trwania 10 okresów drgań. Powtórz tę operację dla następnych trzech wysokości h_3, h_4 i h_5 kuli wahadła nad podłogą starając się, aby dobrane przez Ciebie długości pokrywały, w miarę równych odstępach, cały dostępny zakres długości wahadła. Przy małych długościach wahadła pomiar okresu wykonuj, obserwując przejście kuli wahadła na tle wybranego punktu – framugi drzwi, nogi stołu itp. Nie muszą to być punkty, które precyzyjnie określają położenie równowagi wahadła. Unikaj jednak takich punktów odniesienia, które są bliskie momentom zwrotnym w ruchu wahadła, gdyż wyznaczany przy ich wykorzystaniu okres będzie mniej dokładny (dlaczego?). Dane uzyskane w tej części wykorzystamy podczas ćwiczeń rachunkowych do jednego z następnych doświadczeń.

ANALIZA DANYCH

Na stronie, z której pobrałaś/pobrałeś niniejszą Instrukcję, znajduje się arkusz kalkulacyjny do programu Calc pakietu Libre/Open Office przygotowany do wykonania obliczeń będących przedmiotem poniższych zadań. Arkusz do tego ćwiczenia jest wyjątkowy – został zaprogramowany tak, że po wpisaniu okresów drgań znajdziesz w nim większość liczb potrzebnych do tego, aby przygotować niektóre z rysunków niezbędnych do ćwiczeń rachunkowych i do raportu. Arkusze do kolejnych ćwiczeń nie dadzą Ci takiego luksusu – należy je widzieć raczej jako sugestie sposobu organizowania Twych obliczeń. Oczywiście, nie musisz korzystać ze wskazanych arkuszy – możesz przygotować własny arkusz, skorzystać z Twego ulubionego języka algorytmicznego lub odwołać się do istniejącego oprogramowania typu MAPLE lub MATHEMATICA. Aby jednak uniknąć błędów zaokrągleń i pomyłek, zalecanym sposobem przeprowadzania obliczeń jest korzystanie z tego typu narzędzi.

Pierwszym krokiem analizy statystycznej wyników wielokrotnych pomiarów jest ich graficzna prezentacja w postaci **histogramu** (patrz: DODATEK A), który syntetycznie obrazuje rozkład uzyskanych wyników w próbce.

***Zadanie* 1 (*obowiązkowe do domu – do wykonaniu przed ćwiczeniami rachunkowymi*)**

a) *Narysuj na papierze milimetrowym histogram* ***gęstości*** *lub* ***częstości*** *(patrz DODTAEK A) uzyskanych przez siebie* 216 *wyników pomiaru jednego okresu drgań wahadła. Ustal zakres histogramu na podstawie minimalnej i maksymalnej wartości uzyskanych wyników. Zastosuj stały przedział histogramowania o szerokości* $\Delta = 0{,}03$ s. *Zastanów się, jakich zmian w kształcie histogramu oczekujesz, jeśli liczebność próbki powiększysz np. dziesięciokrotnie.*

b) *Narysuj na papierze milimetrowym histogram wartości średnich okresów wyznaczonych dla kolejnych czwórek zmierzonych wartości pojedynczych okresów. Na osi rzędnych zachowaj tę samą wielkość co w punkcie a), jak również ten sam przedział, zakres i skalę histogramu, co w punkcie a).*

c) *Z danych uzyskanych w* ***Części pomiarowej II****, narysuj na papierze milimetrowym histogram czwartych części wartości kolejnych poczwórnych okresów. Na osi rzędnych zachowaj tę samą wielkość co w punkcie a), jak również ten sam przedział, zakres i skalę histogramu, co w punkcie a).*

d) *Porównaj kształt histogramów uzyskanych w punktach a), b) oraz c). Czy dostrzegasz różnice? Jeśli tak, to je wymień.*

e) *Narysuj ten sam histogram co w punkcie a*), *ale z przedziałem o szerokości* $\Delta = 0{,}01$ s. *Co sądzisz o wykorzystywanym stoperze*? *Czy stoper, który masz w swym zegarku, albo komórce, działa tak samo*?

*Histogramy powinny przedstawiać gęstości lub częstości, a nie liczebności, same zaś rysunki muszą być duże, przynajmniej połowy formatu A*4. *Papier milimetrowy uzyskasz w Sekretariacie Pracowni lub skorzystaj z dołączonego do tej instrukcji.*

***Zadanie* 2 (*na ćwiczeniach*)**

Wykonano wielokrotny pomiar pewnej ustalonej wielkości fizycznej, np. okresu drgań wahadła i otrzymano N wartości x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, N$. *Poszukujemy wielkości* μ, *która będąc centralna wszystkim uzyskanym wartościom* x_i, *a tym samym możliwie im najbliższa, mogłaby je wszystkie zastąpić jedną, wspólną wartością, ukazującą typową, przeciętną wartość uzyskanego* *zbioru danych. W tym celu konstruujemy miarę odległości między nieznaną wartością μ, a wartościami x_i w postaci sumy kwadratów tzw.* ***reszt****:*

$$R = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \mu \right)^2$$

i poszukujemy jej minimum względem nieznanej wielkości μ.Pokaż, że rozwiązaniem problemu jest średnia arytmetyczna.

Na podstawie serii wyników równoważnych pomiarów, w naukach przyrodniczych za **ocenę prawdziwej**, często określanej też mianem: **dokładnej**, wartości wielkości fizycznej, którą mierzymy, przyjmuje się **średnią arytmetyczną** $\overline{x}$, którą dla serii N wartości x_i, $i = 1,2,..., N$, definiujemy jako:

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \ ,$$

za miarę zaś rozrzutu uzyskanych wartości, czyli szerokości rozkładu, przyjmujemy wielkość s_x, której kwadrat jest proporcjonalny do minimalnej sumy kwadratów reszt:

$$s_x^2 \propto \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \overline{x} \right)^2 .$$

Gdy mamy dwa zbiory danych z tą samą liczbą N wartości to, bez wątpienia, suma kwadratów odchyleń wartości od średniej będzie mniejsza dla danych, dla których histogram jest węższy. Jeśli jednak liczebności histogramów są różne, to miara ta traci swą użyteczność, bo zależy ona od liczby N składników: im jest ich więcej – tym suma jest większa, dlatego naszym zadaniem będzie wyznaczenie formy tej zależności. W tym celu będziemy badali własności rozkładów danych zgrupowanych.

***Zadanie* 3 (*obowiązkowe do domu – do wykonania przed ćwiczeniami rachunkowymi*)**

a) *Podziel swoją próbkę* 216 *pojedynczych okresów drgań na k =* 108 *rozłącznych grup* (*podpróbki*) *po n =* 2 *kolejne okresy w każdej* (2·108 = 216). *Dla każdej podpróbki oblicz średnią i sumę kwadratów odchyleń indywidualnych wyników pomiaru od tej średniej. Następnie oblicz średnią z tych sum. Za pomocą ogólnych wzorów procedurę tę można zapisać następująco. Niech x_{ij} oznacza wartość elementu o numerze j, j = 1,2,..., n, w podpróbce o numerze i, i = 1,2,..., k, wtedy suma kwadratów odchyleń od średniej*

$$\overline{x}_{(n)i} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, k \,,$$

w i-tej podpróbce wynosi

$$R_{(n)i} = \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - \overline{x}_{(n)i} \right)^2, \quad i = 1, 2, \ldots, k \,,$$

gdzie dodatkowy dolny indeks (n) *przypomina nam, że dane pochodzą z podziału na podpróbki liczące n wartości każda. Ponieważ otrzymujemy k wartości $R_{(n)i}$, uśrednijmy je:*

$$R_{(n)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} R_{(n)i} \ .$$

b) *Wykonaj analogiczne obliczenia dla następujących grupowań: n =* 3 *(k =* 72*), n =* 4 *(k =* 54*), n =* 6 *(k =* 36*), n = 8 (k =* 27*), n =* 9 *(k =* 24*), n =* 12 *(k =* 18*), n =* 18 *(k =* 12*) oraz n =*24 *(k =* 9*). Ile wynosi wartość $R_{(1)}$?*

c) *Wykonaj* <u>*na papierze milimetrowym*</u> *wykres zależności $R_{(n)}$ od liczebności n podpróbki.*

d) *Oblicz średnią $\overline{x}$ wszystkich zmierzonych przez Ciebie pojedynczych okresów.*

e) *W dalszej części analizy będziemy też badali rozrzut średniej z danych grupowanych, dlatego dla każdego z grupowań danych w podpróbki po n = 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18 oraz 24 elementów, oblicz*

$$s_{(n)}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} \left(\overline{x}_{(n)i} - \overline{x} \right)^2, \text{ gdzie odpowiednio } k = 108, 72, 54, 36, 27, 24, 18, 12 \text{ oraz } 9 \,.$$

Wykonaj także dodatkowe obliczenia dla n = 1, czyli dla k = 216.
f) Narysuj <u>na papierze milimetrowym</u> wykres zależności $s^2_{(n)}$ *od liczebności n.*
g) Narysuj <u>na papierze milimetrowym</u> wykres zależności $\ln(s^2_{(n)}/1\ \mathrm{s}^2)$ *od* $\ln n$ (*wielkość* $1\ \mathrm{s}^2$ *pod funkcją logarytm to jednostka czasu – sekunda – podniesiona do kwadratu*).
h) Narysuj <u>na papierze milimetrowym</u> wykres zależności $s^2_{(n)}$ *od* $1/n$ (*odwrotności liczebności n*).
Papier milimetrowy uzyskasz w Sekretariacie Pracowni lub użyj dołączonego do instrukcji.

***Zadanie* 4 (*na ćwiczeniach*)**

Spójrz na swój wykres zależności $R_{(n)}$ *od liczebności n. Jaki charakter zależności widzisz? Ile wynosi* $R_{(1)}$*? Jeśli widzisz zależność liniową, to przykładając linijkę do punktów wykresu, narysuj prostą przechodzącą najbliżej tych punktów. Wyznacz wartość n, przy której ta prosta przecina oś odciętych i oblicz współczynnik jej nachylenia.*

Wielkość $R_{(n)}/(n-1)$ to średni kwadrat odchylenia zmierzonych wartości od średniej i ze swej konstrukcji nie zależy ona istotnie od liczby n danych. Dlatego pierwiastek z tego odchylenia, będąc miarą rozrzutu danych, opisuje szerokość rozkładu. W naukach przyrodniczych, za ocenę rozrzutu, a więc i szerokości rozkładu wielkości x uzyskaną na podstawie próbki wartości x_i o liczebności N, przyjmujemy wielkość s_x zdefiniowaną za pomocą wyrażenia

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 .$$

Wielkość s_x, nazywamy **odchyleniem standardowym eksperymentalnym** lub też **odchyleniem standardowym z próbki.** Często termin ten uzupełniamy słowami: **wyniku pojedynczego pomiaru**, gdyż określa ono średnie odchylenie **indywidualnego** wyniku od średniej: wykonując **jeden** dodatkowy pomiar spodziewamy się, że jego wartość odchyli się od średniej, średnio rzecz biorąc, właśnie o wartość s_x (ściślej: kwadrat odchylenia tego wyniku od wartości średniej przyjmie wartość zbliżoną do s^2_x). Inna często spotykana nazwa wielkości s_x to **statystyczna niepewność standardowa**. Przestrzegamy przed utożsamiania tych terminów ze słowem **błąd**, gdyż

błąd to wartość różnicy między wartością zmierzoną, a wartością dokładną

i zazwyczaj pozostaje wielkością nieznaną.

Przy ustalonym grupowaniu danych, średnie wartości uzyskane w każdej z podpróbek będą miały rozkład, jak ilustruje to przykładowy histogram w ***Zadaniu* 1**, punkt ***b*)**. Przed chwilą zbudowaliśmy narzędzie do pomiaru szerokości rozkładu, zbadamy więc, jak zmienia się ta szerokość ze zmianą liczebności próbki, dla której obliczamy średnią. W tym celu posłużymy się kwadratem niepewności standardowej pojedynczego pomiaru, którą oznaczymy jako $s^2_{(n)}$, ale tym pojedynczym pomiarem będzie teraz nie indywidualna wartość okresu, lecz średni okres wyznaczony z podpróbki o liczebności n, o czym przypomina nam indeks (n).

***Zadanie* 5 (*na ćwiczeniach*)**

Spójrz na wykres zależności $s^2_{(n)}$ *od liczebności n podpróbki uzyskany w punkcie f) oraz wykres zależności* $\ln(s^2_{(n)}/1\ \mathrm{s}^2)$ *od* $\ln n$ *uzyskany w punkcie g)* ***Zadania* 3**. *Czy dostrzegasz prostą zależność między wielkościami? Jeśli widzisz zależność liniową* $\ln(s^2_{(n)}/1\ \mathrm{s}^2) = \alpha\ln(n) + \beta$*, to przykładając linijkę do wykresu, narysuj prostą przechodzącą, Twoim zdaniem, najbliżej wszystkich punktów pomiarowych i wyznacz wartości parametrów tej prostej.*

***Zadanie* 6 (*na ćwiczeniach*)**

Spójrz na wykres zależności $s^2_{(n)}$ *od* $1/n$ (*odwrotności liczebności n*) *uzyskany w punkcie h)* ***Zadania* 3**. *Czy dostrzegasz prostą zależność między wielkościami? Jeśli widzisz zależność liniową* $s^2_{(n)} = c/n$*, to, przykładając linijkę do wykresu, narysuj prostą przechodzącą, Twoim zdaniem, najbliżej wszystkich punktów pomiarowych i oceń wartość parametru tej prostej. Czy jest on jakościowo zgodny z wartościami uzyskanymi w poprzednim zadaniu?*

Z definicji zależności $s^2_{(n)}$ od n widzimy, że dla $n = 1$, tj. przy braku grupowania, wielkość $s^2_{(1)}$ to kwadrat niepewności s_x pojedynczego pomiaru. Jeśli jednak badamy średnią z n wartości, to kwadrat jej niepewności jest kwadratem niepewności pojedynczego pomiaru podzielonym przez liczbę *n* danych wchodzących do średniej, co prowadzi do następującego wniosku: **odchylenie standardowe eksperymentalne** $s_{\bar{x}}$ **średniej arytmetycznej** lub **statystyczną niepewność standardową** $s_{\bar{x}}$ **średniej arytmetycznej** uzyskaną z próbki o liczebności *N* definiujemy wzorem:

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{s_x^2}{N} = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 .$$

I tu, jak w przypadku niepewności pojedynczego pomiaru, terminu opisującego tę wielkość nie wolno nam utożsamiać ze słowem *błąd*.

Wielkość $s_{\bar{x}}$ opisuje część statystyczną naszego braku pewności co do tego, jak dobrze wartość $\bar{x}$ przybliża dokładną wartość mierzonej wielkości. W dalszych ćwiczeniach pojawi się dodatkowy przyczynek do niepewności pomiaru, zwany **systematycznym**. Końcową niepewność, obejmującą zarówno cześć statystyczną jak i systematyczną, będziemy oznaczali symbolem *u*, z ewentualnym indeksem podpowiadającym o jaką wielkość fizyczną chodzi. Jeśli niepewność zmierzonej wielkości nie ma składowej systematycznej, wtedy wielkość *u* jest wyznaczona przez część statystyczną, a przy braku części statystycznej, niepewność *u* jest tożsama z częścią systematyczną.

Jeśli mierzymy wielkość fizyczną μ **(*np. moduł Younga, długość fali światła, stałą Plancka,…*) *i x jest wynikiem pomiaru* (*np. wartością średnią lub wartością uzyskaną na innej drodze, np. na podstawie wzoru*), *natomiast u jest niepewnością wartości x, to końcowy wynik pomiaru zapisujemy jako*** $\hat{\mu} = x \pm u_x$ **(*np.*** $\hat{\mu} = \bar{x} \pm u_{\bar{x}}$**, *gdy korzystamy ze średniej*), *przy czym:***

- ***niepewność u końcowego wyniku pomiaru zaokrąglamy do dwóch cyfr znaczących,***
- ***wartość x (średnią*** $\bar{x}$***) zaokrąglamy zaś tak, aby ostatnia cyfra znacząca wypadała na tym samym miejscu, co ostatnia cyfra znacząca niepewności, przy czym wartość i jej niepewność muszą być wyrażone w tych samych jednostkach,***
- ***i nie ma takiej sytuacji, z wyjątkiem pomiaru wielkości bezwymiarowej, w której bylibyśmy zwolnieni z podania, wraz z wartością liczbową, jednostki.***

Symbol daszka „^”umieszczany nad symbolem, to dość powszechnie wykorzystywana w statystyce matematycznej notacja, oznaczająca ocenę wielkości.

Konsekwencją malenia niepewności średniej arytmetycznej jak odwrotność pierwiastka z liczebności próbki jest powiększenie tejże, często powyżej akceptowalnej granicy, gdy pragniemy poprawić nasz eksperyment i uzyskać dokładniejszy rezultat. I tak, gdybyśmy chcieli zmniejszyć niepewność pomiaru o czynnik np. 10, co nie jest ekstrawagancją, liczebność próbki musimy powiększyć o czynnik 100 – jeśli pierwotnie próbka liczyła 10 pomiarów, to nowa musi zawierać 1000 pomiarów. Zwiększenie liczebności o czynnik 100 oznacza wydłużenie, o ten sam czynnik, czasu trwania eksperymentu i zwiększenie, w tej samej proporcji, kosztów jego wykonania.

***Zadanie* 7 (*na ćwiczeniach – o ile zostanie czas*)**

Pokaż, że jeśli wyniki x_i *pomiarów, opisane wartością średnią* $\bar{x}$ *i niepewnością standardową* s_x*, przekształcimy liniowo do postaci* $y_i = ax_i + b$*, gdzie a i b to zadane stałe, to średnia* $\bar{y}$ *i niepewność standardowa* s_y *próbki wartości* y_i *wyznaczone są związkami:*

$$\bar{y} = a\bar{x} + b, \quad s_y = |a|\, s_x, \quad s_{\bar{y}} = |a|\, s_{\bar{x}} .$$

***Zadanie* 8 (*na ćwiczeniach – o ile zostanie czas*)**

Jeśli niepewność pojedynczego pomiaru okresu drgań wahadła wynosi s, to jakiej oczekujesz wartości niepewności $s_{(4)}$ *pojedynczego pomiaru będącego średnią arytmetyczną czterech kolejnych pojedynczych okresów? A jakiej spodziewasz się niepewności pojedynczego pomiaru czasu trwania czwartej części poczwórnego okresu* (*wyniki z* **Części pomiarowej II**)?

***Zadanie* 9 (*do domu – dla treningu*)**

Czy lepiej mieć jeden pomiar, np. długości, z niepewnością 0,2 mm*, czy* 24 *pomiary, każdy z niepewnością* 1 mm?

***Zadanie* 10 (*do domu – dla treningu*)**

Na 150 *przypadkowo zerwanych liściach jabłoni znaleziono liczby czerwonych mrówek ukazane w Tabeli* 1 (*K.B. Kulasekeva i D.W. Tonkyn, Communications in Statistics* (*Simulation and Computation*), **21** (1992) 499-518). *Podaj poprawnie zaokrągloną średnią liczbę mrówek na jednym liściu i niepewność tej oceny.*

Tabela 1. *Rozkład liczby mrówek na liściu jabłoni*

liczba k mrówek	0	1	2	3	4	5	6	7	*suma*
liczba n_k liści z liczbą k mrówek	70	38	17	10	9	3	2	1	150

***Zadanie* 11 (*do domu – dla treningu*)**

Przypuśćmy, że zamiast indywidualnych wartości czasu trwania pojedynczego okresu, dysponujemy jedynie histogramem liczebności, czyli wiemy, że w przedziale rozciągającym się od wartości $x_{\{k\}}$ do wartości $x_{\{k+1\}}$ znajduje się n_k wyników pomiarów. W jaki sposób dla danych przedstawionych w takiej formie ocenić (możliwie najdokładniej) średni okres drgań, niepewność pojedynczego pomiaru i niepewność średniej?

***Zadanie* 12 (*do domu – dla treningu*)**

Pewna osoba miała w domu tyle książek, że nie mieściły się one na półkach i znakomita większość z nich była spakowana w pudełkach. Po przeprowadzeniu się do większego mieszkania, osoba ta postanowiła zamówić półki na wszystkie swoje książki. Aby oszacować niezbędną długość półek, wybrała ona przypadkowo 100 *książek ze swojego zbioru, zmierzyła ich grubości i wykonała ich histogram. Okazało się, że średnia $\overline{x}$ grubość książek wynosi* 15 mm*, a szerokość histogramu mierzona standardową niepewnością s wynosi* 8 mm. *Ile wynosi najlepsza ocena łącznej długości półek i ile wynosi niepewność tej oceny, jeśli osoba ta miała* 2000 *książek?*

***Zadanie* 13 (*do domu – dla treningu*)**

Trójka uczniów: Jaś, Staś i Grześ wykonują w szkole eksperyment polegający na wyznaczeniu okresu drgań wahadła. Wszyscy używają tego samego wahadła i tego samego stopera. Jaś wykonał 100 *pomiarów jednego okresu, Staś zmierzył n_S* = 10 *razy czas trwania k_S* = 10 *okresów, Grześ zaś zmierzył n_G* = 4 *razy czas trwania k_G* = 25 *okresów. Jaś podał ocenę pojedynczego okresu drgań w postaci średniej arytmetycznej wraz z jej niepewnością s_J. Jakich niepewności s_S i s_G ocen jednego okresu drgań wahadła spodziewasz się u Stasia i Grzesia?*

***Zadanie* 14 (*do domu – dla treningu*)**

Wykaż, że wzór definiujący kwadrat niepewności standardowej można przedstawić w następującej, alternatywnej formie:

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\overline{x}^2\right).$$

UWAGA*: W praktycznych obliczeniach, a więc ze skończoną precyzją, korzystanie z powyższej tożsamości może prowadzić do błędnych, a nawet nonsensownych wyników z powodu błędów zaokrągleń. Dlatego wskazane jest stosowanie wzoru definiującego lub też wykorzystanie procedur opisanych w dwu następnych zadaniach.*

***Zadanie* 15 (*do domu – dla treningu*)**

Dana jest seria x_i, i = 1,2,..., *N, wyników pomiarów. Wyraźmy wszystkie wartości x_i jako odchylenia od pewnej, wybranej w sposób arbitralny, wartości x_0: $x_i = x_0 + \varepsilon_i$. Pokaż, że*

$$\overline{x} = x_0 + \overline{\varepsilon}, \quad s_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\varepsilon_i - \overline{\varepsilon}\right)^2, \quad \text{gdzie } \overline{\varepsilon} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i .$$

Taki sposób obliczania pozwala, niekiedy, sprawniej wyznaczyć wielkości $\overline{x}$ i s_x, np., jeśli tak dobierzemy x_0, że średnia wartość odchyleń ε_i będzie równa zeru. Wskazuje również na fakt, że niepewność standardowa nie jest czuła na położenie rozkładu – możemy go przesunąć, jako całość na osi, a miara rozrzutu nie ulegnie zmianie, czego, bez wątpienia, oczekujemy od takiej wielkości.

***Zadanie* 16 (*do domu – dla treningu*)**

Niech próbka licząca N wartości wyników pomiarów ma wartość średnią $\overline{x}_N$ *i niepewność standardową* s_N *pojedynczego pomiaru, gdzie indeks N ma nam przypominać, że wielkości te wyznaczone są z próbki o liczebności N. Przypuśćmy, że wykonujemy jeden dodatkowy pomiar, w wyniku którego otrzymujemy wartość* x_{N+1}. *Pokaż, że nową wartość średniej arytmetycznej* $\overline{x}_{N+1}$ *i nową wartość* s_{N+1}^2 *kwadratu niepewności standardowej można wyznaczyć z dodatkowego wyniku pomiaru i starych wartości średniej i niepewności za pomocą związków:*

$$\overline{x}_{N+1} = \frac{N\overline{x}_N + x_{N+1}}{N+1}, \quad s_{N+1}^2 = \frac{N-1}{N}s_N^2 + \frac{1}{N+1}\left(\overline{x}_N - x_{N+1}\right)^2.$$

Ten sposób wyznaczania wartości średniej i niepewności standardowej zapewnia lepszą stabilność numeryczną niż związek podany w ***Zadaniu*** **15**.

***Zadanie* 17 (*do domu – dla treningu*)**

Dane jest m próbek, przy czym o i-tej próbce wiemy jedynie to, że liczy ona n_i *danych, charakteryzuje się wartością średnią* $\overline{x}_i$ *i niepewnością standardową* s_i *pojedynczego pomiaru. Pokaż, że próbka złożona ze wszystkich danych opisuje się średnią arytmetyczną* $\overline{x}$ *i niepewnością standardową* s_x *pojedynczego pomiaru określonymi następującymi związkami:*

$$N = \sum_{i=1}^{m} n_i, \quad \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i\overline{x}_i, \quad s_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{m}\left(n_i - 1\right)s_i^2 + \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{m} n_i\left(\overline{x} - \overline{x}_i\right)^2.$$

***Zadanie* 18 (*do domu – dla treningu*)**

Przypuśćmy, że pomiar okresu drgań wahadła wykonywany był przez M osób i każda z nich zmierzyła N okresów, a Twoim zadaniem jest narysowanie wykresu zależności $R_{(n)}$ *od liczebności n podpróbek* (*jak w* **Zadaniu 4**), *ale dla* **wszystkich** *danych. Możesz, oczywiście, „zsypać” wszystkie dane razem i powtórzyć obliczenia z* **Zadania 4**. *Możesz jednak pójść inną drogą. Przypuśćmy, że każda z osób obliczyła, przy tym samym grupowaniu danych, wielkość* $R_{(n)}$ *i wielkość tę dla osoby o numerze* α *oznaczymy symbolem* $R_{(n)\alpha}$, $\alpha = 1, 2, ..., M$. *Pokaż, że wartość* $\overline{R}_{(n)}$ *dla całości danych, tj. odpowiednik wartości* $R_{(n)}$ *w pomiarach jednej osoby, jest zadana średnią wartością:*

$$\overline{R}_{(n)} = \frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{M} R_{(n)\alpha}.$$

***Zadanie* 19 (*do domu – dla treningu*)**

Przypuśćmy, że pomiar okresu drgań wahadła wykonywany był przez M osób i każda z nich zmierzyła N okresów, a Twoim zadaniem jest narysowanie wykresu zależności $s_{(n)}^2$ *od liczebności n podpróbek* (*jak w* **Zadaniu 4**), *ale dla* ***wszystkich danych***. *Możesz, oczywiście, „zsypać” wszystkie dane razem i powtórzyć obliczenia z* **Zadania 4**. *Możesz jednak pójść inną drogą. Przypuśćmy, że każda z M osób obliczyła wielkość* $s_{(n)}^2$, *którą tu nazwiemy* $s_{(n)\alpha}^2$, $\alpha = 1, 2, ..., M$, *z tym samym grupowaniem po n danych. Pokaż, że wartość* $s_{(n)}^2$ *dla całości danych można wyznaczyć ze związku:*

$$s_{(n)}^2 = \frac{k_n - 1}{Mk_n - 1}\sum_{\alpha=1}^{M} s_{(n)\alpha}^2 + \frac{k_n}{Mk_n - 1}\sum_{\alpha=1}^{M}\left(\overline{x} - \overline{x}_\alpha\right)^2, \quad \overline{x} = \frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{M}\overline{x}_\alpha,$$

gdzie $\overline{x}_\alpha$ *jest średnim okresem wyznaczonym z danych jednej osoby,* k_n *zaś jest liczbą podpróbek przy zadanym grupowaniu* (k_n = 216, 108, 72, 54, 36, 27, 24, 18, 12 *oraz* 9).

RAPORT KOŃCOWY

Wyniki pomiarów, w postaci pliku tekstowego, pliku do programu Excel pakietu MS Office lub pliku do programu Calc pakietu Libre/Open Office proszę przesłać e-mailem prowadzącemu zajęcia ***niezwłocznie*** *po złożeniu raportu. Raport będzie czekał na sprawdzenie, aż to uczynisz.*

Przygotuj raport końcowy zgodnie z ogólnymi zasadami podanymi w DODATKU B do niniejszej Instrukcji. W szczególności, raport powinien zawierać:

1) w kilkuzdaniowym streszczeniu: bardzo zwartą prezentację zagadnienia będącego przedmiotem

doświadczenia i najważniejszego, w mniemaniu autora raportu, wyniku doświadczenia;

2) we wstępie: sformułowanie zadania;
3) w części odnoszącej się do pracy eksperymentalnej: informacje o używanych przyrządach i ich dokładnościach, opis metod pomiaru i ich przebiegu oraz surowe wyniki pomiarów – zapisane wraz z nieistotnymi zerami ukazującymi dokładność; pamiętaj – raport, to nie dziennik laboranta, w którym prezentowana jest czasowa sekwencja podejmowanych działań – w raporcie prezentowane kroki pomiarowe powinny mieć uzasadnienie merytoryczne wynikające z postawionego problemu;
4) w części odnoszącej się do analizy danych:
   a) oddzielne histogramy, częstości lub gęstości, okresów drgań:
      - 216 pojedynczych okresów;
      - 54 średnie okresy wyznaczone z sumy czterech okresów z 216 pomiarów;
      - 54 średnie okresy wyznaczone z 54 pomiarów poczwórnych okresów;
      - jakościowe porównanie ich kształtu;
   b) histogram 216 pojedynczych okresów z przedziałem 0,01 s wraz z omówieniem jego treści;
   c) definicja wielkości $R_{(n)}$ i jej analiza wraz z:
      - precyzyjną definicją wszystkich symboli wchodzących do definicji tej wielkości;
      - uzasadnieniem potrzeby wykonywania analizy zależności $R_{(n)}$ od liczebności n;
      - wykresem zależności $R_{(n)}$ od liczebności n;
      - naniesioną na wykresie prostą najlepszego wizualnego dopasowania;
      - oceną współczynnika nachylenia a prostej $R_{(n)} = a(n-1)$ uzyskanego z wykresu;
      - współrzędnymi punktów, z których tę ocenę uzyskano;
      - konkluzją wynikającą z analizy wielkości $R_{(n)}$;
   d) definicja wielkości $s^2_{(n)}$ i jej analiza wraz z:
      - precyzyjną definicją wszystkich symboli wchodzących do definicji tej wielkości;
      - uzasadnieniem potrzeby wykonywania analizy zależności $s^2_{(n)}$ od liczebności n;
      - wykresem zależności wielkości $s^2_{(n)}$ od n;
      - wykresem zależności $\log(s^2_{(n)}/1\,\mathrm{s}^2)$ od $\log(n)$;
      - prostą najlepszego wizualnego dopasowana do danych naniesiona na wykres zależności $\log(s^2_{(n)}/1\,\mathrm{s}^2)$ od $\log(n)$;
      - ocenami parametrów prostej $\ln(s^2_{(n)}/1\,\mathrm{s}^2) = \alpha\ln(n) + \beta$ uzyskanymi z wykresu;
      - współrzędnymi, które posłużyły do wyznaczenia tych ocen;
      - wykresem zależności wielkości $s^2_{(n)}$ od $1/n$;
      - prostą najlepszego wizualnego dopasowana do danych naniesiona na wykres zależności $s^2_{(n)}$ od $1/n$;
      - oceną parametru c prostej $s^2_{(n)} = c/n$ uzyskanej z wykresu;
      - współrzędnymi, które posłużyły do wyznaczenia oceny tego parametru;
      - konkluzją wynikającą z analizy wielkości $s^2_{(n)}$;
   e) porównanie liczbowych wartości kwadratu niepewności pojedynczego pomiaru uzyskanych z dopasowania zależności $R_{(n)} = a(n-1)$, z dopasowania zależności $\ln(s^2_{(n)}/1\,\mathrm{s}^2) = \alpha\ln(n) + \beta$ i z dopasowania zależności $s^2_{(n)} = c/n$.
   f) charakterystyki numeryczne rozkładów, czyli:
      - wartość średnią okresu, jej niepewność i niepewność pojedynczego pomiaru okresu wyznaczone z 216 pomiarów pojedynczego okresu;
      - wartość średnią okresu, je niepewność i niepewność pojedynczego pomiaru okresu wyznaczone z czwartej części sumy czterech pojedynczych okresów z pomiaru 216 okresów;
      - wartość średnią okresu, je niepewność i niepewność pojedynczego pomiaru okresu wyznaczone z czwartej części 54 pomiarów poczwórnego okresu (**Część pomiarowa II**);
   g) najlepszą, w opinii autora raportu, ocenę okresu drgań wahadła i niepewność tej oceny;
5) w dyskusji i wnioskach końcowych: omówienie dokładności wyników dla różnych metod pomiaru okresu, porównanie relacji między wartościami średnimi i niepewnościami

wyznaczonymi na drodze różnych pomiarów z oczekiwaniami; tu można także przedstawić własne refleksje na temat problemu;
6) w spisie literatury: poprawnie zredagowane, wykorzystane w raporcie źródła, o ile w raporcie była potrzeba odwoływania się do źródeł zewnętrznych.

Każdy z raportów końcowych może być napisać ręcznie, byle porządnie i czytelnie. Jeśli jednak zdecydujesz się na wykorzystanie procesora tekstów, to przestrzegaj reguł typograficznych obowiązujących w publikacjach naukowych. Ogólne zasady sporządzania raportów i streszczenie podstawowych reguł umieszczone są w DODATKU B, jak również znajdują się na stronie WWW Pracowni, gdzie znajdziesz także przykład raportu.

Raport, wraz z ostemplowanym arkuszem otrzymanym przy przystępowaniu do części pomiarowej, należy oddać w sekretariacie Pracowni przed rozpoczęciem części pomiarowej następnego ćwiczenia, a po zakończeniu części rachunkowej niniejszego ćwiczenia. W raporcie możesz wykorzystać jedynie własne dane.

Przygotowując się do ćwiczeń rachunkowych, wykonałaś/wykonałeś stosowne rysunki. Jeśli rysunki te zostały zaakceptowane przez prowadzącego zajęcia, jako spełniające wszystkie wymogi merytoryczne i formalne, możesz je, bez zmian, dołączyć do raportu. Uwaga ta dotyczy wszystkich rysunków, których ręczne wykonanie jest zalecane na tej Pracowni. Pamiętaj, że rysunki, a także tabele, muszą mieć numer i podpis oraz być opisane w tekście raportu.

Każdy raport powinien zawierać wszystkie surowe wyniki pomiarów, aby można było, bez odwoływani się do zapisków sporządzonych w trakcie wykonywani doświadczenia, powtórzyć wszystkie obliczenia i sprawdzić ich poprawność.

Raport nie może uzyskać zaliczenia, jeśli choć jedna z wartości liczbowych jest błędna z powodu błędów rachunkowych bądź wyboru błędnej metody analizy!

DODATEK A – KONSTRUKCJA HISTOGRAMU

Przy konstruowaniu histogramu przydatne jest wyznaczenie wartości najmniejszej $x_{\min}$ i największej, $x_{\max}$, w próbce. Wartości te pozwalają ocenić rozpiętość histogramu. Niech symbol N oznacza liczebność próbki. Sam histogram budujemy w następujący sposób.

- Ustalamy dolną krawędź $x_{\{1\}} \leq x_{\min}$ histogramu oraz szerokość Δ_i przedziałów, czyli cały zakres wartości wielkości histogramowanej dzielimy na przedziały: od $x_{\{1\}}$ do $x_{\{2\}} = x_{\{1\}} + \Delta_1$, od $x_{\{2\}}$ do $x_{\{3\}} = x_{\{2\}} + \Delta_2$, od $x_{\{3\}}$ do $x_{\{4\}} = x_{\{3\}} + \Delta_3$ itd., aż do ostatniego, K-tego przedziału od wartości $x_{\{K\}} = x_{\{K-1\}} + \Delta_{K-1}$ do wartości $x_{\{K+1\}} = x_{\{K\}} + \Delta_K$, $x_{\{K+1\}} \geq x_{\max}$. Jeśli zamierzamy zaprezentować doświadczalną gęstość prawdopodobieństwa (patrz niżej), możemy zastosować różne szerokości przedziałów. Gdy jednak chcemy przedstawić częstości, szerokości przedziałów muszą być identyczne. Wybór dolnej krawędzi pierwszego przedziału, jak i szerokości każdego z przedziałów, przy równej szerokości każdego z nich, nie jest kluczowy, ale za dolną krawędź pierwszego przedziału zawsze wybieramy jakąś „ładną” liczbę, zadaną jednostką wielkości histogramowanej, jej wielokrotnościami, np. dwu-, pięcio- lub dziesięciokrotną wartością, albo też połową, czwartą, piątą lub jej dziesiątą częścią i takie też wybieramy szerokości przedziałów, unikamy zaś wartości zadanych trzykrotną, sześciokrotną, siedmiokrotną i podobnymi wielokrotnościami lub też trzecią, szóstą, siódmą częścią lub podobnymi ułamkami. W niniejszym ćwiczeniu wyjątkowo szerokość przedziału wynosi 0,03 s.
- Następnie ustalamy, do którego przedziału należy każda z kolejnych wartości z próbki, otrzymując liczby n_i danych w każdym z przedziałów, zwane **liczebnościami** bądź **krotnościami**. Przyporządkowując kolejne wartości przedziałom, możemy natknąć się na sytuację, w której wartość wypada na granicy przedziałów, a więc może zostać zaklasyfikowana zarówno do tego, w którym rozważana wartość stanowi górną granicę lub też do następnego przedziału obejmującego większe wartości zmiennej. Niestety, nie obowiązuje jednolita konwencja – różne programy analizy statystycznej stosują różne umowy (np. MS Excel włącza lewy skraj, natomiast Calc z Libre Office włącza prawy).

- W następnym kroku dla każdego przedziału histogramu konstruujemy **doświadczalne częstość** $p_i := n_i/N$ oraz wielkość f_i, którą zwiemy **doświadczalną gęstością prawdopodobieństwa mierzonej wielkości** (w tym przypadku: *doświadczalną gęstością prawdopodobieństwa mierzonego okresu drgań wahadła*), a którą definiujemy jako $f_i := p_i/\Delta_i$, czyli stosunek częstości p_i do szerokości Δ_i przedziału histogramowania. W rezultacie otrzymujemy Tabelę 2.

Tabela 2. Konstrukcja częstości i gęstości doświadczalnej

przedział	$(x_{\{1\}}, x_{\{2\}}]$	$(x_{\{2\}}, x_{\{3\}}]$	...	$(x_{\{K\}}, x_{\{K+1\}}]$	suma
krotność	n_1	n_2	...	n_K	N
częstość p_i	$\frac{n_1}{N}$	$\frac{n_2}{N}$	...	$\frac{n_K}{N}$	$\sum_{i=1}^{K} p_i = 1$
gęstość f_i [s^{-1}]	$\frac{n_1}{N\Delta_1}$	$\frac{n_2}{N\Delta_2}$	...	$\frac{n_K}{N\Delta_K}$	$\sum_{i=1}^{K} f_i\Delta_i = 1$

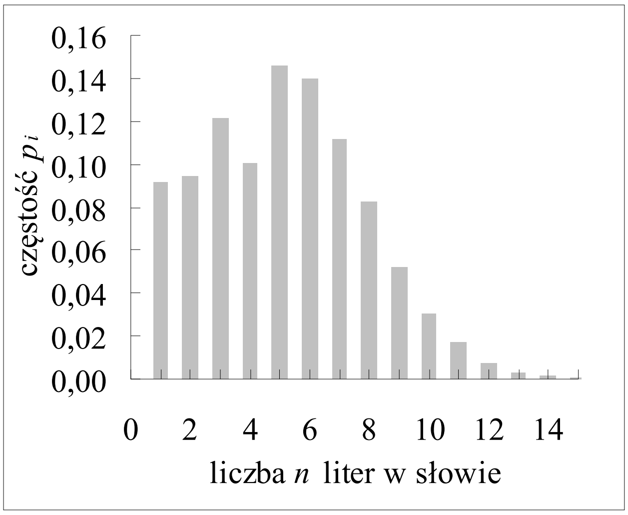
Zauważ, że gęstości f_i mają wymiar – w tym przypadku jest to odwrotność jednostki czasu, w której wyrażamy wyniki pomiaru okresu. Spełniają one także oczywisty związek

$$\sum_{i=1}^{K} f_i\Delta_i = 1,$$

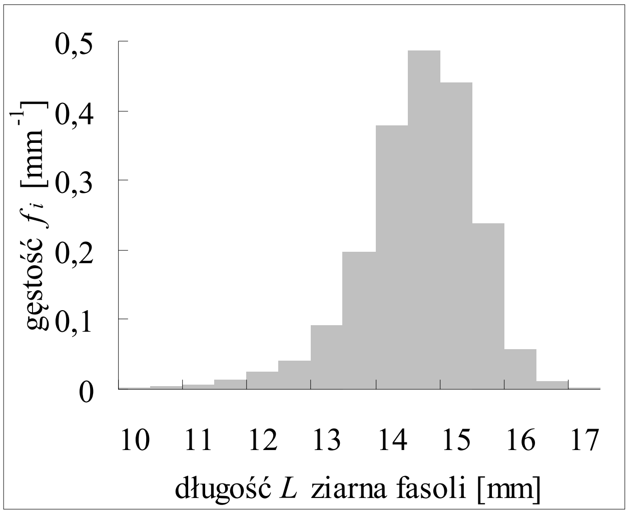
czyli pola powierzchni słupków histogramu sumują się do jedność – co jest definicją frazy: **histogram jest unormowany do jedności**. Najczęściej szerokości Δ_i przedziałów histogramowania wybieramy takie same dla każdego z przedziałów, co uprasza nieco obliczenia. Są jednak sytuacje (przykład poznamy w jednym z następnych ćwiczeń), kiedy to zmuszeni jesteśmy wybrać je różnymi (a w skrajnym przypadku sięgającymi nieskończoności). Histogram rysujemy, kreśląc słupki, o wysokości proporcjonalnej do wartości gęstości, na kolejnych przedziałach zaznaczonych na osi odciętych, czyli wielkości histogramowanej.

Zwróć uwagę na niektóre elementy graficzne takiego rysunku. Osie należy opisać zarówno słownie, jak i symbolem, jak również podać, w nawiasach kwadratowych lub okrągłych, jednostkę wielkości występującej na osiach. Normy wymagają, aby znaczniki na osiach (kreseczki przy kolejnych wartościach) zwrócone były ku dodatnim kierunkom osi, co powoduje, że w przypadku, gdy kreślone wielkości wypadają w pierwszej ćwiartce, znaczniki te „wchodzą” do rysunku, prezentując zaś wykres, który mieści się w trzeciej ćwiartce, znaczniki będą wskazywać na zewnątrz treści rysunku. W odniesieniu do wszystkich elementów graficznych prezentowanych w opracowaniach naukowych obowiązuje jeszcze jedna zasada: powinny być one „ascetyczne” w swym obliczu – wszelkie gradienty, tła, linie siatek, trzeci wymiar i tym podobne „dodatki” powinny się pojawiać jedynie wtedy, gdy wynikają z istoty prezentowanej wielkości lub też intencją autora jest zwrócenie uwagi czytelnika na dany aspekt.

Z histogramami związana jest konwencja, której należy bezwzględnie przestrzegać. Otóż, istnieją dwa typy wielkości, które histogramujemy. Rozważmy takie wielkości jak czas, masa, długość, temperatura, ciśnienie,... i skonfrontujmy je z takimi wielkościami, jak liczba rozpadających się jąder atomowych, liczba liter w słowie, liczba oczek na kostce do gier planszowych, liczba galaktyk w kącie bryłowym,... . Te pierwsze maja tę własność, że *a priori* mogą przyjmować dowolną wartość, także wyrażoną liczbą niewymierną (nie możemy wykluczyć, że kulka ma masę np. e^{π} g), podczas gdy te drugie opisują się liczbą całkowitą. Te pierwsze nazywamy wielkościami **ciągłymi**, o tych drugich zaś mówimy, że przedstawiają sobą wielkości **dyskretne**. To rozróżnienie znajduje swe odbicie na histogramie – słupki histogramu wielkości ciągłej *zawsze* rysujemy połączone ze sobą (nawet, jeśli histogram przedstawia częstości, a nawet krotności), a słupki histogramu wielkości dyskretnej rozdzielone. Ilustrują to dwa rysunki. Rys. 1 przedstawia częstość wielkości dyskretnej – liczby i liter w słowach poematu *Pan Tadeusz* (tekst poematu: Polska Biblioteka Internetowa, http://www.pbi.edu.pl/), Rys. 2 ukazuje zaś gęstość wielkości ciągłej – długości L liczby 9439 ziaren fasoli (S.J. Pretorius, *Biometrika*, **22**, (1930), 110; dane za: M.G. Kendall i A. Stuart, The Advanced Theory of Statistics, *Charles Gryffin & Co. Ltd.*,



Rys. 1. Rozkład długości n słowa w poemacie *Pan Tadeusz*



Rys. 2. Rozkład długości L ziarna fasoli

London, 1958) – zwróć uwagę, że słowo *gęstość* oznacza tu ułamek liczby ziaren fasoli trafiających do wybranego przedziału, odniesiony do długości tego przedziału, a nie gęstość masy ziarna fasoli.

O histogramach mówimy luźno, że przedstawiają **rozkład** wielkości histogramowanej, np. *rozkład zmierzonego okresu drgań*. Termin ten również stosujemy, gdy ilustrujemy częstości, a nawet wtedy, gdy na histogramie ukazujemy jedynie liczby – krotności n_i – danych w klasach.

Przedstawimy teraz praktyczny sposób przygotowania danych do histogramu. Najpierw przeglądamy wartości, które mamy histogramować i odszukujemy wśród nich najmniejszą i największą wartość – wyznaczą one zakres histogramu. Przypuśćmy, że wartość najmniejsza wynosi 3,11 s, największa zaś to 3,65 s. Prostokąt na Rysunku 3 symbolizuje kartkę papieru. Z lewej strony kartki wypisujemy krawędzie przedziałów histogramowania, a następnie przeglądamy, po kolei, wszystkie dane i każdą z liczb klasyfikujemy do właściwego jej przedziału, rysując kreskę na wysokości tego przedziału. Pamiętajmy, że jeśli wartość pokrywa się z granicą przedziału, to zgodnie z przyjętą konwencją kreskę rysujemy przy tym przedziale, w którym histogramowana wartość stanowi górną granicę przedziału. Na koniec podliczamy liczbę kresek w każdym z przedziałów.

3,10 - 3,13 | 1
3,13 - 3,16 0
3,16 - 3,19 ||| 3
3,19 - 3,22 ~~||||~~ || 6
3,22 - 3,25 ~~||||~~ ~~||||~~ || 12
... ...
... ...
3,40 - 3,43 ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ || 22
... ...
... ...
3,58 - 3,61 |||| 4
3,61 - 3,64 0
3,64 - 3,67 | 1

Rys. 3. Budowanie histogramu

DODATEK B – JAK PISAĆ RAPORT KOŃCOWY

1. Uwagi ogólne

Raport końcowy nie może być tylko ciągiem wzorów i liczb. Zapewne najrozsądniejszą receptą na otrzymanie poprawnego raportu jest wyobrażenie sobie, że chcemy precyzyjnie opisać osobie, która nie zna zagadnienia (ale ma ten sam zasób wiedzy co autor raportu), badany problem i sposób, w jaki został on rozwiązany. Dlatego raport powinien zawierać:

a) streszczenie – nazwa tej części raportu jest dość zwodnicza – nie służy ona przedstawieniu wszystkich kolejnych kroków, jakie przedsięwzięto w doświadczeniu, lecz lakonicznej prezentacji przedmiotu badań, głównego wyniku lub wyników doświadczenia i wniosku końcowego; w żadnym wypadku streszczenie to nie miejsce, gdzie prezentujemy cel doświadczenia, nie opisujemy procedury pomiarowej i nie przedstawiamy wyników pośrednich, nie powinno też zawierać tabel i wykresów i powinniśmy unikać wzorów;

b) prezentację przedmiotu badań z ewentualnym uwzględnieniem podstaw teoretycznych – raport to nie miejsce, w którym omawiane są sposoby i metody matematyczne i metody analizy danych – te, wraz z omówieniem, winny się znaleźć w stosownych podrozdziałach; przytaczane tu wzory, jak i wszystkie inne wzory w raporcie, powinny pojawiać się w logicznych miejscach i być uzupełnione precyzyjnymi wyjaśnieniami i definicjami wszystkich używanych symboli – najlepiej tuż przed lub tuż po pierwszym pojawieniu się w tekście, a nie w oddzielnym podrozdziale na początku bądź na końcu raportu;

c) sformułowanie celu wykonywanego eksperymentu wraz z opisem metody pomiaru, używanych przyrządów i przebiegu pomiarów z precyzyjnym opisem wszystkich kolejnych kroków i ich uzasadnieniem tak, aby każdy, kto zechciałby powtórzyć pomiary, bardzo dokładnie wiedział, co i w jakim momencie wykonano; tu jest też miejsce, gdzie możesz przedstawić trudności techniczne, możliwe pułapki procedury pomiarowej i źródła błędów;

d) surowe wyniki pomiarów w odpowiednio zaprojektowanych i czytelnych tabelach – zawsze poświęć chwilę uwagi temu, co powinno znaleźć się w tabeli w kolumnach, a co w wierszach; jeśli wyników jest niewiele, wkomponuj tabele w treść raportu; gdy zajmują znaczniejszą objętość, najbardziej rozsądnym będzie relegowanie ich do dodatku – w każdym wypadku nie zapomnij ściśle wyjaśnić ich zawartość; pamiętaj – raport to nie dziennik laboranta, w którym prezentowana jest czasowa sekwencja podejmowanych działań – w raporcie prezentowane kroki pomiarowe powinny mieć uzasadnienie merytoryczne wynikające z postawionego problemu;

e) prezentację metod analizy danych i wykorzystywane wzory analizy statystycznej; analiza ta winna być poparta odpowiednimi rysunkami lub tabelami, dobranymi stosownie, wg mniemania autora raportu i wyjaśnione, wraz odwołaniem do ich numeru, włącznie z uzasadnieniem ich wyboru i sformowaniem wynikających z nich konkluzji; zarówno wzory jak i rysunki i tabele powinny pojawiać się w logicznych miejscach, a kolejne kroki analizy być merytorycznie uzasadnione;

f) dyskusję wyników końcowych i wnioski końcowe; to jest miejsce, gdzie przedstawisz dlaczego rezultat Twej pracy wyszedł taki, jaki wyszedł; udziel odpowiedzi na wszystkie problem, jakie zostały postawione przy formułowaniu celu doświadczenia; niekiedy właściwy wynik doświadczenia, będący wartością samą w sobie, może dostarczyć materiału do dalszych rozważań – wyciągnij maksimum informacji z uzyskanych wartości; teoria, jaka stoi za eksperymentem, z reguły prezentuje przewidywania dotyczące wyniku doświadczenia – zweryfikuj te przewidywania – jeśli nie ma zgodności, to odwołując się do procedury, sposobu pomiaru, modelu fizycznego,… podejmij próbę wyjaśnienia rozbieżności, ale nie mnóż przyczyn w nieskończoność – podaj tylko te, których wpływ na wynik końcowy potrafisz ocenić ilościowo i jednocześnie określić, czy dyskutowany czynnik prowadzi do zawyżenia czy też zaniżenia wyniku; w końcu możesz tu także pozwolić sobie na marzenia: bardzo pokrótce możesz opisać sposób ulepszenia pomiarów, przyrządów, metod,… wykorzystanych w doświadczeniu;

g) spis literatury – w przypadku cytowania rezultatów cudzej pracy **konieczne** jest dokładne zidentyfikowanie źródła, tj. podanie: tytułu, autora, wydawcy, miejsca i daty publikacji, a w przypadku książki także numeru strony. Spis literatury to nie rodzaj spisu lektur uzupełniających, czyli spis pozycji, które w mniemaniu autora raportu wiążą się z tematem raportu. Spis winien zawierać jedynie te pozycje, oznaczone unikalnym identyfikatorem (np. numerem), do których odwołujemy się w tekście raportu przez wypisanie tego identyfikatora w miejscu, w którym czerpiemy informację ze źródła zewnętrznego. Odwołania te muszą dotyczyć jedynie wiarygodnych, czyli *recenzowanych* źródeł, do których należy: Wydawnictwo Naukowe PWN (wcześniej: Państwowe Wydawnictwo Naukowe), Wydawnictwo WNT (wcześniej: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne), Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne (wcześniej: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych) – zwłaszcza ich rozmaite tablice astronomiczne, fizyczne i chemiczne, jak również inne wydawnictwa szkolne, o ile mają akceptację Ministerstwa Edukacji Narodowej, a ponadto uznane, zagraniczne wydawnictwa naukowe, takie jak: Springer, Oxford, Cambridge, Wiley, Elsevier, North Holland itp. **Wikipedia nie jest wiarygodnym źródłem**! Podobnie niewiarygodne są rozmaite strony prywatne, a także strony związane z rozmaitymi uczelniami – także UW – włącznie ze stroną, na której znajduje się niniejsza instrukcja. **Nigdy nie odwołuj do Instrukcji do ćwiczenia, także z tego powodu, że będzie to sugerowało brak samodzielności, co jest kompromitujące**. Pamiętaj – raport jest namiastką publikacji naukowej, która winna być wewnętrznie spójna – jedyne odwołania do świata zewnętrznego, to odwołania do źródeł podanych w spisie literatury.

Zadbaj o to, by różne części raportu: streszczenie, prezentacja przedmiotu badań,... były opatrzone stosownymi, wytłuszczonymi nagłówkami – zwiększa to przejrzystość tekstu; jeśli któraś z tych części staje się nazbyt długa, to rozdziel ją na mniejsze, logiczne fragmenty.

Raport nie powinien zawierać szczegółów obliczeń numerycznych wynikających z zastosowanych wzorów – załóż, że osoba, do której skierowany jest raport, potrafi, jak Ty, dodawać, mnożyć,... i nie musisz, ukazując kolejne operacje numeryczne, prowadzić jej „za rękę".

Tak redaguj raport, aby dublowanie wyników liczbowych pojawiło się tylko, co najwyżej, w streszczeniu i we wnioskach końcowych. W przypadku, gdy jakąś z wartości zmienisz, zaoszczędzi Ci to przeszukiwania całego raportu w celu naniesienia poprawek we wszystkich miejscach.

Raport musi być napisany poprawnymi gramatycznie, pełnymi zdaniami języka polskiego – **równoważniki zdań są wykluczone**!

Pamiętaj, że do raportu można zawsze coś dodać, ale to nie oznacza, że raport jest dobry, gdy już nic do niego nie można dodać. Nie – raport jest dobry, gdy już nic od niego nie można odjąć, gdyż grozi to przerwaniem logiki wywodu, brakiem kluczowych informacji lub danych.

Przy obliczeniach prowadzących do wyniku końcowego i podawaniu wyniku liczbowego wieńczącego Twą pracę, przestrzegaj następujących reguł:

- niepewność końcowego wyniku pomiaru zaokrąglamy do dwóch cyfr znaczących, tzn. gdy niepewność wynosi 123,456… to podajemy 120, a gdy 12,3456… to zaokrąglamy do 12, a jeśli niepewność jest równa 1,23456… to zapisujemy ją jako 1,2, i dalej, niepewność 0,123456… zapisujemy w postaci 0,12, niepewność 0,0123456… podajemy w formie 0,012, niepewność 0,00123456… zaokrąglamy do 0,0012 itd.
- wynik końcowy zaś zaokrąglamy tak, aby ostatnia cyfra znacząca wypadała na tym samym miejscu co ostatnia cyfra znacząca niepewności, przy czym, wartość i jej niepewność muszą być wyrażone w tych samych jednostkach, a samych jednostek nie umieszczamy w nawiasach kwadratowych ani tez w żadnych innych.
- jeśli prowadzimy łańcuch obliczeń, to kolejne obliczenia należy prowadzić z możliwe największą dokładnością, bez zaokrągleń po każdym kroku, a zaokrąglenie wykonujemy tylko raz, na końcu obliczeń.

Przy okazji przypominamy zasady zaokrąglania liczb (Polska Norma PN – 70/N – 02120):

- jeśli pierwsza odrzucana cyfra jest mniejsza niż 5, to zachowujemy ostatnią cyfrę;
- jeśli pierwsza odrzucana cyfra jest większa niż 5 lub jest równa 5 i następują po niej dalsze cyfry (różne od zera), to ostatnią zachowaną cyfrę zwiększamy o 1;
- jeśli pierwsza odrzucana cyfra wynosi 5 i po niej następują same zera, to ostatnią zachowaną cyfrę zwiększamy o 1, jeśli jest nieparzysta (zaokrąglamy do parzystej).

Jeśli decydujesz się na wykorzystanie procesora teksów to, przed przystąpieniem do pisania raportu, przypatrz się z uwagą tekstowi, który znajdziesz w dowolnym akademickim podręczniku fizyki (wydanym przez uznane wydawnictwo) lub czasopiśmie naukowym (np. w *Physical Review*) i zwrócić uwagę na sposób zapisu zmiennych matematycznych, wzorów, opisów tabel i rysunków oraz zapisu wartości mianowanych wielkości fizycznych. Profesjonalne słowo drukowane wymaga znajomości sztuki zecerskiej, której najważniejsze zasady podsumowane są poniżej. Jeśli zechcesz zignorować te reguły, to Twój raport, nawet merytorycznie poprawny, wzbudzi uśmiech politowania i krótką, a usprawiedliwioną recenzję: „knot”.

2. Matematyka w słowie pisanym

a) Jeśli piszemy esej literacki, to możemy stosować dowolny krój czcionki, nawet ozdobny, ale pisząc tekst, w którym pojawiają się wzory i symbole matematyczne, skazani jesteśmy, zarówno w odniesieniu do tekstu, tabel, rysunków, jak i do wzorów, na czcionkę szeryfową (typu Roman), czyli taką, jaka jest użyta w niniejszym tekście. Dlatego równanie, np. $z = x + y$, nie może wyglądać np. tak: $\mathsf{z = x + y}$, ani też tak: $\mathsf{\mathit{z = x + y}}$.

b) Rozmiar i krój czcionki wzoru musi być taki sam jak rozmiar i krój czcionki tekstu raportu.

c) Cyfry piszemy, zawsze, czcionką prostą: 1, 2, 3, a zmienne skalarne, zawsze, kursywą: a, b, c.

d) Podobnie postępujemy z indeksami: liczbowe piszemy czcionka prostą, np.: P_2, a symboliczne – kursywą, np.: P_k.

e) Preferowana czcionka przy zapisie symbolu wektora to pogrubiona kursywa, np. wektor prędkości zapiszemy jako $\boldsymbol{v}$.

f) Liczba „pi” (stosunek długości obwodu do średnicy) wygląda tak: π, a nie tak: Π. Małe litery greckie piszemy czcionką pochyłą: $\alpha\beta\chi\delta\varepsilon$..., a nie: αβχδε..., duże zaś prostą: ΔΦΓΣΩ... .

g) Jeśli zdefiniujesz symbol x, to symbole x, x, $\mathtt{x}$ oraz $\mathsf{\mathit{x}}$ oznaczają coś całkiem innego.

h) Według polskiej normy, przecinek oddziela część ułamkową rozwinięcia dziesiętnego liczby od części całkowitej. Gdy chcemy zwiększyć czytelność zapisu wielocyfrowej liczby, możemy stosować grupowanie (najczęściej po trzy cyfry), oddzielając kolejne grupy pojedynczym odstępem, np. π = 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 88... .

i) Gwiazdka „*” jest znakiem mnożenia w językach programowania. W matematyce oznacza operację splotu. Do mnożenia używamy symbolu kropki „·”, jeśli zapisujemy taką operację w tekście, np.: 2·3 (ewentualnie 2×3). Znaku mnożenia używamy tylko dla liczb, dla zmiennych skalarnych nie jest stosowany, np. abc a nie: $a \cdot b \cdot c$, podobnie: $(1 - a)(1 - b)$ a nie: $(1 - a) \cdot (1 - b)$. Za to stosujemy kropkę w zapisie liczby w tzw. notacji naukowej i w mianie wielkości fizycznej, a więc np. uniwersalna stała grawitacji to $G = 6{,}67408 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.

j) Zapisując mianowaną wartość liczbową, np. masę, piszemy: 25,42 g, kiedy to miano **zawsze** zapisujemy czcionką prostą i oddzielamy od wartości liczbowej pojedynczym odstępem, a jeśli wartość obarczona jest niepewnością, to zapewne najczytelniejszą formą zapisu jest: (25,42 ± 0,14) g (zwróć uwagę na dodatkowe odstępy przed i po znaku „±”). Praktykowany bywa także zapis: 25,42(14) g, zwłaszcza przy bardzo dokładnych pomiarach, np. podając masę m_e elektronu, napiszemy: $m_e = 9{,}10938356(11) \cdot 10^{-31}$ kg.

k) Nie mamy obowiązku podawać wyniku pomiaru w jednostkach podstawowych układu SI. Jeśli wygodniejszymi są jednostki pochodne, to należy je stosować. W szeregu dziedzin fizyki stosowane są jednostki pozaukładowe i w publikacjach naukowych jest to dopuszczalne.

l) Każdy ze wzorów musi pojawić się po raz pierwszy w logicznym dla niego miejscu.

m) Wzory są taką samą logiczną częścią zdania jak orzeczenie, podmiot,... i wymagają stosownych znaków przestankowych wynikających z reguł konstrukcji zdania w języku polskim.

n) Numerujemy jedynie te wzory, do których odwołujemy się w tekście raportu.

o) Każdy wzór musi być wyjaśniony, a każdy symbol zdefiniowany! Nie powtarzamy definicji raz zdefiniowanych obiektów, chyba że tym samym symbolem zamierzamy oznaczyć inną wielkość, co nie należy do dobrej praktyki.

p) Gdy prowadzisz przekształcenia lub wyprowadzasz potrzebny Ci wzór, każdy krok przekształcenia lub wyprowadzenia musi być wyjaśniony Czytelnikowi.

q) To jest zwykły znak „minus” pisany z klawiatury: „-”. Jeśli zapisujesz odejmowanie np.: $a - b$, to „minus” jest dłuższy. Dobre procesory tekstu mają na to specjalną kombinację klawiszy, a edytory równań robią to za nas.

r) Matematyka wymaga dodatkowego odstępu „przed” i „po” znaku równości, odejmowania, dodawania i znakach mniejszy ($<$) i większy ($>$). Edytory równań zapewniają to automatycznie.

Gdy wpisujemy proste równania do teksu bez użycia edytora równań, wtedy sami musimy zadbać o te dodatkowe odstępy, a więc: $a = b$, a nie: a=b.

s) Każde z równań musi mieć własne zdanie wprowadzające. Blok równań bez komentarza, jeśli nie jest układem równań, jest niedopuszczalny!

t) Zazwyczaj wzory, z wyjątkiem najprostszych, typu $z = x + y$, powinny być wydzielone z tekstu na własnej linii i na tej linii wyśrodkowane. Bardzo prosty ułamek, typu a/b, zapisujemy wraz z tekstem właśnie w takie formie, a nie jako $\dfrac{a}{b}$ ani też jako $\frac{a}{b}$. Pierwsza z tych postaci wprowadza większy odstęp między liniami tekstu, co burzy jego ład, druga zaś powoduje, że symbole w mianowniku i liczniku stają się nietolerowalnie małe. Ułamek zawierający bardziej złożone wyrażenia w liczniku lub mianowniku, a także wzory zawierające znak różniczkowania, całki, znak sumy i znak iloczynu zasługują na własną linię.

u) Ręcznie wpisujemy tylko proste równania, np.: $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Do bardziej złożonych używamy edytora równań.

v) Nazewniki funkcji exp i ln, funkcji trygonometrycznych: sin, tg,…, odwrotnych do nich: arcsin, arctg,…, hiperbolicznych: sinh, tgh,…, oraz do nich odwrotnych: arsinh, artgh, itp. piszemy zawsze czcionką prostą.

w) Dyskutując zależność, np. między długością L sprężyny a siłą F przyłożona do jednego z jej końców, nie ma sensu zapisywanie tej relacji w postaci $y = ax + b$, jeśli wcześniej zdefiniowaliśmy symbole L oraz F, bo teraz będziemy musieli dodatkowo definiować symbole x oraz y. Gdy wcześniej nie zdefiniowaliśmy symboli L oraz F, zapis $y = ax + b$ również nie jest najzgrabniejszy, bo nie wprowadza stosownych skojarzeń między wzorem a obiektami ukrytymi za symbolami. Nie ma także sensu zapisywanie tej relacji jako np. $y = 0{,}123x + 4{,}5$ ani też jako $L = 0{,}123F + 4{,}5$, bo pojawi się natychmiast pytanie o wymiar obu współczynników liczbowych oraz o jednostkę, w której wyrażana jest siła F w tym wzorze. Zapewne najprostszy sposób to, po uprzednim zdefiniowaniu symboli L oraz F, zapisanie wzoru jako $L = aF + b$ z wykorzystaniem przykładowych symboli a oraz b i podanie w treści raportu ich wartości, np. $a = 0{,}123$ cm/N oraz $b = 4{,}5$ cm – koniecznie wraz z jednostkami.

3. Tabele i wykresy

a) Każdy element graficzny raportu to „rysunek”, który może przedstawiać histogram, wykres funkcji, zdjęcie układu doświadczalnego lub jego schematyczny rysunek, schemat blokowy układu pomiarowego, dane doświadczalne ujęte na wykresie, zdjęcie autora raportu, itp.

b) Każdej tabeli i rysunkowi nadajemy numer i opatrujemy je podpisem.

c) Utrzymujemy oddzielną numerację dla tabel i rysunków, a numeracja powinna odzwierciedlać kolejność omawiania w tekście.

d) Każda tabela i każdy rysunek muszą być wyjaśnione w treści raportu, przy czym odniesienie do nich musi poprzedzać te obiekty. Tabela lub rysunek, do którego nie ma odwołania w treści raportu – nie istnieje. Z wagi na rolę nawiasu w języku polskim, pierwsze, definiujące odwołanie nie może pojawić się w nawiasie.

e) Odwołując się w tekście raportu do tabeli lub rysunku, podajemy numer, a słowo „tabela” i „rysunek” piszemy wielką literą.

f) W tabelach i na rysunkach używamy tych samych nazw i symboli wielkości co w tekście.

g) W tabelach nazwy, symbole i jednostki wielkości umieszczamy w nagłówkach kolumn lub wierszy – w komórkach tabeli nie podajemy jednostek miar.

h) Długie tabele dobrze jest relegować na koniec raportu, małe – liczące kilka bądź kilkanaście wierszy można zamieścić „na bieżąco”, wkomponowane w treść pracy. Nie tworzymy tabeli, jeśli w niej znają się jedynie dwie liczby (nie licząc ich niepewności).

i) Nie zamieszczamy w tabeli kolumny lub wiersza ze stałą wartością – tabele służą do prezentacji wielkości, które zmieniają się od komórki do komórki.

j) Pamiętaj – wzory, tabele i rysunki nie mogą wystawać na margines.

k) Osie wykresów opatrujemy nazwą i symbolem odpowiedniej wielkości oraz jednostką, w jakiej ta wielkość jest przedstawiana, a samą jednostkę piszemy czcionką prostą i umieszczamy w nawiasach zwykłych bądź kwadratowych. Osie muszą być wyskalowane, a znaczniki (kreseczki) przy wartościach na osiach kierujemy do wnętrza pierwszej ćwiartki układu.

l) Na rysunku punkty danych zaznaczamy kółkiem, pełnym lub pustym (a nie częściowo zapełnionym i częściowo pustym – w grafice udającej oświetlenie i cień), dopiero w drugiej kolejności stosujemy romby, krzyżyki, itp.

m) Na wykresie punkty danych rysujemy razem z niepewnościami (o ile są znane).

n) Punktów danych **nigdy** nie łączymy linią: łamana, gładką, ani jakąkolwiek inną! Jedyne dopuszczalne linie na wykresie to zależności modelowe, które muszą być dokładnie omówione, wraz z podaniem wartości wszelkich parametrów, w tekście raportu. Często pojawia się sytuacja, kiedy to w części prezentującej wyniki ukazujemy je na wykresie, natomiast modelowa zależność dyskutowana jest dalej, co rodzi pokusę, aby powtórzyć wykres z danymi i zależnością modelową. Nie, tak nie postępujemy – prezentując wyniki pomiarów na wykresie przedstawiamy jednocześnie krzywą modelową i informujemy jednocześnie czytelnika, że wyjaśnienie tej krzywej znajdzie on w dalszej części raportu.

o) Postaraj się, aby rysunki miały ascetyczną formę — wszelkie „dodatki”: kolory, tła, linie siatek, trzeci wymiar, tzw. gradienty, muszą mieć uzasadnienie merytoryczne (chyba, że ilustrujesz np. artykuł ekonomiczny w gazecie).

p) Tytuł rysunku to element opcjonalny – zazwyczaj całą informację przekazujemy w podpisie.

q) Często stajemy wobec problemu polegającego na tym, że omawiamy tabelę lub rysunek i obiekt ten nie mieści się już na stronie w bezpośrednim sąsiedztwie, bo nasze odwołanie znajduje się przy końcu strony. W takiej sytuacji musimy umieścić tabelę lub rysunek jako pierwszy obiekt na następnej stronie, a na poprzedniej kontynuujemy dalszą część raportu.

W odniesieniu do rysunków mamy kilka kategorycznych reguł:

- skale na osiach dobieramy tak, aby współrzędne dowolnego punktu na wykresie można było ocenić szybko i łatwo;
- zakres wartości na obu osiach dobieramy tak, aby treść rysunku zajmowała cały jego obszar;
- skale na osiach dobieramy tak, aby prezentowana krzywa lub wyobrażona krzywa łącząca układ punktów była, jeśli to możliwe, nachylona pod kątem 45° do osi odciętych.

4. Kilka uwag na temat języka polskiego w publikacjach naukowych

a) Prace naukowe, jak również raport, piszemy w pierwszej osobie liczby mnogiej (nawet wtedy, gdy autorem raportu jest jedna osoba) lub w formie bezosobowej.

b) Cały raport musi być napisany jednolitym krojem i rozmiarem czcionki szeryfowej, a dotyczy to tekstu, rysunków, tabel i wzorów; większy rozmiar czcionki może pojawić się jedynie w nagłówkach definiujących różne części raportu, mniejszy zaś w Streszczeniu i podpisach do rysunków i tabel.

c) Wytłuszczenie druku należy stosować oszczędnie, ograniczając je np. do nagłówków i definicji.

d) Nową myśl zaczynaj od akapitu lub po wyraźnym odstępie.

e) Zwracamy uwagę na różnice znaczeniowe czasownika *liczyć* opatrzonego różnymi przedrostkami: *policzyć* można studentów obecnych na wykładzie, *przeliczyć* to policzyć coś ponownie, można też *przeliczyć* złotówki na dolary, *wyliczyć* można np. dni tygodnia: poniedziałek, wtorek..., natomiast całkę, pole powierzchni, wartość funkcji można *obliczyć* lub *wyznaczyć*, a równanie *rozwiązać*. Warto o tym pamiętać, jeśli chce się *zaliczyć* raport na ocenę bardzo dobrą.

f) Język polski wyposażony jest w rzeczowniki niepoliczalne, np. *piasek*, *kawa*, i policzalne, np. *jajko*, *dom*. Do pierwszych używamy słowa *ilość*, a do drugich słowa *liczba*. Dlatego mówimy: *liczba pomiarów*, a nie *ilość pomiarów*.

g) Gwóźdź wbijemy w deskę *za pomocą* młotka, natomiast cały szereg prac możemy wykonać jedynie *przy pomocy* przyjaciół i dobrych kolegów.

h) Znaki przestankowe: kropka, przecinek, dwukropek, wielokropek, średnik, a także znak zapytania i wykrzyknik muszą być „przyczepione” do ostatniego znaku poprzedzającego słowa.

Poprawnie: „...powiedział, że...” a nie: „...powiedział , że...”, ani też: „...powiedział ,że...”. Po tych znakach zawsze występuje odstęp.

i) Nie stawiamy kropki po tytule rozdziału, podrozdziału,…, tytule tabeli i rysunku.

j) Nawiasy i cudzysłowy obejmują treść we wnętrzu ściśle i bez „luzów”, tzn.: (nawiasem mówiąc), a nie np.: (nawiasem mówiąc).

k) Nawias w języku polski pełni rolę wspomagającą i z definicji jego zawartość możemy opuścić bez szkody dla teksu. Jeśli definiowany symbol, odwołanie do tabeli lub rysunku umieścimy w nawiasie, to tak jakby takiego symbolu bądź odwołania nie było, a tym samym obiekt, do którego się odwołujemy nie istnieje. Od tej reguły mamy tylko jeden wyjątek: numery wzorów zawsze piszemy w nawiasach okrągłych i odwołując się do wzoru, podajemy jego numer także ujęty w nawiasy okrągłe.

l) Spójniki i przyimki: „i”, „a”, „w”, „z”, „o”, oraz „u” występujące samodzielnie na końcu linii tekstu nie są wskazane i należy ich unikać. Umożliwia to tzw. spacja nierozdzielna, wstawiana między te litery a następujące po nich słowo. Każdy profesjonalny procesor tekstu posiada takie narzędzie.

m) Rzeczownik „dane”, w znaczeniu „zbiór, zestaw liczb”, ma tylko liczbę mnogą, a więc siłą rzeczy nie ma rzeczownika „dana” na określenie jednej z tych liczb, ale zawsze możemy powiedzieć „jedna z danych”.