Ćwiczenie nr 5 – TERMISTOR JAKO TERMOMETR

Instrukcja dla studenta (wersja z dnia 28 VI 2018)

A. Majhofer i R. Nowak

WYMAGANIA TEORETYCZNE

- Sformułowanie metody najmniejszych kwadratów i wyznaczanie ocen parametrów i odchyleń standardowych tych ocen w przypadku zależności w postaci linii prostej.
- Definicja kowariancji i współczynnika korelacji.
- Ogólne wyrażenie na wariancję kombinacji liniowej zmiennych losowych (niekoniecznie statystycznie niezależnych).
- Prawa Ohma i Kirchhoffa – dzielnik napięcia.

WSTĘP

Celem ćwiczenia jest szczegółowe prześledzenie standardowej procedury budowy i kalibracji przyrządu pomiarowego. Zbudujemy termometr wykorzystujący zależność oporu elektrycznego od temperatury. Wykorzystamy tzw. *termistor*, czyli opornik z materiału półprzewodnikowego, którego opór znacznie silniej zależy od temperatury niż w klasycznych przewodnikach. Zakładamy, że postać funkcji opisującej zależność oporu termistora od temperatury jest znana, natomiast dla każdego termistora wartości występujących w tej funkcji parametrów wyznaczane są na podstawie pomiarów. Wykonanie tego zadania wymagać będzie:

a) wyznaczenia charakterystyki temperaturowo-oporowej termistora, czyli zależności jego oporu $r(T)$ od temperatury absolutnej T;
b) zbudowania dzielnika napięcia i dobrania odpowiednich warunków pracy termistora, aby możliwie najdokładniej mierzyć temperaturę w zadanym przedziale;
c) kalibracji przyrządu, czyli wyznaczenia funkcyjnej zależności określającej odpowiedź układu, tj. napięcia na termistorze, na dobrze zdefiniowany sygnał, tj. temperaturę termistora, aby zależność tę odwrócić, co pozwoli wyznaczać temperaturę na podstawie pomiaru napięcia;
d) określenia dokładności wskazań przyrządu w zadanym zakresie temperatur.

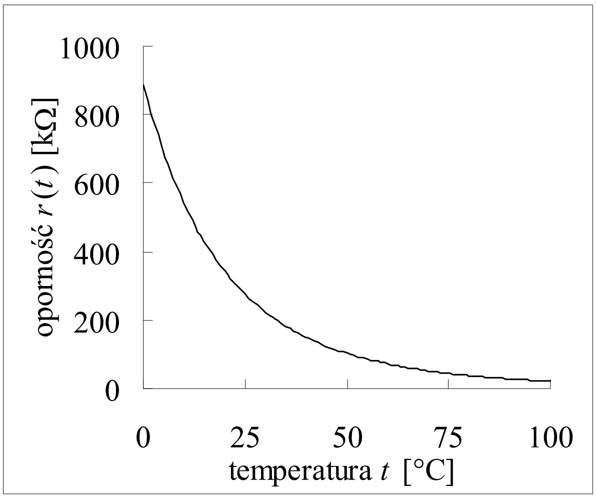
Powyższa procedura jest typowym sposobem postępowania przy budowie czujników temperatury.

OBJAŚNIENIA – WYKORZYSTANIE TERMISTORA DO BUDOWY TERMOMETRU

a) Zależność oporności $r(T)$ typowego termistora od temperatury absolutnej T, z dobrym przybliżeniem, opisuje zależność:

$$r(T) = r_\infty \exp\left(\frac{B}{T}\right), \qquad (1)$$

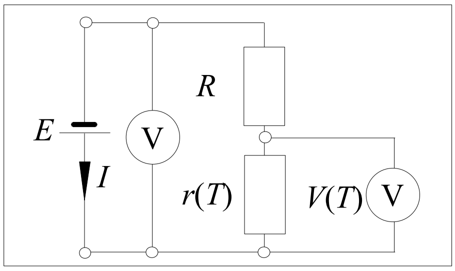
gdzie wielkość B zwana jest stałą materiałową termistora. Dla termistorów stosowanych w ćwiczeniu, typowa wartość parametru r_∞ ma wartość około 1 Ω, a wartość parametru B zawiera się w granicach od 3000 K do 4000 K. Przykład zależności (1) dla termistora opisanego parametrami $r_\infty = 0{,}8$ Ω i $B = 3800$ K, ukazuje Rysunek 1. Celem pierwszej części pomiarów jest wyznaczenie ocen parametrów r_∞ i B otrzymanego termistora.



Rys. 1. Przykładowy kształt zależności oporności termistora od temperatury

b) W typowych czujnikach temperatury, termistor wykorzystany jest jako element dzielnika napięć. Dzielnik napięć to układ dwóch szeregowo połączonych oporników, a przykład takiego dzielnika, złożonego z opornika wzorcowego o oporze R oraz termistora o oporze $r(T)$ przedstawia Rysunek 2. Na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa znajdujemy napięcie $V(T)$ na termistorze:

$$V(T) = \frac{r(T)}{R + r(T)} E. \tag{2}$$



Rys. 2. Schemat dzielnika napięć

Pomiar napięcia V w zadanej temperaturze T i przy zadanym napięciu E zasilania, pozwala wyznaczyć opór r, a następnie, wykorzystując wzór (1), obliczyć temperaturę T. W zastosowaniach technicznych jesteśmy zwykle zainteresowani zmianami temperatury w niewielkim przedziale $(T_0 - \Delta, T_0 + \Delta)$ wokół wybranej wartości T_0, dlatego zależność (2) można przybliżyć w tym przedziale zależnością liniową:

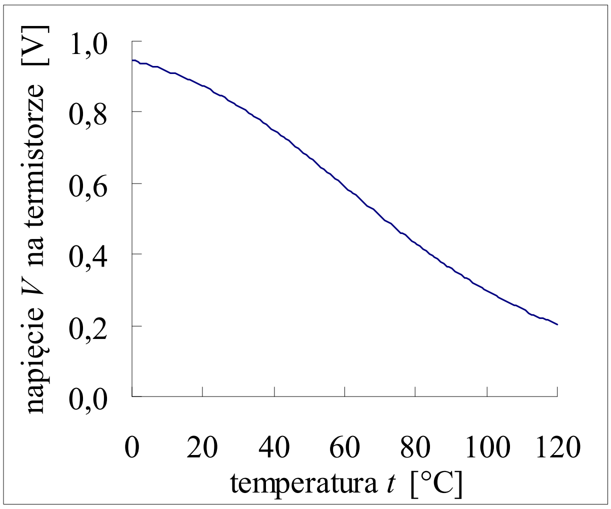
$$V(T) \approx U(T) = h(T - T_0) + U_0,$$

przy czym wygodnie jest używać temperatury t mierzonej w stopniach Celsjusza:

$$U(t) = h(t - t_0) + U_0 = ht + g, \tag{3}$$

gdzie t_0 jest temperaturą T_0 wyrażoną w skali Celsjusza. Obok symbolu V opisującego faktycznie napięcie na termistorze dane wzorem (2), do rozważań wprowadziliśmy dodatkowy symbol U oznaczający przybliżoną wartość napięcia na termistorze. Symbol U zamierzamy stosować dla wielkości wyznaczonej ze związku (3).

Zależność napięcia $V(t)$ (wzór (2)) od temperatury ma przebieg zilustrowany na Rysunku 3 dla $r_\infty = 0{,}8\ \Omega$, $B = 3800$ K, $R = 51$ kΩ i napięcia zasilania $E = 1$ V. Widać na nim punkt przegięcia w okolicy temperatury $t_0 = 60$°C. Użyteczność punktu przegięcia polega na tym, że możemy go wykorzystać do poprawy jakości przybliżenia (3) w rozwinięciu zależności (2). Otóż, jak wiemy, punkt przegięcia charakteryzuje się tym, że w punkcie tym znika druga pochodna, a więc rozwijając zależność $V(T)$ wokół tego punktu pozbywamy się wyrazu kwadratowego i pierwszy zaniedbany wyraz to dopiero wyraz sześcienny. Warunek znikania drugiej pochodnej $V(T)$ względem T (przy ustalonym E i R) dla ustalonego termistora (a więc zadanej także wartości B) pozwala wyznaczyć oporność R opornika wzorcowego:



Rys. 3. Przykładowy przebieg napięcia na termistorze w układzie dzielnika

$$R = \frac{B - 2T_0}{B + 2T_0} r_\infty \exp\left(\frac{B}{T_0}\right) \tag{4}$$

w dzielniku w zależności od temperatury T_0, przy której chcemy obserwować punkt przegięcia. Na podstawie tego właśnie związku obliczono cytowaną wcześniej wartość $R = 51$ kΩ oporu referencyjnego dla temperatury $t_0 = 60$°C. Punkt przegięcia ma jeszcze tę zaletę, że w jego okolicy zmienność badanej funkcji jest największa, a więc największa jest też czułość przyrządu.

c) Kalibracja przyrządu polega na wyznaczeniu ocen wartości parametrów h i g we wzorze (3) na podstawie pomiarów napięcia V dla szeregu dokładnych wartości temperatury t w układzie dzielnika napięć z wyznaczonym oporem R. Za „dokładne wartości" temperatury uznajemy wskazania wzorcowego termometru.

d) Termistor zamienimy w termometr, jeśli zmierzymy napięcie V na termistorze i temperaturę wyznaczymy z odwróconej zależności (3):

$$t = HV + G, \quad H = \frac{1}{h}, \quad G = -\frac{g}{h}. \tag{5}$$

Niepewność tak uzyskanej wartości temperatury wynika z niepewności wartości napięcia V oraz ocen parametrów h i g i ich kowariancji.

***Zadanie* 1 (*obowiązkowe, do domu – do wykonaniu przed przystąpieniem do pomiarów*)**
Wykorzystując uwagi zawarte w niniejszej instrukcji w części ANALIZA DANYCH, zaproponuj postać transformacji zmiennych zależnej r (*oporu*) *i niezależnej T* (*temperatury*) *sprowadzającej wyrażenie* (1) *do postaci liniowej* $\eta(x) = ax + b$ *pomocniczych parametrów a i b, w której* η *jest nową zmienną zależną, a x nową zmienną niezależną. Podaj związek między parametrami a oraz b i parametrami B i* r_∞ *termistora.*

***Zadanie* 2 (*obowiązkowe, do domu – do wykonaniu przed przystąpieniem do pomiarów*)**
Wyprowadź związek (4). *Wyznacz współczynniki prostej, stycznej do krzywej V*(*T*) *i przechodzącej przez punkt przegięcia tej krzywej.*

POMIARY

Pomiary w tym doświadczeniu odbywają się w dwóch częściach i w innym rytmie niż w dotychczasowych ćwiczeniach, dlatego niezbędne jest kilka zdań omówienia. Na pierwszym spotkaniu wykonywany jest pomiar charakterystyki temperatura-opór termistora w obszarze od około 5°C do około 80°C. Pozostały czas spotkania poświęcony jest ćwiczeniom rachunkowym – wyznaczeniu metodą graficzną parametrów termistora, a w oparciu o nie, wartość oporu *R* referencyjnego w dzielniku napięcia (wzór (4)), a następnie kolejnych zadań z części ANALIZA DANYCH, do momentu wyczerpania czasu trwania Pracowni. Powtórna analiza danych uzyskanych z pomiarów, tym razem metodą najmniejszych kwadratów, to zadanie domowe do wykonania przed drugim spotkaniem pomiarowym. Na spotkaniu tym budowany jest dzielnik napięcia i wykonywane są pomiary charakterystyki napięciowo-temperaturowej w obszarze temperatur od około 50°C do około 80°C, służące kalibracji przyrządu.

Masz do dyspozycji

- naczynie o pojemności około 200 ml;
- wzorcowy termometr elektroniczny z podziałką co 0,1°C; jego wskazania uznajemy za (wystarczająco) dokładne;
- termistor w aluminiowej rurce z wyprowadzonymi przewodami; termistor to obiekt o rozmiarze kilku milimetrów umieszczony i zalany żywicą na końcu rurki;
- płytkę drukowaną służącą do budowy dzielnika napięć;
- zasilacz stałonapięciowy jako źródło napięcia na wejściu dzielnika;
- miernik uniwersalny Brymen 805; parametry tego miernika jako omomierza i woltomierza napięcia stałego podaje Tabela 1 – aby uzyskać informacje dotyczące symboli i sposobu wyznaczania niepewności pomiarów skonsultuj instrukcję do Ćwiczenia 3;
- dodatkowy miernik uniwersalny dowolnego typu do monitorowania napięcia na zasilaczu;
- zestaw oporników;
- przewody;
- gorącą wodę i lód.

Uwagi:

- Podczas wykonywania pomiarów pamiętaj o szczegółowej dokumentacji, tj. o notowaniu wszystkich informacji mogących mieć znaczenie podczas analizowania uzyskanych wyników.
- Ponieważ przy wysokich temperaturach woda stygnie stosunkowo szybko i trudny jest jednoczesny odczyt temperatury i oporności, skoncentruj się na obserwacji termometru. W momencie, gdy temperatura osiągnie wyznaczoną przez Ciebie wartość, zablokuj miernik oporu przyciskiem HOLD. Po zapisaniu temperatury, zapisz oporność i odblokuj miernik.
- W trakcie pomiarów obchodź się bardzo ostrożnie z naczyniem z wodą – woda o temperaturze 80°C ÷ 90°C jest gorąca. Naczynie ustaw z dala od Ciebie, aby niechcący go nie potrącić, staraj się nim nie poruszać, a gdy woda stygnie, nie okładaj go lodem lub ręcznikami nasączonymi zimną wodą – pozwól, aby proces stygnięcia przebiegał autonomicznie – bez Twej interwencji i jakikolwiek zakłóceń.

Tabela 1. Parametry miernika Brymen 805 jako omomierza i woltomierza napięcia stałego

Zakres oporności		Parametry dopuszczalnego błędu wskazania	
od	do	*w*	*nc*
000,0 Ω	399,9 Ω	0,008	6*c* = 0,6 Ω = 0,0006 kΩ
0,400 kΩ	3,999 kΩ	0,006	4*c* = 0,004 kΩ
04,00kΩ	39,99 kΩ	0,006	4*c* = 0,04 kΩ
040,0 kΩ	399,9 kΩ	0,006	4*c* = 0,4 kΩ
0,400 MΩ	3,999 MΩ	0,01	4*c* = 0,004 MΩ = 4 kΩ
04,00 MΩ	39,99 MΩ	0,02	4*c* = 0,04 MΩ = 40 kΩ
Zakres napięcia stałego (DC)		Parametry dopuszczalnego błędu wskazania	
od	do	*w*	*nc*
000,0 mV	399,9 mV	0,003	4*c* = 0,4 mV = 0,0004 V
0,400 V	3,999 V	0,005	3*c* = 0,003 V
04,00 V	39,99 V	0,005	3*c* = 0,03 V

Wykonanie pomiarów – część I - wyznaczanie charakterystyki temperaturowej termistora

- Zanotuj numer termistora, który otrzymałeś (numer ten podaj w opisie ćwiczenia).
- Miernik uniwersalny Brymen ustaw do pomiaru oporności i podłącz do termistora.
- Zanotuj temperaturę i oporność termistora w warunkach temperatury pokojowej.
- Poproś prowadzącego zajęcia o napełnienie naczynia gorącą wodą.
- Umieść termistor i termometr w wodzie. Zadbaj, aby termistor i czujnik termometru znalazły się możliwie blisko siebie i oba elementy były zanurzone w wodzie – wypełnienie naczynia do 1/4 ÷ 1/5 wysokości powinno to zapewnić – zbyt duża ilość wody jest niewygodna, bo naczynie będzie wolniej stygło, a to, przy skończonym czasie pomiaru, zawęzi badany obszar temperatur.
- Nim rozpoczniesz pomiary, poczekaj aż termometr zacznie definitywnie wskazywać malejącą wartość temperatury. Wygodne może tu być obserwowanie wskazań oporu termistora.
- Notuj wartości temperatury stygnącej wody i oporność termistora. Prowadź pomiary przez 30 minut.
- Napełnij naczynie zimną wodą z kranu i dodaj pewną ilość lodu. Tak dobierz proporcje wody i lodu, aby po wymieszaniu i **całkowitym** stopieniu lodu, woda miała mniej niż 10°C. I tu, jak poprzednio, byt duża ilość wody jest niewygodna, bo naczynie będzie wolniej się ogrzewało, a to, przy skończonym czasie pomiaru, zawęzi badany obszar temperatur.
- Nim rozpoczniesz pomiary, poczekaj aż temperatura zacznie definitywnie rosnąć.
- Notuj wartości temperatury wody ogrzewającej się od otoczenia i oporności termistora. Zakończ, gdy czas wykonywania pomiarów przekroczy 30 minut.

Wyznaczanie optymalnych parametrów układu do kalibracji termistora

***Zadanie* 3 (*na ćwiczeniach – do wykonania po pierwszej części pomiarów*)**

Wykorzystując wyniki **Zadania** 1 *oraz zamieszczony na Rysunku* 4 (*na końcu instrukcji*) *specjalny papier graficzny, wyznacz szacunkowe oceny parametrów* r_∞ *i B termistora. W tym celu nanieś na rysunek niektóre ze zmierzonych wartości temperatury i oporności termistora* (*nie wykorzystuj wszystkich danych* – wystarczy, że użyjesz *po kilka punktów danych z obszaru wyższych i niższych temperatur*), *dopasuj „na oko”– za pomocą linijki – linię prostą do danych, wyznacz parametry tej linii prostej i na tej podstawie wyznacz oceny parametrów termistora. Oceny te winny wyjść, w przybliżeniu, miedzy* 3500 K *a* 4000 K *dla parametru B oraz około* 1 Ω *dla parametru* r_∞.

Wykorzystując znalezione szacunkowe oceny parametrów r_∞ *i B termistora, wyznacz ocenę wartości R oporu dzielnika* (*wzór* (4)) *dla temperatury* t_0 = 65°C. *Skorzystaj z wykresu na Rysunku* 5 (*na końcu instrukcji*) *lub kalkulatora. Wartość oporności referencyjnej dzielnika powinna zawierać się, w przybliżeniu, między* 10 kΩ *a* 50 kΩ.

***Zadanie* 4 (*obowiązkowe, do domu – do wykonaniu przed przystąpieniem do części II pomiarów*)**

Wykorzystując wyniki ***Zadania*** **1** *oraz dane dotyczące charakterystyki temperaturowej termistora, wyznacz metodą najmniejszych kwadratów oceny parametrów r_∞ i B termistora. Porównaj z wartościami uzyskanymi metodą graficzną. Wykorzystując wyznaczone oceny parametrów termistora, wyznacz optymalną wartość oporności R opornika w układzie dzielnika napięcia, który zastosujesz przy kalibracji termistora.*

Wykonanie pomiarów – część II – budowa i kalibracja termometru

W drugiej części pomiarów wykorzystywany jest zasilacz. Do dobrej praktyki należy brak ufności w stabilne i poprawne działanie urządzeń użytych w doświadczeniu, a dotyczy to każdego doświadczenia, i dlatego w zestawie przyrządów znajduje się drugi miernik. Miernik ten ma Ci posłużyć do monitorowania napięcia zasilania.

- Upewnij się, że dysponujesz tym samym termistorem – sprawdź numer – który wykorzystywany był w pierwszej części pomiarowej.
- W tej części pomiarowej będzie wykorzystywany zasilacz. W celu uzyskania stabilnych warunków pracy wymaga on, jak każde urządzenie elektroniczne, wygrzania, dlatego już teraz włącz go, podłącz do jego wyjścia dodatkowy miernik i nastaw jakieś napięcie, np. w okolicy 18 V i obserwuj w trakcie następnych czynności jego wskazania. Odnotuj charakter i rozmiar obserwowanych zmian napięcia.
- Z otrzymanego zestawu oporników wybierz ten, który najlepiej odpowiada wartości obliczonej wg wzoru (4) (patrz ***Zadanie*** **4**) dla t_0 = 65°C.
- Wykorzystując płytkę, zbuduj dzielnik napięcia, którego elementami są opornik i termistor oraz miernik Brymen pozwalający mierzyć napięcie na termistorze. Nie podłączaj zasilacza do układu – do zasilacza pozostaw jedynie podłączony miernik pozwalający kontrolować napięcie na wyjściu zasilacza.
- Poproś prowadzącego zajęcia o napełnieni naczynia gorącą wodą i wstaw do naczynia termistor i termometr.
- Po sprawdzeniu przez prowadzącego zajęcia poprawności połączeń elektrycznych układu, podłącz zasilacz do układu dzielnika i pozostaw na nim napięcie około 18 V, zanotuj wartość tego napięcia; kieruj się wskazaniami miernika a nie wyświetlacza zasilacza.
- Wykonaj pomiary z gorącą wodą jak przy zdejmowaniu charakterystyki temperaturowej. Notuj wartości: temperatury, napięcia na termistorze i napięcia zasilania nie dłużej niż przez 30 minut.
- Obserwuj, od czasu do czasu, wskazania miernika napięcia na zasilaczu. Odnotuj charakter i rozmiar obserwowanych zmian napięcia.

ANALIZA DANYCH

Część I – wyznaczanie parametrów zależności nieliniowej
Metoda najmniejszych kwadratów w zastosowaniu do linii prostej

Na wykładzie została wprowadzona metoda najmniejszych kwadratów służąca do wyznaczenia ocen parametrów zależności $\eta = ax + b$, którą praktycznie wykorzystano w **Ćwiczeniu 4**. Przypomnijmy zasady, na których się ona opiera: dla serii znanych **dokładnie** wartości x_i, $i = 1, 2, ..., n$, mierzymy odpowiadające im oceny y_i wielkości $\eta_i = ax_i + b$ i minimalizujemy, względem parametrów a oraz b, ważoną sumę kwadratów reszt

$$\mathcal{R}(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i} \right)^2 ,$$

gdzie wielkości σ_i to odchylenia standardowe zmiennej y_i. W praktyce odchylenia te są, zazwyczaj, nieznane i dlatego zastępujemy je niepewnościami standardowymi u_i, a wówczas oceny nieznanych parametrów a i b oraz ich niepewności wyrażają się związkami:

$$\hat{a} = \frac{1}{\Delta}\left(SS_{xy} - S_x S_y\right), \quad u_a^2 = \frac{1}{\Delta} S, \qquad \hat{b} = \frac{1}{\Delta}\left(S_y S_{xx} - S_{xy} S_x\right), \quad u_b^2 = \frac{1}{\Delta} S_{xx}, \tag{6}$$

gdzie

$$S=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{u_i^2},\quad S_x=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{u_i^2},\quad S_{xx}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{u_i^2},\quad S_y=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{u_i^2},\quad S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i y_i}{u_i^2},\quad \Delta=SS_{xx}-S_x^2.$$

Tak wyznaczone oceny nie są statystycznie niezależne, a ocena c_{ab} ich kowariancji C_{ab} wynosi:

$$c_{ab}=-\frac{1}{\Delta}S_x. \tag{7}$$

Często, obok oceny c_{ab} kowariancji, podawana jest ocena:

$$\hat{\rho}_{ab}=\frac{c_{ab}}{u_a u_b}$$

tzw. współczynnika korelacji ρ_{ab}. Współczynnik ten jest bezwymiarowy, ma wartość ograniczoną do przedziału [–1,1] i wskazuje na siłę związku między ocenami parametrów a oraz b: im jest bliższy jedności, co do wartości bezwzględnej, tym silniejsza relacja łączy obie oceny. Jego wartość ±1 oznacza ścisłą, matematyczna zależność liniową: malejącą dla wartości –1 i rosnącą dla 1.

Sprowadzenie do zależności liniowej

Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do zależności $\eta(x;a,b)$ liniowej, względem nieznanych parametrów a i b, pozwala otrzymać analityczne wzory zarówno dla ocen tych parametrów, jak i ich odchyleń standardowych. W ogólnym przypadku nieliniowej zależności od szukanych parametrów, metoda najmniejszych kwadratów prowadzi do układu nieliniowych równań, których rozwiązań zazwyczaj nie potrafimy przedstawić za pomocą funkcji elementarnych. Istnieje jednak szereg przykładów funkcji, w których parametry pojawiają się w formie nieliniowej, ale po wykonaniu zamiany zmiennych, zależności te można przekształcić do postaci liniowej funkcji szukanych parametrów – być może kosztem przedefiniowania niektórych z nich. Dla przykładu zależność

$$\varphi=\frac{A}{B+x}$$

mierzonej wielkości φ i znanej dokładnie wielkości x, po podstawieniu $\eta = 1/\varphi$ przyjmuje postać

$$\eta=\frac{1}{\varphi}=\frac{B+x}{A}=\frac{B}{A}+\frac{1}{A}x=ax+b,\quad \text{gdzie}\quad a=\frac{1}{A},\quad b=\frac{B}{A},$$

a więc zależy liniowo od dwóch nowych parametrów: a i b. Możemy teraz do zależności $\eta = ax + b$ zastosować standardowe wzory (6) i (7). Musimy jednak pamiętać o wyznaczeniu, za pomocą wzoru na przenoszenie niepewności (o ile ma zastosowanie) niepewności wielkości $1/y_i$ na podstawie znanych wartości y_i i u_i. Po wyznaczeniu ocen parametrów a i b oraz ich niepewności u_a, u_b i oceny c_{ab} kowariancji C_{ab}, odwracamy transformację i uzyskujemy oceny parametrów A i B, a niepewności u_A, u_B i ocenę c_{AB} kowariancji C_{AB} wyznaczamy na podstawie wzoru na propagację małych błędów. Stosowne obliczenia stanowią treść zadań rachunkowych poniżej. W podobny sposób postępujemy z przykładowymi zależnościami wymienionymi w Tabeli 2.

Tabela 2. Przykłady „linearyzowania” zależności ([x] oznacza wymiar lub jednostkę wielkości x)

Badana zależność	Nowa zmienna zależna	Nowa zmienna niezależna	Przekształcenie parametrów	Otrzymana zależność
$\varphi = Bx^a$	$\eta=\ln\frac{\varphi}{[\varphi]}$	$t=\ln\frac{x}{[x]}$	$b=\ln\frac{B}{[B]}$	$\eta = at + b$
$\varphi = Be^{ax}$	$\eta=\ln\frac{\varphi}{[\varphi]}$	x	$b=\ln\frac{B}{[B]}$	$\eta = ax + b$
$\varphi = A(x+B)^k$	$\eta=\sqrt[k]{\varphi}$	x	$a=\sqrt[k]{A},\quad b=B\sqrt[k]{A}$	$\eta = ax + b$

***Uwaga**. Tak jak nie potrafimy obliczyć wartości funkcji wykładniczej w punkcie np.* 5 cm *lub wartości funkcji trygonometrycznych od argumentu np.* 3 godz.*, tak też nie potrafimy obliczyć wartości logarytmu wielkości mianowanej. Dlatego do dobrej praktyki należy jawne usunięcie miana we wzorach metodą dzielenia przez jednostkę, np.* ln (t/1°C)*, w której mierzona jest* *rozważana wielkość, co w Tabeli symbolizują oznaczenia* $[\varphi]$, $[x]$ *oraz* $[B]$.

Przykład sprowadzenia do zależności liniowej spotkaliśmy już w Ćwiczeniu 4, gdzie analizowana była zależność

$$T^2 = -\frac{4\pi^2}{g}h + \frac{4\pi^2 H}{g}$$

kwadratu okresu T drgań wahadła, jako funkcji wysokości h nad podłogą, a wielkość H określała wysokość punktu zaczepienia wahadła nad podłogą. W relacji tej kwadrat okresu odgrywa rolę wielkości η, natomiast zmienną niezależną x jest wysokość h.

Jeśli niepewności zmiennej zależnej są na tyle małe, że przybliżenie propagacji małych błędów jest wystarczająco dokładne, to oceny wartości parametrów uzyskane na podstawie zlinearyzowanej zależności są bardzo bliskie wartościom wynikającym z metody najmniejszych kwadratów zastosowanej do oryginalnego problemu.

Przenoszenie niepewności

Uzupełnijmy te rozważania o jeszcze jeden element: ogólny wzór na przenoszenie niepewności, który wykorzystamy wielokrotnie w dalszej części ćwiczenia. W **Ćwiczeniu 2** pokazaliśmy, że niepewność u_z kombinacji liniowej $z = ax + by + c$ zmiennych x oraz y, gdzie a, b oraz c to zadane stałe, wynosi:

$$u_z^2 = a^2u_x^2 + b^2u_y^2 + 2abc_{xy} . \tag{8}$$

Współczynnik c_{xy} przy podwojonym iloczynie to ocena tzw. kowariancji zmiennych x i y i w zależności od relacji między zmiennymi i znaku iloczynu ab, modyfikuje niepewność u_z. W szczególnym przypadku, gdy zmienne są statystycznie niezależne, ocenę ich kowariancji można przyjąć równą zeru i powracamy do dobrze znanego wzoru na propagację niepewność, wykorzystywanego we wszystkich dotychczasowych analizach.

Wzór (8) dostarcza punktu startowego do wyznaczania oceny kowariancji rozmaitych wielkości pojawiających się w niniejszym ćwiczeniu, a procedurę można podsumować następującą receptą: ***utwórz kombinację liniową zmiennych, których kowariancję chcesz ocenić i wyznacz kwadrat jej niepewności standardowej – wyraz stojący przy podwojonym iloczynie współczynników kombinacji wyznacza ocenę kowariancji***.

Zadanie 5 (na ćwiczeniach) – ogólna postać wzoru na przenoszenie niepewności

Wzorując się na wyprowadzenie wzoru (8), *pokaż, że w przypadku kombinacji liniowej trzech zmiennych:* $w = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$, *wzór na niepewność* u_w *wielkości w ma postać:*

$$u_w^2 = \alpha^2u_x^2 + \beta^2u_y^2 + \gamma^2u_z^2 + 2\alpha\beta c_{xy} + 2\alpha\gamma c_{xz} + 2\beta\gamma c_{yz} ,$$

gdzie u_x, u_y, u_z *to niepewności wielkości x, y oraz z, natomiast* c_{xy}, c_{xz} *oraz* c_{yz} *to oceny kowariancji* C_{xy}, C_{xz} *oraz* C_{yz} *kowariancji zmiennych x i y, x i z oraz y i z.*

Uogólnij, bez przeprowadzania obliczeń, ten wynik na przypadek:

$$z = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i ,$$

wielu zmiennych x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *ze współczynnikami* α_i, *kiedy to otrzymujemy wyrażenie:*

$$u_z^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 u_i^2 + \sum_{i=1,\, j\neq i}^{n} \alpha_i \alpha_j c_{ij} ,$$

gdzie u_i^2 *to ocena wariancji wielkości* x_i, *a* c_{ij} *kowariancji* C_{ij} *zmiennych* x_i *oraz* x_j.

Pokaż, że dla funkcją $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *zmiennych* x_i, *której rozwinięcie*:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \approx f\left(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_i - \mu_i\right)$$

do wyrazów liniowych wokół punktu $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ *dostarcza jej akceptowalnej aproksymacji w przestrzeni zmiennych* x_i *w hiperkostce o rozmiarach kilku niepewności* u_i, *wzór na niepewność wartości tej funkcji przyjmuje postać:*

$$u_f^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_i^2 + \sum_{i=1, j \neq i}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} c_{ij} \ . \tag{9}$$

Wiemy, że w przypadku wielokrotnych pomiarów, potrafimy wyznaczyć niepewności wielkości mierzonych. Wyprowadzając wzór (8) pokazaliśmy w **Ćwiczeniu 2**, jak wielokrotne pomiary pozwalają także wyznaczyć ocenę c_{xy} kowariancji. Gdy wykonujemy jednokrotne pomiary, zarówno niepewności jak i ocenę kowariancji musimy znać skądinąd.

Zadanie* 6 (*na ćwiczeniach rachunkowych*) – *korelacja między funkcjami zmiennych

Dana jest seria zmiennych x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, o niepewnościach u_i i ocenach kowariancji c_{ij}. Ze zmiennych x_i tworzymy dwie kombinacje liniowe:

$$z_\alpha = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \quad z_\beta = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \ ,$$

o stałych współczynnikach α_i oraz β_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Pokaż, że ocena kowariancji $C_{\alpha\beta}$ między zmiennymi z_α oraz z_β wynosi:

$$c_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i u_i^2 + \sum_{i=1, j \neq i}^{n} \alpha_i \beta_j c_{ij} \ .$$

Pokaż, że w przypadku dwóch funkcji $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zmiennych x_i o niepewnościach u_i, do których to funkcji mają zastosowanie założenia dotyczące wyznaczanie niepewności wielkości pośrednio mierzonej (przenoszenia niepewności), ocena c_{fg} kowariancji między tymi funkcjami przyjmuje postać:

$$c_{fg} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} u_i^2 + \sum_{i=1, j \neq i}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} c_{ij} \ . \tag{10}$$

Należy zwrócić uwagę na następujący fakt: nawet gdy zmienne x_i są statystycznie niezależne, funkcje f i g pozostają skorelowane – fluktuacje wartości zmiennych wymuszają odpowiednią współzmienność wartości tych funkcji.

Kowariancja zmiennych, w szczególności kowariancja ocen parametrów linii prostej, odgrywa w analizie danych w niniejszym ćwiczeniu zasadniczą rolę.

***Zadanie* 7 (*do domu dla treningu*)**

Dana jest seria zmiennych x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, o niepewnościach u_i oraz seria zmiennych y_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, o niepewnościach v_j. Ze zmiennych tych utworzono dwie kombinacje liniowe:

$$z_\alpha = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \quad z_\beta = \beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \ ,$$

o stałych współczynnikach α_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, oraz β_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Wyznacz kowariancję między zmiennymi z_α oraz z_β.

Zadanie* 8 (*na ćwiczeniach rachunkowych*) – *przykład sprowadzania do zależności liniowej

Zgodnie z prawem Newtona, temperatura T stygnącego ciała, z dobrym przybliżeniem, opisywana jest zależnością:

$$T(t) = T_0 + \left(T_p - T_0\right) \exp(-At), \tag{11}$$

gdzie T_0 jest temperaturą otoczenia, T_p temperaturą początkową ciała, natomiast t czasem obserwacji mierzonym od chwili, kiedy to ciało miało temperaturę T_p. Współczynnik A charakteryzuje warunki stygnięcia i zależy od stygnącego ciała i otoczenia.

Dla ciągu dokładnie znanych chwil czasu t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, zmierzono wartości $T_i \pm u_i$ temperatury wody stygnącej w naczyniu. Zaprojektuj kolejne kroki obliczeń pozwalające wyznaczyć oceny nieznanych wartości parametrów A i T_p, a także niepewności tych ocen. Sprowadź zagadnienie do wyznaczania parametrów zależności liniowej i wyprowadź niezbędne wzory. W celu uproszczenia zadania przyjmij, że temperatura otoczenia T_0 jest znana dokładnie (została zmierzona termometrem o istotnie większej precyzji, niż termometr, który posłużył do wyznaczania temperatury stygnącej wody) i nie ulega zmianie w trakcie trwania pomiarów.

***Wskazówka**:*

a) Zaproponuj postać transformacji sprawdzające wyrażenie (11) *do liniowej funkcji $\eta = ax + b$ pomocniczych parametrów a i b, w której η jest nową zmienną zależną, a x nową zmienną niezależną.*

b) Podaj związki łączące parametry A i T_p z parametrami a i b.

c) Przetłumacz niepewności u_i na niepewności w_i nowej zmiennej zależnej.

d) Sformułuj problem wyznaczania ocen nieznanych parametrów a i b linii prostej metodą najmniejszych kwadratów.

e) Wyprowadź wyrażenia na oceny parametrów a i b, ich niepewności u_a i u_b oraz ocenę c_{ab} kowariancji C_{ab} (wzory (6) *oraz* (7)) *wynikające z metody najmniejszych kwadratów.*

f) Przypuśćmy, że odchylenie standardowe σ_T pomiaru temperatury nie jest znane, a jedynie wiadomo, że jest ono takie samo dla wszystkich wartości temperatury. Na podstawie wielu wcześniejszych doświadczeń wiadomo, że wyrażenie (11) *poprawnie opisuje stygnięcie wody w warunkach tego konkretnego eksperymentu. Podaj wyrażenia na ocenę u odchylenia standardowego σ_T oraz niepewności u_a i u_b oraz ocenę c_{ab} kowariancji C_{ab}.*

Część II – kalibracja – odwrócenie roli zmiennych

Dobierając odpowiednią wartość oporności *R* dzielnika (wzór (4)) oczekujemy, że w otoczeniu punktu przegięcia wyznaczonego temperaturą t_0, napięcie *V* na termistorze z dobrym przybliżeniem spełnia zależność

$$U = ht + g$$

(wzór (3)). Celem drugiej części pomiarów jest wyznaczenie ocen parametrów *h* i *g*, które pozwolą określić temperaturę na podstawie zmierzonego napięcia *V* na termistorze, zgodnie ze wzorem (5):

$$t = HV + G, \quad H = \frac{1}{h}, \quad G = -\frac{g}{h}.$$

Opisana powyżej procedura nazywana jest kalibrowaniem przyrządu. Używając termistora jako termometru chcemy dodatkowo poznać dokładności pomiaru temperatury przy zadanej dokładności napięcia *V* w badanym przedziale temperatur. Zilustrujemy to rozwiązując poniższe zadania.

Zadanie** 9 (**na ćwiczeniach rachunkowych**) – **kalibracja: niepewności i kowariancje ocen

Pokaż, że dla dopasowanej zależność liniowej $U = ht + g$ między napięciem a temperaturą, a następnie jej odwróconej formy:

$$t = \frac{1}{h}V - \frac{g}{h} = HV + G, \quad H = \frac{1}{h}, \quad G = -\frac{g}{h},$$

niepewności u_H i u_G wielkości $\hat{H}$ i $\hat{G}$ oraz ocena c_{HG} ich kowariancji wynoszą:

$$u_H^2 = \frac{u_h^2}{\hat{h}^4}, \quad u_G^2 = \frac{\hat{g}^2}{\hat{h}^4}u_h^2 + \frac{1}{\hat{h}^2}u_g^2 - 2\frac{\hat{g}}{\hat{h}^3}c_{hg}, \quad c_{HG} = -\frac{\hat{g}}{\hat{h}^4}u_h^2 + \frac{1}{\hat{h}^3}c_{hg},$$

gdzie u_h i u_g to niepewności ocen $\hat{h}$ oraz $\hat{g}$ parametrów h oraz g, a wielkość c_{hg} to ocena kowariancji wielkości $\hat{h}$ oraz $\hat{g}$.

Zadanie** 10 (**na ćwiczeniach rachunkowych**) – **kalibracja: niepewność wielkości wyznaczanej

Dla ustalenia uwagi rozważmy relację U = ht + g między napięciem na termistorze a temperaturą. Dla serii znanych dokładnie n wartości temperatur t_i, i = 1, 2,.., *n, zmierzono wartości $V_i \pm u_i$ napięcia V. Na podstawie tych danych wyznaczono, metodą najmniejszych kwadratów, oceny $\hat{h}$ i $\hat{g}$ parametrów h, g oraz oceny u_h, u_g i c_{hg} odchyleń standardowych σ_h, σ_g i kowariancji C_{hg}. W dalszej pracy zamierzamy skorzystać z tych wyników w celu wyznaczenia oceny $\hat{t}$ temperatury na podstawie pojedynczej wartości $\hat{V}$ uzyskanej jako wynik pomiaru napięcia V, przy czym zakładamy, że wartość $\hat{V}$ uzyskano na drodze pomiaru* ***niezależnego*** *od pomiarów, które doprowadziły do wyznaczenia ocen parametrów h oraz g. Przyjmujemy też, że* *ocena odchylenia standardowego σ_V wartości $\hat{V}$, czyli niepewność oceny $\hat{V}$ wynosi u_V. Dla zależności $U = ht + g$ mamy relacje odwrotną: $t = HV + G$, gdzie $H = 1/h$ oraz $G = -g/h$ i ocenę $\hat{t}$ temperatury wyznaczymy ze związku*

$$\hat{t} = \hat{H}\hat{V} + \hat{G}, \quad \hat{H} = \frac{1}{\hat{h}}, \quad \hat{G} = -\frac{\hat{g}}{\hat{h}}.$$

Pokaż, że niepewność u_t^2 tak wyznaczonej oceny temperatury wynosi:

$$u_t^2 = \hat{H}^2 u_V^2 + \hat{V}^2 u_H^2 + u_G^2 + 2\hat{V} c_{HG}. \tag{12}$$

Jeśli wrócimy do pierwotnych parametrów h oraz g, to związek ten przybierze kształt:

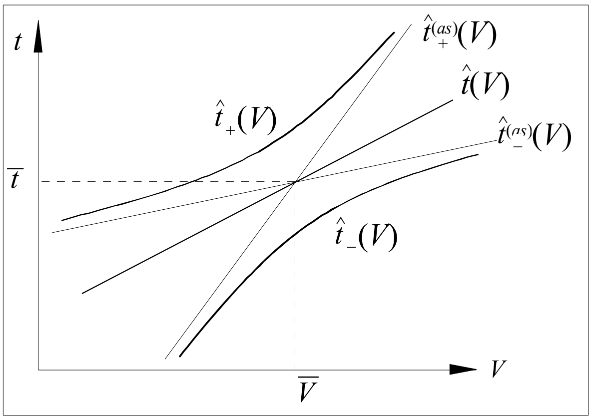
$$u_t^2 = \frac{1}{\hat{h}^2} u_V^2 + \frac{\left(V - \hat{g}\right)^2}{\hat{h}^4} u_h^2 + \frac{1}{\hat{h}^2} u_g^2 + 2\frac{V - \hat{g}}{\hat{h}^3} c_{hg} = \frac{1}{\hat{h}^2}\left(u_V^2 + \hat{t}^2 u_h^2 + u_g^2 + 2\hat{t} c_{hg}\right). \tag{13}$$

Zadanie* 11 (*na ćwiczeniach rachunkowych*) *– interpolacja

Dla ustalonej wartości napięcia V otrzymujemy najlepszą ocenę $\hat{t} = \hat{H}V + \hat{G}$ temperatury wraz z dwiema ograniczającymi ją wartościami: $\hat{t}_\pm = \hat{H}V + \hat{G} \pm u_t$ wyznaczającymi tzw. ***przedział ufności*** *na poziomie jednej niepewności standardowej. Gdy będziemy zmieniać wartość napięcia V, wartości graniczne wyznaczą dwie hiperbole o równaniach*

$$\hat{t}_\pm\left(V\right) = \hat{H}V + \hat{G} \pm \sqrt{\hat{H}^2 u_V^2 + V^2 u_H^2 + u_G^2 + 2V c_{HG}} \tag{14}$$

okalające prostą $\hat{t}(V) = \hat{H}V + \hat{G}$ na wykresie zależności temperatury od napięcia. Hiperbole te określają tzw. ***pasmo niepewności*** *odpowiadający jednej niepewności standardowej temperatury $t(V)$, w wybranym zakresie wartości argumentu V, jak ilustruje to, w sposób przesadny, Rysunek* 4.



Rys. 4. Pasmo ufności wokół prostej

a) *Po wyznaczeniu ocen parametrów H oraz G, do dobrej praktyki należy przedstawienie wizualnej oceny zgodności dopasowanej prostej z danymi. Dokonujemy tego na wykresie reszt $\varepsilon_i = t_i - t(V_i)$, czyli różnic między zmierzonymi temperaturami t_i i wyznaczonymi z zależności $t\left(V_i\right) = \hat{H}V_i + \hat{G}$, jako funkcji napięcia, na którym punkty danych powinny być rozrzucone losowo wokół zera. Wszelki regularny wzór tych punktów może sugerować niewłaściwy wybór dopasowywanej zależności.*
b) *Wykres reszt jest także dobrym miejscem do ukazania hiperbol wyznaczających pasmo niepewności. Wynika to z faktu, iż, z reguły, pasmo to wąsko otacza dopasowaną linię prostą i znacznie lepiej widoczny jest jego przebieg właśnie na wykresie reszt. Pokaż, że pasmo takie wyznaczone jest przez krzywe* (14) *odpowiadające jednej niepewności standardowej u_t zadanej wzorem* (12), *w górę i w dół od zera. Zazwyczaj wygodniej jest przedstawić zarówno reszty jak i pasmo niepewności na wykresie, na którym na osi odciętych odkładamy oryginalną zmienna niezależną, w tym przypadku temperaturę, a więc wykorzystujemy wzór* (13). *Pozwala to łatwo zobaczyć jakość pomiaru* (*temperatury*) *w punkcie, w którym tę jakość chcemy ocenić, bez potrzeby przechodzenia przez wyznaczanie wartości wielkości mierzonej* (*napięcia*).
c) *Dla kompletu informacji ukazanej na rysunku pokaż, że asymptoty hiperbol mają równania:*

$$\hat{t}_\pm^{(as)}\left(V\right) = \left(\hat{H} \pm u_H\right)V + \hat{G} \pm \frac{c_{HG}}{u_H}$$

i przecinają się punkcie o współrzędnych

$$V_\times = -\frac{c_{HG}}{u_H^2} = -\overline{V}, \quad t_\times = -\frac{c_{hg}}{u_h^2} = -\overline{t},$$

gdzie $\overline{V}$ *i* $\overline{t}$ *to średnie arytmetyczne, a punkt ten leży na prostej* $\hat{t} = \hat{H}V + \hat{G}$.

Zadanie* 12 (*na ćwiczeniach, jeśli wystarczy czasu*) – *wpływ niestabilności zasilacza

Rozważmy wpływ braku stabilności działania zasilacza na dokładność pomiarów temperatury za pomocą termistora w układzie dzielnika napięcia. W tym celu przyjmijmy, że znamy dokładnie parametry B oraz r_∞ *termistora, oporność R opornika wzorcowego w dzielniku napięcia, a jedynym źródłem błędu w pomiarze jest brak stabilności zasilacza. Jak duża musiałaby być względna zmiana* $\Delta E/E$ *napięcia na zasilaczu, aby zaznaczyła się ona odchyleniem wartości temperatury od jej wartości dokładnej o* 0,1°C? *Aby nabrać orientacji co do rozmiaru tego efektu, skorzystaj z szacunkowych ocen parametrów termistora i zmierzonej wartości R referencyjnego opornika, wyznacz wartość* $\Delta E/E$ *dla temperatury* t_0 *i porównaj ją z analogiczna wartością wynikającą z procentowej dokładności miernika Brymen* (*Tabela* 1) *na wybranym zakresie pomiarowym. Gdyby niestabilność zasilacza była nietolerowalnie duża i nie było możliwości powtórzenia pomiarów ze sprawnym zasilaczem, to w jaki sposób należałoby uwzględnić ten efekt?*

***Zadanie* 13 (*do domu dla treningu*)**

Pokaż, że obie krzywe wyrażone związkiem (14) *to istotnie są hiperbole.*

***Zadanie* 14 (*do domu dla treningu*)**

Wskazane jest aby zawsze, po wykonaniu dopasowania zależności $\eta(x) = ax + b$, *przedstawić reszty* $\varepsilon_i = y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}$, *gdzie wielkości* y_i *to uzyskane wartości wielkości* η *w punkcie* x_i. *Pokaż, że niepewność takiej reszty wynosi:*

$$u_\varepsilon^2 = u_y^2 + x^2 u_a^2 + u_b^2 + 2xc_{ab} .$$

W szczególności, w przypadku reszt $\varepsilon_i = V_i - U\left(t_i\right) = V_i - \hat{h}t_i - \hat{g}$ *z dopasowania napięcia na termistorze, niepewność ta to:*

$$u_\varepsilon^2 = u_V^2 + t^2 u_h^2 + u_g^2 + 2tc_{hg} .$$

***Zadanie* 15 (*do domu dla treningu*)**

Jeśli do interpolacji wykorzystujemy prostą dopasowaną metodą najmniejszych kwadratów, to dla jakiej wartości zmiennej znanej dokładnie (kontrolowanej) otrzymujemy najmniejszą niepewność wielkości interpolowanej?

***Zadanie* 16 (*do domu dla treningu*)**

Dwaj studenci otrzymali zadanie pomiaru masy dwóch ciał za pomocą szalkowej wagi laboratoryjnej, wyposażonej w komplet odważników, z których najmniejszy miał masę Δ = 1 g. *Student A zmierzył masę każdego z ciał bezpośrednio tj. kładąc każde z nich oddzielnie na jedną szalkę, a odważniki na drugą. Student B natomiast, najpierw zmierzył sumę mas obu ciał łącznie, a następnie położył jedno ciało na jednej szalce, a drugie na drugiej szalce i wyrównał wagę dokładając odpowiednie odważniki na tej szalce, na której leżało ciało o mniejszej masie. Układając stosowne równania, student B mógł obliczyć masę każdego z ciał. Jaką dokładność pomiaru masy każdego z ciał uzyskali studenci? Ile wynosi współczynnik korelacji między wartościami mas uzyskanymi przez każdego studenta w ich własnym pomiarze?*

***Zadanie* 17 (*do domu dla treningu*)**

Wykorzystaj swoje dane dotyczące pomiaru okresu drgań wahadła w zależności od wysokości kuli wahadła na podłogą uzyskane przy wykonywaniu pomiarów w Ćwiczeniu 1 *i wyznacz oceny, wraz z ich niepewnościami i współczynnikiem korelacji, przyspieszenia ziemskiego oraz wysokości pomieszczenia, w którym wykonywane były pomiary.*

***Zadanie* 18 (*do domu dla treningu*)**

Dla n wartościach zmiennej kontrolowanej x_i, *dysponujemy serią n wartości* y_i, *z odchyleniami standardowymi* σ_i, *pomiarów wielkości* η, *przy czym wiemy, że* η *i x związane są zależnością proporcjonalną* $\eta = \theta x$.

- *Dla każdej pary* (x_i, y_i) *możemy utworzyć ocenę parametru* θ *w formie:* $\theta_i = y_i/x_i$, *a z tych ocen* *zbudować średnią arytmetyczną* $\overline{\theta}$. *Znajdź wariancję takiej oceny.*

- *Wyznacz niepewności wielkości* θ_i *i oblicz ich średnia ważoną* θ_w *i jej niepewność wewnetrzną.*
- *Porównaj uzyskane wzory z wyrażeniami wynikającymi z metody najmniejszych kwadratów. Którą z ocen:* $\overline{\theta}$ *czy* θ_w *wybierzesz*?

***Zadanie* 19 (*do domu dla treningu*)**

Wiadomo, że zależność między wielkościami η *i x jest liniowa. Dla ciągu znanych dokładnie wartości* x_i, $i = 1, 2,.., n$, *z pomiaru uzyskano wartości* y_i *wielkości* η, *przy czym odchylenie standardowe wyniku pomiaru o numerze i wynosi* σ_i .*Pokaż bezpośrednim rachunkiem, że jeśli relację między wielkościami* η *oraz x przedstawić w postaci* $\eta = a\left(x - \overline{x}_w\right) + b$, *gdzie*

$$\overline{x}_w = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2} ,$$

to kowariancja $C_{ab} = 0$ (*mówimy wtedy, że oceny parametrów a oraz b są nieskorelowane*).

***Zadanie* 20 (*do domu dla treningu*)**

Dana jest próbka licząca n par (x_i, y_i) *kontrolowanych wartości* x_i *znanych ściśle oraz zmierzonych wartości* y_i, *o znanych dyspersjach* σ_i, *będących nieobciążonymi ocenami wielkości* $\eta_i = ax_i$. *Niech liniowy, w zmiennych* y_i, *estymator* $\hat{a}$ *parametru a ma postać*

$$\hat{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i ,$$

gdzie α_i *to nieznane, stałe współczynniki. Dobierz te współczynniki tak, aby estymator ten miał minimalną wariancję i był nieobciążony. Pokaż, że tak otrzymany estymator jest tożsamy z estymatorem metody najmniejszych kwadratów. Przyjmij, że zmienne* y_i *są statystycznie niezależne.*

RAPORT KOŃCOWY

Wyniki pomiarów, w postaci pliku tekstowego, pliku do programu Excel pakietu MS Office lub pliku do programu Calc pakietu Libre/Open Office należy przesłać e-mailem prowadzącemu zajęcia ***niezwłocznie*** *po złożeniu raportu. Raport będzie czekał na sprawdzenie, aż to uczynisz.*

Pisanie raportu rozpocznij od ponownego przeczytania, w instrukcji do Ćwiczenia 1, *uwag o tym, jak należy sporządzać raport.*

Raport, napisany zgodnie z ogólnymi zasadami wyszczególnionymi w instrukcji do Ćwiczenia 1, powinien zawierać następujące elementy:

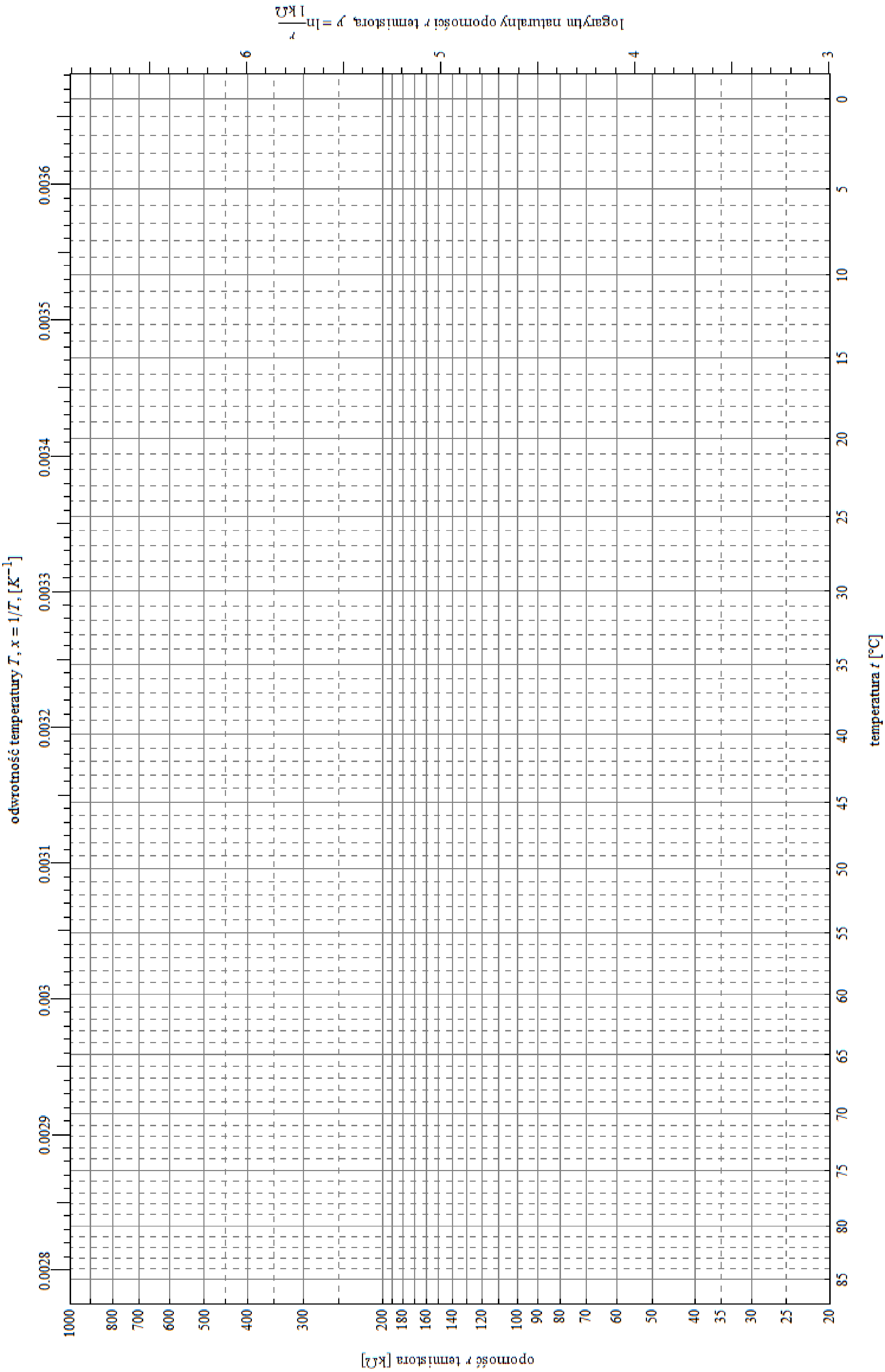
1. numer termistora będącego przedmiotem doświadczenia;
2. definicję transformacji zmiennych, w których zmierzona zależność oporności od temperatury przyjmuje postać liniowej funkcji poszukiwanych parametrów,
3. przy wyznaczeniu metodą najmniejszych kwadratów ocen wartości parametrów otrzymanej zależności liniowej, podaj postać minimalizowanej funkcji i jasno zdefiniuj wszystkie występujące w niej wielkości; w analizie przyjmij, że temperatura mierzona wzorcowym termometrem znana jest dokładnie, a wszystkie pomiary oporu mają tę samą, nieznaną, wartość niepewności u_r lub tę samą, nieznaną, wartość $u_{\ln}$ niepewności logarytmu oporności i wyznacz je z rozrzutu punktów wokół otrzymanej prostej (patrz **Wykład** i **Ćwiczenie 4**); podaj wartość u_r lub $u_{\ln}$, a stąd wartości ocen parametrów r_∞ i B termistora (wzór (1)) oraz ich niepewności wraz z oceną ich kowariancją; alternatywnie, przy dopasowywaniu skorzystaj z informacji zawartej w Tabeli 1 o dokładności miernika Brymen jako omomierza, w tym drugim przypadku podaj liczbę stopni swobody i wartość minimalnej sumy kwadratów, a także *jakościową* ocenę zgodności krzywej modelowej z danymi – nie przeprowadzaj testu χ^2,
4. Wykres zmierzonej zależności oporu termistora od temperatury (**Wykonanie pomiarów – część I**) wraz z krzywą daną wzorem (1) i wyznaczoną na podstawie ocen wartości parametrów uzyskanych w punkcie 3 niniejszego wyliczenia; **na wykresie temperaturę przedstaw w skali Celsjusza i tylko tą skalą posługuj się w całej dalszej graficznej prezentacji wyników**,

5. optymalną, dla temperatury $t_0 = 65°C$, ocenę oporu referencyjnego R (wzór (4)) w dzielniku napięcia, wraz z niepewnością tej oceny,
6. zmierzoną wartość R opornika wybranego z dostępnego zestawu i zastosowanego jako opór referencyjny w dzielniku napięcia oraz odpowiadającą temu opornikowi temperaturę t_0,
7. wybrane napięcie zasilania dzielnika,
8. wykres zmierzonej zależności napięcia V na termistorze od temperatury t wyrażonej w stopniach Celsjusza (**Wykonanie pomiarów – część II**),
9. zastosuj metodę najmniejszych kwadratów – podaj postać minimalizowanej funkcji i jasno zdefiniuj wszystkie występujące w niej wielkości – do oceny parametrów h i g zależności $U = ht + g$ (związek (3)), a także niepewności ocen tych parametrów i oceny ich kowariancji; w obliczeniach przyjmij, że temperatura jest znana dokładnie, a wszystkie niepewności pomiaru napięcia mają tę samą wartość u_V; wyznacz ją z rozrzutu punktów wokół otrzymanej prostej i podaj jej wartość; alternatywnie, przy dopasowywaniu parametrów linii prostej skorzystaj z informacji zawartej w Tabeli 1 o dokładności miernika Brymen jako woltomierza; w tym drugim przypadku podaj wartość minimalnej sumy kwadratów i liczbę stopni swobody, a także konkluzję testu χ^2 zgodności zależności modelowej z danymi,
10. dopasowaną prostą naniesioną na wykres z punktu 8 powyżej,
11. wykres reszt $\varepsilon_i = V_i - \hat{U}_i$, tj. różnic między zmierzoną wartością V_i napięcia a wartością $\hat{U}_i = \hat{h}t_i + \hat{g}$ uzyskaną z dopasowanej zależności dla temperatury t_i, jako funkcję temperatury,
12. oceny $\hat{H}$ i $\hat{G}$ parametrów H i G w zależność (5) wraz z ich niepewnościami i oceną kowariancji,
13. wyznaczoną na podstawie zależności (5) wartość temperatury (w stopniach Celsjusza) wraz z jej niepewnością dla arbitralnie wybranej przez Ciebie, przykładowej wartości V napięcia *różnej* od wartości uzyskanych w procesie kalibracji termistora; przyjmij, że wartość niepewności mierzonego napięcia jest równa niepewności u_V uzyskanej w punkcie 9 powyżej, ale jeśli wykorzystywana była Tabela 1 do wyznaczania niepewności napięcia, skorzystaj z dopuszczalnej wartości błędu odczytu podanego w tej Tabeli dla wybranego napięcia,
14. podsumowanie informacji dla przyszłego użytkownika zbudowanego termometru (termistor w układzie dzielnika napięcia z zadanym napięciem zasilającym) w postaci:
    a) wykresu reszt $\delta_i = t_i - t(V_i) = t_i - HV_i - G$ jako funkcję temperatury t dla indeksu $i = 1, 2, ..., n$, numerującego pary wartości (V_i, t_i) zmierzone jak opisano to w **Wykonanie pomiarów – część II**,
    b) naniesionych na tym wykresie hiperbol (14) wyznaczających odchylenia temperatury (w stopniach Celsjusza) o jedną niepewność u_t od obliczonej temperatury $t(V)$,
    c) dyskusji dokładności wskazań przyrządu w zależności od dopuszczalnego przedziału zmienności temperatury t.

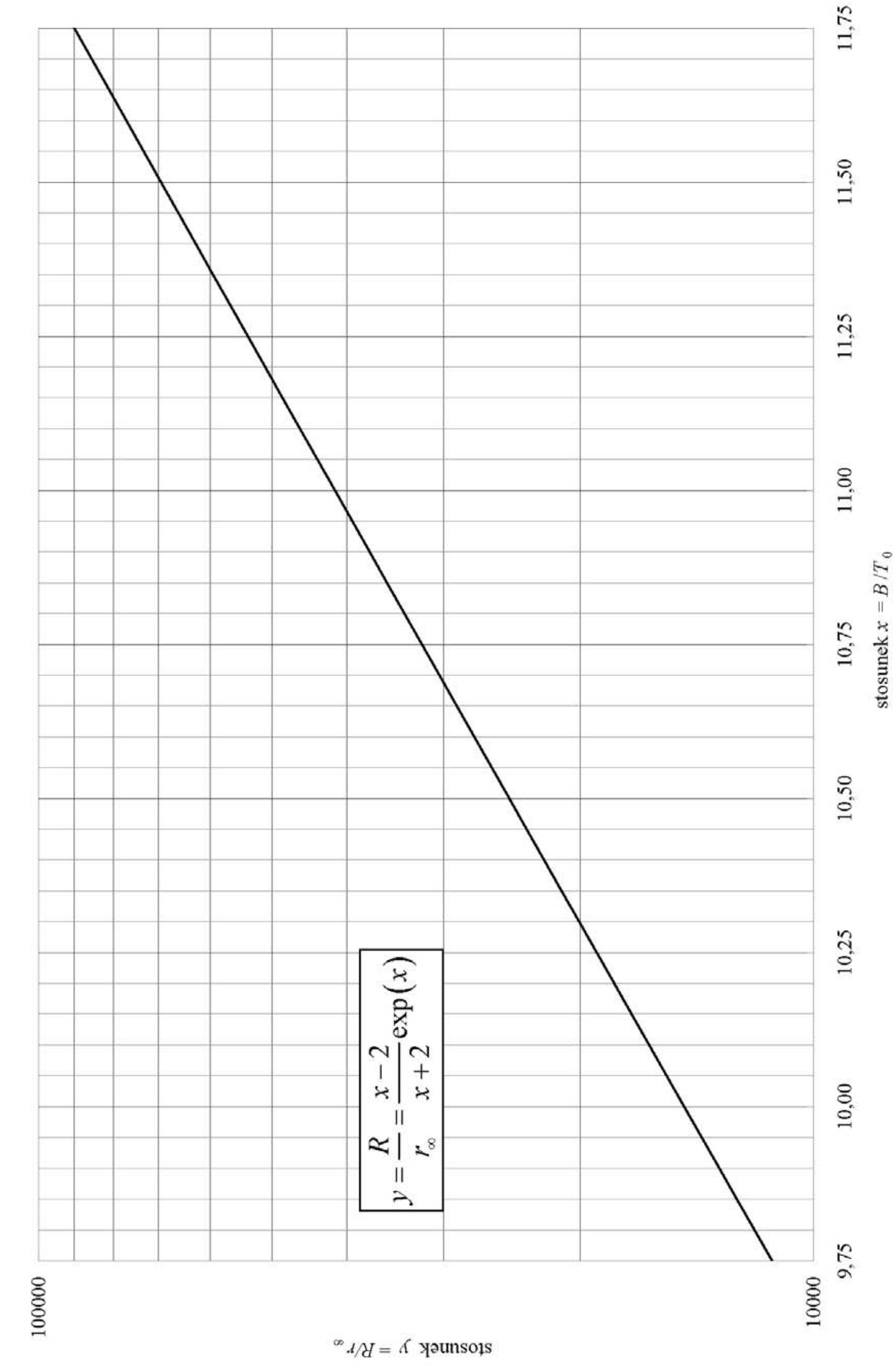
Raport końcowy powinien zawierać wszystkie surowe wyniki pomiarów, aby można było, bez odwoływania się do oryginalnych zapisków sporządzonych w trakcie wykonywani doświadczenia, powtórzyć wszystkie obliczenia i sprawdzić ich poprawność.

Raport należy oddać, wraz z ostemplowanym arkuszem otrzymanym przy przystępowaniu do części pomiarowej, w sekretariacie Pracowni w terminie następnych zajęć, po zakończeniu ćwiczeń rachunkowych do niniejszego doświadczenia. W raporcie możesz wykorzystać jedynie własne dane.

Raport nie może uzyskać pozytywnej oceny końcowej, jeśli choć jedna z wartości liczbowych jest błędna z powodu błędów rachunkowych bądź wyboru błędnej metody analizy!



Rys. 4. Zależność oporu r termistora od temperatury t



Rys. 5. Stosunek R/r_∞ oporu R referencyjnego dzielnika do wartości parametru r_∞ jako funkcja stosunku B/T_0