Ćwiczenie nr 4 – WYZNACZANIE MOMENTU BEZWŁADNOŚCI WALCA

Instrukcja dla studenta (wersja z dnia 20 VI 2018)

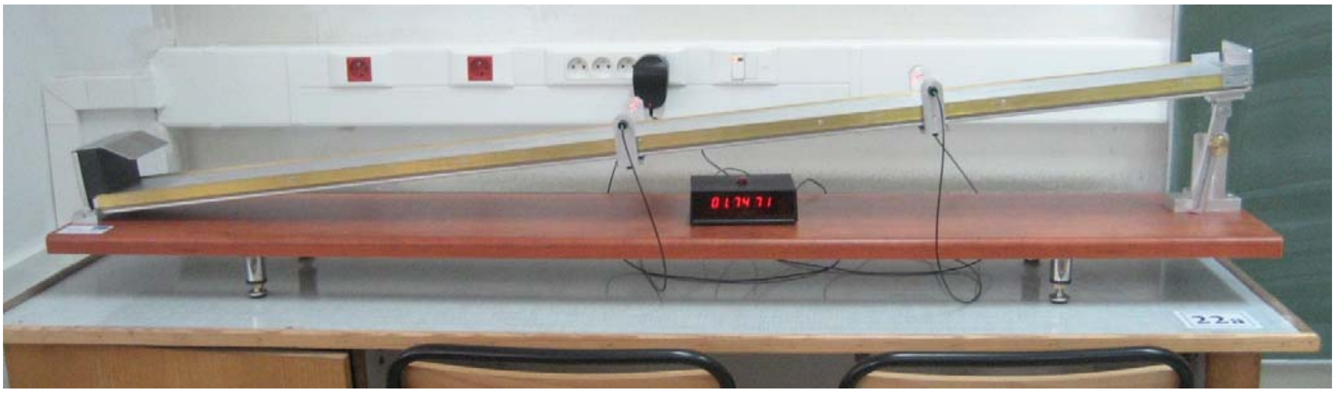
A. Majhofer i R. Nowak

WYMAGANIA TEORETYCZNE

- Newtona równania ruchu bryły sztywnej.
- Średnia ważona, niepewność zewnętrzna i wewnętrzna, spójność danych.
- Definicja zmiennej χ^2.
- Sformułowanie metody najmniejszych kwadratów w przypadku znanych odchyleń standardowych oraz w przypadku nieznanych, ale identycznych.
- Wartość oczekiwana i wariancja kombinacji liniowej statystycznie niezależnych zmiennych losowych.
- Pearsona test χ^2 zgodności modelowej zależności matematycznej i modelowego rozkładu z danymi doświadczalnymi.

WSTĘP

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie momentu bezwładności bryły o kształcie zbliżonym do walca (pełnego lub wydrążonego). Pomiary pozwalają na wyznaczenie momentu bezwładności walca na dwa sposoby. Pierwszy sposób opiera się o pomiary zależności położenia walca od czasu podczas staczania go z równi pochyłej o znanym kącie nachylenia i wyznaczenie jego przyspieszenia a stąd momentu bezwładności. Drugi natomiast polega na zmierzeniu wymiarów walca i skorzystaniu z teoretycznej zależności określającej moment bezwładności. Jak zwykle, poza samą wartością badanej wielkości, ustalimy także, jak dokładnie tę wartość zmierzyliśmy. Układ doświadczalny wykorzystywany w ćwiczeniu prezentuj fotografia na Rys. 1.



Rys.1. Widok układu pomiarowego (fot. T. Nowak)

Pomiary wykonują dwie osoby, wykorzystując do tego celu jedną równię, ale każda z osób wyznacza moment bezwładności przydzielonego jej walca.

Przyspieszenia a walca, o momencie bezwładności I (względem osi symetrii) i zewnętrznym promieniu R, podczas staczania się bez poślizgu z równi pochyłej o kącie nachylenia α wynosi

$$a = \frac{mgR^2 \sin\alpha}{mR^2 + I}, \qquad (1)$$

gdzie m jest masą walca, a g przyspieszeniem ziemskim. Nadając wyrażeniu na moment bezwładności postać $I = \beta mR^2$, uzyskujemy

$$a = \frac{g \sin\alpha}{1+\beta}.$$

W tym ćwiczeniu, w zakresie analizy danych, poznamy metodę najmniejszych kwadratów w zastosowaniu do wyznaczanie ocen parametrów zależności liniowej i niepewności tych ocen. Poznamy także test χ^2 zgodności postulowanej zależności funkcyjnej lub kształtu rozkładu prawdopodobieństwa z danymi.

***Zadanie* 1 (*do domu – do wykonania przed przystąpieniem do pomiarów*)**

a) *Wyprowadź równanie* (1).

b) *Wyprowadź wzór na współczynnik β zdefiniowany związkiem $I = \beta m R^2$ dla jednorodnej powłoki walcowej o masie m, promieniu zewnętrznym R i wewnętrznym r. Ile ten współczynnik wynosi dla walca pełnego*?

c) *Niech symbol a oznacza długość podstawy równi, b jej wysokość, c jej długość, natomiast α jej kąt nachylenia. Funkcję* $\sin\alpha$ *można wyznaczyć na trzy sposoby:*

$$\sin\alpha = \frac{b}{c}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

mierząc dwie: (*b,c*), (*a,c*) *lub* (*a,b*) *z trzech wielkości. Przypuśćmy, że każdą z długości a, b i c mierzymy z taką samą niepewnością standardową u. Czy któraś z tych metod jest najlepsza, tj. pozwoli wyznaczyć niepewność funkcji* $\sin\alpha$ *z najmniejszą niepewnością*?

POMIARY

Masz do dyspozycji

- walec z metalu;
- suwmiarkę pozwalającą na odczyt długości z dokładnością do 0,01 mm;
- taśmę mierniczą pozwalającą na odczyt długości z dokładnością do 1 mm;
- równię pochyłą o regulowanym (w niewielkim zakresie) kącie nachylenia; do równi przymocowane są dwie fotokomórki, które można wzdłuż niej przesuwać; walec, staczając się z równi i przysłaniając pierwszą z nich powoduje uruchomienie pomiaru czasu, a gdy dotrze do drugiej i ją przysłoni, stosowany układ elektroniczny zatrzymuje zegar i wyświetla, z dokładnością do 0,0001 s, czas ruchu walca między tymi dwiema fotokomórkami.

Wykonanie pomiarów

Podczas wykonywania pomiarów pamiętaj o szczegółowej dokumentacji, tj. o notowaniu wszystkich informacji mogących mieć znaczenie podczas analizowania uzyskanych wyników.

- Wytrzyj dokładnie ręcznikiem papierowym powierzchnię równi.
- Wypoziomuj podstawę równi.
- Sprawdź, czy walec nie blokuje się na szczycie równi – walec przyciśnięty do listwy na szczycie równi powinien sam ruszać swobodnie, bez popychania. Gdy tak nie jest, poproś asystenta prowadzącego ćwiczenie o inny walec.
- Przy każdym z nachyleń równi do poziomu zmierz wszystkie niezbędne wielkości, które pozwolą Ci wyznaczyć kąt nachylenia równi lub wybraną funkcję tego kąta.
- Oceń dokładność pomiaru odległości *L* między fotokomórkami biorąc pod uwagę ich rozmiary, luzy umocowań i dokładność taśmy mierniczej.
- Zmierz wszystkie niezbędne wymiary walca.
- Wytrzyj dokładnie ręcznikiem papierowym walec jak również równię i powtarzaj tę czynność za każdym razem przed rozpoczęciem serii pomiarów przy nowej odległości miedzy fotokomórkami.
- Przy ustalonej odległości między fotokomórkami, wykonaj 10 pomiarów czasu *t* staczania walca między nimi. Powtarzaj pomiar dla różnych, łącznie przynajmniej siedmiu, odległości *L* między fotokomórkami. Zacznij od odległości około 10 cm – 15 cm. Fotokomórkę rozpoczynającą pomiar czasu ustaw w odległości 10 cm – 15 cm od początku równi i zmieniaj jedynie położenie fotokomórki kończącej czas pomiaru. Pomiary wykonaj dla dwóch różnych nachyleń równi.

Niezwykle istotnym jest, aby w momencie, kiedy uwalniamy walec i pozwalamy mu na staczanie się, przylegał on całą swoją długością do ograniczenia na szczycie równi. Gdy o to nie zadbamy, walec będzie staczał się pod katem do kierunku w dół wzdłuż równi i wkrótce, natrafiwszy w swym ruch na boczne krawędzie równi, będzie się o nie obijał. Spowolni to jego ruch i doprowadzi, w oczywisty sposób, do błędnej wartości oceny momentu bezwładności. Aby tego uniknąć, należy stanąć na przedłużeniu równi, twarzą do jej szczytu. Walec należy dociskać w połowie jego długości do blokady jednym palcem i gdy jesteśmy gotowi do pomiaru, usunąć go zdecydowanym ruchem, bez poślizgu wzdłuż walca. Każdy pomiar, w którym dostrzeżemy uderzenie walca w boczną krawędź równi nim minie on dolną fotokomórkę, należy powtórzyć. W celu zminimalizowania groźby takich błędów, dolną fotokomórkę nie należy ustawiać dalej niż 1 m od szczytu równi.

Gdy walec minie fotokomórkę zatrzymującą pomiar czasu postaraj się go złapać – nie pozwalaj na to, by walec po stoczeniu się dół uderzał o ograniczenie na dole równi. Powoduje to drgania całej równi, które mogą doprowadzić do przesunięć fotokomórek.

Gdy pomiar wykonywany jest w parach, to jedna osoba uruchamia walec, a druga obsługuje zegar i zapisuje zmierzony czas. Tak zebrane dane należą do osoby, która uruchamia walec.

ANALIZA DANYCH

Na stronie, z której pobrałaś/pobrałeś niniejszą Instrukcję, znajduje się arkusz kalkulacyjny do programu Calc pakietu Libre Office/Open Office przygotowany do wykonania obliczeń będących przedmiotem poniższych zadań. Arkusz ten lub równoważny będzie niezbędny podczas ćwiczeń rachunkowych i może być pomocny podczas przygotowywania raportu końcowego. Jeśli masz własny komputer, możesz z nim przyjść na ćwiczenia rachunkowe, w przeciwnym przypadku będzie można skorzystać z jednego z komputerów na Pracowni. Pamiętaj jednak, że na Pracowni nie ma dostępu do internetu, więc arkusz kalkulacyjny musisz przynieść na zajęcia na urządzeniu pamięci zewnętrznej (*typu pen-drive, do wypożyczenia w sekretariacie Pracowni*).

***Zadanie* 2 (*obowiązkowe do domu – do wykonaniu przed ćwiczeniami rachunkowymi*)**
Uzupełnij w arkuszu wszystkie brakujące dane. Jeśli uznasz to wygodnym, przepisz je do instrukcji.
- *Wykonaj punkt a) w **Zadaniu 5**.*
- *Wykonaj punkt c) oraz d) w **Zadaniu 6**.*

W niniejszym ćwiczeniu zajmujemy się zagadnieniami, których wspólnym mianownikiem jest suma kwadratów reszt i zastosowaniu tego podejścia do oceny wielkości fizycznej metodą średniej ważonej, ocen parametrów linii prostej metodą najmniejszych kwadratów i zagadnieniem testów statystycznych opierających się na rozkładzie χ^2. Głównym celem zadań rachunkowych rozważanych poniżej jest opanowanie związanych z tym technik rachunkowych. Głębszy wgląd w teoretyczne aspekty metody najmniejszych kwadratów pojawi się w następnym ćwiczeniu. Przykłady liczbowe bierzemy z Ćwiczeń 1 i 2. Celowo nie odwołujemy się do danych uzyskanych w części pomiarowej obecnego ćwiczenia, gdyż w obecnym ćwiczeniu wybór właściwej metody analizy danych pozostawiamy Tobie, a ćwiczenia rachunkowe mają Ci w tym wyborze dopomóc. Trafność tego wyboru będzie ocenianą częścią raportu końcowego.

ŚREDNIA WAŻONA

***Zadanie* 3 (*na ćwiczeniach*)**

Tabela 1 *podaje wyniki pomiaru gęstości* (*Ćwiczenie* 2) *uzyskane przez autorów instrukcji. Posługując się średnią ważoną, wyznacz najlepszą ocenę gęstości i niepewność tej oceny. Skąd biorą się te wzory? Skorzystaj z arkusza kalkulacyjnego i odwzorowanej tam Tabeli* 1.

Tabela 1. Wyznaczanie średniej ważonej

metoda	ρ_i [g/cm^3]	u_i [g/cm^3]	$1/u_i^2$ [cm^6/g^2]	ρ_i/u_i^2 [cm^3/g]	$\rho_i-\bar{\rho}_w$ [g/cm^3]	$(\rho_i-\bar{\rho}_w)^2$ [g^2/cm^6]	$\frac{(\rho_i-\bar{\rho}_w)^2}{u_i^2}$
A	2,6776	0,0075	17777,7778	47601,78			
B	2,6966	0,0612	266,9913	719,97			
C	2,68667	0,00140	510204,0816	1370750,00			
		suma =	528248,8507	1419071,75		suma = χ_0^2 =	
		u_{int} =			= $\bar{\rho}_w$	u_{ext} =	

Przypominamy niezbędne wzory. Jeżeli ta sama wielkość została zmierzona N niezależnymi metodami i otrzymano N wartości x_i wraz z niepewnościami u_i, to najlepszą oceną poszukiwanej wielkości jest $\overline{x}_w$, a za oceny niepewności przyjmujemy większą z wartości u_{int} i u_{ext}, gdzie:

$$\overline{x}_w = u_{int}^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{u_i^2}, \quad u_{int}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{u_i^2}}, \quad u_{ext}^2 = \frac{u_{int}^2}{N-1}\chi_0^2, \quad \chi_0^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i - \overline{x}_w}{u_i} \right)^2 .$$

Dyskusja wyboru niepewności zostanie przeprowadzona na wykładzie.

***Zadanie* 4 (*do domu – dla treningu*)**

Pewien teoretyczny model głosi, że dwa parametry: a oraz b uważane dotychczas za niezależne i służące do opisu klasy zjawisk, których tenże model ma jakoby dotyczyć, mają tą samą wartość. W celu sprawdzenia modelu wykonano eksperyment i w dwu niezależnych pomiarach znaleziono wartości parametrów: $a = 1{,}0 \pm 0{,}4$ *oraz* $b = 2{,}3 \pm 0{,}3$. *Co możesz powiedzieć na temat słuszności modelu, przyjmując, że każdy z pomiarów opisany jest rozkładem normalnym? Jeśli uznasz słuszność modelu, jak wyznaczysz najlepszą eksperymentalną wartość postulowanego parametru i jego niepewność?*

METODA NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW I TEST χ^2 ZGODNOŚCI DOPASOWANIA

Jeden z przykładów zastosowania metody najmniejszych kwadratów napotykamy, gdy wyznaczamy krzywą kalibrującą układu pomiarowego, kiedy to wzorcujemy nasz układ, badając jego odpowiedź na dokładnie znany bodziec. Odpowiada to sytuacji, w której dla dokładnie znanej wartości zmiennej niezależnej x_i, wykonywany jest pomiar zmiennej zależnej $\eta_i = ax_i + b$, w którego wyniku otrzymujemy wartość y_i z niepewnością u_i (***Zadanie* 5**). W praktyce najczęściej spotykamy jednak problemy, w których obie wartości: x_i oraz y_i są wyznaczane z niepewnościami. Aby wtedy zastosować omawiany w niniejszym ćwiczeniu wariant metody najmniejszych kwadratów, za zmienną niezależną przyjmujemy wielkość znaną dokładniej (***Zadanie* 6**).

***Zadanie* 5 (*na ćwiczeniach*)**

W Tabeli 2 *podane są wyniki pomiarów wydłużenia sprężyny pod wpływem zawieszanych na niej ciężarków. Masy ciężarków znane są bardzo dokładnie, a wydłużenie mierzone było taśmą stalową z podziałką milimetrową. Prawo Hooke'a przewiduje, że wydłużenie sprężyny jest proporcjonalne do działającej siły, a więc w naszym przypadku do masy zawieszonych ciężarków.*

Tabela 2. Wyniki pomiarów wydłużenia sprężyny

masa m_i [g]	65,21	118,47	171,59	224,75	278,07
wydłużenie L_i [mm]	138	253	365	479	592

***Uwaga**: Informacja o dokładności pomiaru L* (*taśma z podziałką milimetrową*) *tej samej dla wszystkich punktów, wyznacza ocenę wkładu dokładności przyrządu do niepewności pomiaru. W poniższej analizie ocenimy niepewności standardowej pomiaru wydłużenia na podstawie rozrzutu s* (*patrz niżej*) *punktów wokół dopasowywanej zależności funkcyjnej, której postać* (*liniowy charakter*) *uznajemy za ścisłą. Uzyskaną wartość niepewności należy porównać z wkładem od dokładności przyrządu.*

a) *Narysuj <u>na papierze milimetrowym</u> wykres danych z Tabeli* 2 *na papierze. Sprawdź, za pomocą linijki, czy dane układają się na linii prostej, a jeśli tak, to wyznacz oceny parametrów tej prostej z wykresu.*
b) *Ponieważ nie wiadomo na ile ściśle podane wydłużenia odnoszą się do pomiarów od długości swobodnej sprężyny, przyjmij, że poszukiwana zależność między długością sprężyny a zawieszoną na niej masą ma postać* $L = am + b$. *Załóż też, że wszystkie wartości mas, jako wartości wzorcowe, znane są dokładnie, a pomiary wydłużenia wykonano z takim samym, nieznanym, odchyleniem standardowym* σ. *Sformułuj zagadnienie wyznaczenia ocen nieznanych*

współczynników a i b metodą najmniejszych kwadratów: podaj postać wyrażenia, które ma osiągnąć minimalną wartość i wyjaśnij względem jakich wielkości ma być ono minimalizowane.

c) *Wyznacz oceny $\hat{a}$ i $\hat{b}$ parametrów a i b oraz niepewności tych ocen. Skorzystaj z arkusza kalkulacyjnego i odwzorowanej tam Tabeli* 3. *Dla przypomnienia podajemy stosowne wzory:*

$$\hat{a}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(L_i-\overline{L}\right)\left(m_i-\overline{m}\right)}{\sum_{i=1}^{N}\left(m_i-\overline{m}\right)^2},\quad \hat{b}=\overline{L}-\hat{a}\,\overline{m},\quad \overline{m}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}m_i,\quad \overline{L}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}L_i,$$

$$s^2=\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}\left(L_i-\hat{a}m_i-\hat{b}\right)^2,\quad s_a^2=\frac{s^2}{\sum_{i=1}^{N}\left(m_i-\overline{m}\right)^2},\quad s_b^2=\overline{m^2}s_a^2,\quad \overline{m^2}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}m_i^2,$$

Tabela 3. Schemat obliczeń przy wyznaczaniu zależności liniowej $L = am + b$

m_i [g]	L_i [mm]	$\delta m_i = m_i - \overline{m}$ [g]	$\delta L_i = L_i - \overline{L}$ [mm]	$\delta m_i \delta L_i$ [g·mm]	$(\delta m_i)^2$ [g^2]	m_i^2 [g^2]	$\left(L_i - \hat{a}m_i - \hat{b}\right)^2$ [mm^2]
65,21	138					4252,34	
118,47	253	–53,148	–112,4	5973,838	2824,7099	14035,14	
171,59	365	–0,028	–0,4	0,011	0,0008	29443,13	
224,75	479	53,132	113,6	6035,795	2823,0094	50512,56	
278,07	592	106,452	226,6	24122,023	11332,0283	77322,92	
858,09	1827	← suma	suma →			175566,09	
171,618	365,4	← średnia	–		$\overline{m^2}$ =	35113,22	na stopień swobody
$\hat{a} \pm s_a =$			$\hat{b} \pm s_b =$			$s =$	

*Zdefiniowana wielkość s jest niepewnością standardową wydłużenia i ocenia ona nieznane odchylenie standardowe σ w pomiarze wydłużenia sprężyny. Wielkość s uzyskujemy ze średniego rozrzutu punków wokół **założonej** zależności funkcyjnej, zawierającej dwa swobodne parametry. Parametry te znajdujemy z dwóch równań metody najmniejszych kwadratów, które to równania wprowadzają dwa więzy łączące wszystkie wartość y_i, co powoduje, że mamy jedynie N –* 2 *niezależnych wyników i stąd czynnik N –* 2 *w mianowniku.*

***UWAGA**. Podejście to zakłada, że badana zależność ma **faktycznie** postać L = am + b.*

d) *Na podstawie wyników obliczeń rozstrzygnij, stosując test* 3σ*, czy wydłużenie mierzono od długości swobodnej sprężyny.*

e) *Jeśli uznałaś/uznałeś, że wyraz wolny dopasowanej zależności liniowej jest zgodny z zerem, to sformułuj problem wyznaczenia oceny nieznanego współczynnika A w zależności L = Am metodą najmniejszych kwadratów: podaj postać wyrażenia, które ma być minimalizowane i wyjaśnij względem jakich wielkości. Przyjmij, jak poprzednio, że wszystkie wartości mas, jako wartości wzorcowe, znane są dokładnie, a pomiary wydłużenia wykonano z takim samym, nieznanym, odchyleniem standardowym* σ.

f) *Wyznacz ocenę $\hat{A}$ nieznanego parametru A i niepewność tej oceny. Skorzystaj ze wzorów:*

$$\hat{A}=\frac{\sum_{i=1}^{N}m_iL_i}{\sum_{i=1}^{N}m_i^2},\quad s_A^2=\frac{s^2}{\sum_{i=1}^{N}m_i^2},\quad s^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(L_i-\hat{A}m_i\right)^2.$$

Wielkość s interpretujemy analogicznie jak w punkcie c). *W obliczeniach wzoruj się na Tabeli* 4.

***Zadanie* 6 (*na ćwiczeniach*)**

*W **Ćwiczeniu** **1**, badając drgania wahadła, wyznaczyłaś/wyznaczyłeś pięciokrotnie czas trwania* 10 *okresów dla kilku różnych jego długości. Dane te wykorzystamy teraz, aby za pomocą*

Tabela 4. Schemat obliczeń przy wyznaczaniu zależności proporcjonalnej $L = am$

m_i [g]	L_i [mm]	m_iL_i [g·mm]	m_i^2 [g^2]	$\left(L_i - \hat{A}m_i\right)^2$ [mm^2]
65,21	138	8998,98	4252,34	
118,47	253	29972,91	14035,14	
171,59	365	62630,35	29443,13	
224,75	479	107655,25	50512,56	
278,07	592	164617,44	77322,92	
	sumy →	373874,93	175566,10	
$\hat{A} \pm s_A =$		$s =$		na stopień swobody

metody najmniejszych kwadratów wyznaczyć wysokość punktu zawieszenia wahadła nad podłogą. Jak wiadomo, dla małych wychyleń, okres drgań T wahadła o długości L wynosi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

gdzie g to przyspieszenie ziemskie. Jeśli wprowadzimy wielkości: H – wysokość punktu zawieszenia wahadła nad podłogą, h – wysokość środka ciężkości wahadła na podłogą, kiedy to L = H – h, a wtedy znajdziemy, że:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\left(H - h\right) \quad \text{czyli} \quad \eta = ah + b, \quad \text{gdzie} \quad \eta = T^2, \quad b = \frac{4\pi^2 H}{g}, \quad a = -\frac{4\pi^2}{g}.$$

Widzimy, że wprowadzenie wielkości zadanej kwadratem okresu pozwoliło zapisać relację między okresem a wysokością wahadła nad podłogą w prostszej postaci.

W naszym doświadczeniu zarówno wielkość h jak i η pochodzą z pomiaru, więc równie dobrze możemy rozważać zależność:

$$h = H - \frac{g}{4\pi^2}T^2 \quad \text{czyli} \quad h = c\eta + d, \quad \text{gdzie} \quad d = H, \quad a = -\frac{g}{4\pi^2}.$$

Decyzja o wyborze dopasowywanej formy zależności wymaga stwierdzenia, czy mierzony był dokładniej kwadrat okresu czy wysokość. W tym celu:

a) wyznacz niepewności u_T pomiaru okresu dla każdej z wysokości kuli wahadła nad podłogą;

b) wyznacz wynikające z nich niepewności u_η kwadratów okresów;

c) skorzystaj z Tabeli 5 i wykonaj na papierze milimetrowym wykres zależności T^2 od h;

d) oszacuj wartość a_0 współczynnika a zależności liniowej $\eta = ah + b$ na podstawie wykresu;

e) porównaj przeniesione wartości $\delta_\eta = a_0u_h$ niepewności u_h z wartością u_η. Jeśli $\delta_\eta << u_\eta$, to za zmienną niezależną możemy przyjąć h.

Korzystając z arkusza kalkulacyjnego, uzupełnij odwzorowaną tam Tabelę 5 (*tabela zawiera dane uzyskane przez autorów instrukcji*) *i podejmij decyzję.*

***Uwaga**: W tabeli przyjęliśmy dopuszczalny błąd graniczny wskazań stopera* Δ_t = 0,02 s (*jak niektórzy z Państwa zaobserwowali, stoper nie wyświetlał wszystkich możliwych wartości*).

Zauważmy, że w wyniku takiej analizy może się zdarzyć, że np. wyznaczając współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej próbki metalu w kształcie odcinka drutu i analizując relację między temperaturą a długością tego odcinka umieszczonego w kąpieli z regulowaną temperaturą, będziemy musieli przyjąć temperaturę jako zmienną zależną, a długość odcinka drutu jako zmienną niezależną, choć, jako żywo, nikt z nas nie powie, że długość drutu decyduje o temperaturze kąpieli, w jakiej jest on utrzymywany. Jak widzimy, podejście to ignoruje relację przyczynowości między zmiennymi i bynajmniej nie świadczy to przeciw metodzie. Jest to immanentna cecha statystyki matematycznej – nie wnika ona w relacje deterministyczne między badanymi wielkościami – ona tylko opisuje obserwowany obraz, a decyzja o istnieniu lub braku związków przyczynowych pozostawiona jest w ręku badacza.

f) Przyjmij, że dana jest seria N zadanych i dokładnie znanych wartości x_i zmiennej niezależnej

Tabela 5. Wyznaczanie dominującej niepewności

	wysokość h kuli wahadła nad podłogą [m]			
	0,04	0,69	1,40	1,72
numer pomiaru	czas t dziesięciu kolejnych okresów [s]			
1	34,28	30,22	25,03	22,34
2	34,35	30,19	24,97	22,37
3	34,31	30,19	24,97	22,31
4	34,28	30,15	24,90	22,34
5	34,25	30,13	25,03	22,25
średnia $\overline{t}$ 10 okresów [s]	34,294	30,176	24,980	22,322
niepewność $s_{\overline{t}}$ średniej $\overline{t}$ [s]		0,0160	0,0241	0,0203
dopuszczalny błąd graniczny Δ_t [s]	0,02	0,02	0,02	0,02
niepewność $u_t = \sqrt{s_{\overline{t}}^2 + \Delta_t^2/3}$ [s]		0,0197	0,0267	0,0234
okres $T = \overline{t}/10$ [s]		3,0176	2,4980	2,2322
niepewność $u_T = u_t/10$ [s]		0,00197	0,00267	0,00234
$\eta = T^2$ [s^2]		9,10591	6,24000	4,98272
niepewność T^2: $u_\eta = 2Tu_T$ [s^2]		0,01191	0,01334	0,01044
$\Delta_h = 0{,}003$ m, a stąd u_h [m]	0,00173	0,00173	0,00173	0,00173
niepewność $\delta_\eta = a_0 u_h$ z przeniesienia [s^2]				

oraz zmierzonych, w punktach x_i, wartości y_i zmiennej zależnej η_i. W swym modelowym podejściu metoda najmniejszych kwadratów wymaga znajomości odchyleń standardowych σ_i wielkości y_i (w praktyce zastępowane niepewnościami standardowymi u_i). Sformułuj problem wyznaczenia ocen nieznanych współczynników a i b pełnej linii prostej $\eta = ax + b$ metodą najmniejszych kwadratów, co oznacza: podaj postać wyrażenia, które ma osiągnąć minimalną wartość i wyjaśnij względem jakich wielkości ma być ono minimalizowane. W zadaniu rolę zmiennej niezależnej x odgrywa wysokość h kuli wahadła nad podłogą.

g) *Oblicz metodą najmniejszych kwadratów oceny parametrów a oraz b linii prostej $\eta = ah + b$ oraz niepewności tych ocen. Skorzystaj z arkusza kalkulacyjnego i odwzorowanej tam Tabeli 6. Dla kompletu informacji podajemy stosowane wzory:*

$$\hat{a} = u_a^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \overline{x}_w)(y_i - \overline{y}_w)}{u_i^2}, \quad \hat{b} = \overline{y}_w - \hat{a}\,\overline{x}_w, \quad u_a^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i - \overline{x}_w}{u_i}\right)^2}, \quad u_b^2 = \overline{x_w^2} u_a^2,$$

$$\overline{x}_w = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{u_i^2}, \quad \overline{y}_w = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i}{u_i^2}, \quad \overline{x_w^2} = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2}{u_i^2}, \quad S = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{u_i^2}.$$

h) *Przeprowadź Pearsona test χ^2 zgodności zależności modelowej w postaci linii prostej z danymi.*

i) *(Do domu – dla treningu) Jeśli test dopuszcza opis danych za pomocą linii prostej, to wykorzystując wartość przyspieszenia ziemskiego w Warszawie, wyznacz ocenę wysokości H punktu zaczepienia kuli nad podłogą wraz z niepewnością tej oceny.*

j) *(Do domu – dla treningu) Jeśli test dopuszcza opis danych za pomocą linii prostej, to skorzystaj z ocen wartości parametrów linii prostej i podaj swoją ocenę wartości przyspieszenia ziemskiego w Warszawie oraz niepewność tej oceny, wynikającą z przeprowadzonego eksperymentu.*

k) *Załóżmy, że dopasowywana zależność liniowa między kwadratem okresu a wysokością kuli wahadła nad powierzchnią podłogi jest poprawna, nie jesteśmy jednak przekonani co do poprawność naszych niepewności standardowych pomiaru czasu. Sądzimy jedynie, że właściwie odzwierciedlone są ich wzajemne stosunki, ale nie jest nam znany wspólny czynnik multiplikatywny. Oznacza to, że faktyczne niepewności pomiaru kwadratu okresu to nie u_i lecz wielkości $w_i = zu_i$, gdzie z jest nieznanym współczynnikiem. Wyznacz ocenę współczynnika z.*

Tabela 6. Schemat obliczeń dla zależności $T^2 = ah + b$ z uwzględnieniem niepewności wielkości T^2

wielkość	numer pomiaru wysokości h				suma	średnia	
	1	2	3	4			
x_i [m] ($x = h$)	0,04	0,69	1,40	1,72	–	–	–
y_i [s^2] ($y = T^2$)		9,10591	6,24000	4,98272	–	–	–
u_i [s^2]		0,01191	0,01334	0,01044	–	–	–
$1/u_i^2$		7051,72	5616,46	9166,89		$= S$	–
x_i/u_i^2		4865,69	7863,04	15767,05			$= \overline{x}_w$
y_i/u_i^2		64212,33	35046,73	45676,00			$= \overline{y}_w$
$\delta x_i = (x_i - \overline{x}_w)/u_i$					–	–	–
$\delta y_i = (y_i - \overline{y}_w)/u_i$					–	–	–
$\delta x_i \delta y_i$						–	–
$(\delta x_i)^2$						–	–
x_i^2/u_i^2		3357,32	11008,26	27119,32			$= \overline{x_w^2}$
wyniki:	$\hat{a} \pm u_a =$			$\hat{b} \pm u_b =$			–
$\left(y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}\right)^2 / u_i^2$					$\chi_0^2 =$	$P\left(\chi^2 > \chi_0^2\right) =$	

Przedstawione w tym punkcie zagadnienie może wydawać się sztuczne w kontekście niniejszego zadania. Bywa ono jednak często wykorzystywane w analizie danych i natkniemy się na przykład jego zastosowania w następnym ćwiczeniu. Zwracamy uwagę, że jest ono nieco rozwiniętą formą analizy przeprowadzonej w Zadaniu 5, gdzie niepewności pomiaru długości sprężyny były identyczne i w całości nieznane.

Przypominamy sposób postępowania przy wykonywaniu **Pearsona testu χ^2 zgodności** modelu wyrażonego zależnością matematyczną $f(x;\boldsymbol{\theta})$, gdzie $\boldsymbol{\theta}$ to zbiór parametrów, do danych zadanych w postaci zestawu N wartości (x_i, $y_i \pm \sigma_i$) zmiennej niezależnej x_i i zmiennej zależnej η_i wraz z wartościami σ_i odchyleń standardowych wielkości y_i:

- ustalamy dopuszczalne prawdopodobieństwo α odrzucenia prawdziwej hipotezy (błędu pierwszego rodzaju, zwanego też poziomem zgodności testu);
- minimalizując ważoną sumę kwadratów reszt

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(y_i - f\left(x_i;\boldsymbol{\theta}\right)\right)^2}{\sigma_i^2}$$

  względem parametrów $\boldsymbol{\theta}$, wyznaczamy oceny $\hat{\theta}_k$ tych parametrów zależności matematycznej, które nie są częścią testowanej hipotezy;
- ustalamy liczbę $\nu = N - m$ stopni swobody, gdzie m jest liczbą parametrów w zależności matematycznej, których wartości zostały wyznaczone w poprzednim kroku;
- korzystając z DODATKU A, wyznaczamy wartość krytyczną $\chi_{kr}^2\left(\alpha,\nu\right)$ dla zadanego prawdopodobieństwa α i liczby ν stopni swobody;
- wykorzystując wcześniej wyznaczone oceny $\hat{\theta}_k$ parametrów, obliczamy wartość χ_0^2 minimalnej, ważonej sumy kwadratów reszt:

$$\chi_0^2 \equiv \mathcal{R}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(y_i - f\left(x_i;\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right)^2}{\sigma_i^2};$$

- porównujemy uzyskaną wartość χ_0^2 z wartością $\chi_{kr}^2\left(\alpha,\nu\right)$ – jeśli spełniony jest warunek: $\chi_0^2 > \chi_{kr}^2\left(\alpha,\nu\right)$, to odrzucamy testowaną hipotezę jako niezgodną z obserwacjami.
  W przeciwnym przypadku nie uważamy, że udowodniliśmy słuszność hipotezy, lecz jedynie

godzimy się z nią, jako niesprzeczną z obserwowanymi danymi.

UWAGA 1. Stosując metodę najmniejszych kwadratów wykorzystującą odchylenie standardowe σ_i, jak i wykonując Pearsona test χ^2, na ogół nie znamy jej wartości i dlatego w praktyce w ich miejsce stosujemy oszacowania u_i, czyli niepewności standardowe wyników pomiaru. Wprowadza to dodatkową nieoptymalność otrzymanych ocen parametrów i ocen ich niepewności, a w odniesieniu do testu osłabia kategoryczność jego konkluzji.

UWAGA 2. Można by sądzić, że im mniejszą wartość χ_0^2 otrzymamy, tym bardziej wiarogodną jest testowana hipoteza, jako że dopasowywana zależność wydają się dobrze odtwarzać dane doświadczalne. Nie jest to jednak prawda, bo mała wartość χ_0^2 podpowiada nam, że dane nie fluktuują wokół wyznaczanej zależności – w skrajnym przypadku, gdy dopasowana zależność przechodzi dokładnie przez punkty pomiarowe, wielkość χ_0^2 przyjmuje wartość zero. Mała wartość sumy kwadratów reszt w minimum jest mało prawdopodobna, a więc winna wzbudzić naszą czujność. Typowo, wartość χ_0^2 powinna być zbliżona do liczby ν stopni swobody, gdyż każdy z niezależnych składników sumy definiującej wielkość χ_0^2 ma wartość oczekiwaną równą jedności, a więc wartość χ_0^2/ν powinna być zbliżona do jedności. Oczywiście, przy wyborze wartości krytycznej dopuszczamy dużą, znacznie większą od jedność wartość $\chi_{kr}^2(\alpha,\nu)/\nu$, jako że chcemy zminimalizować ryzyko odrzucenia hipotezy prawdziwej. Ale, jeśli chcemy się ustrzec przed sytuacją, w której wyznaczana krzywa zbyt dobrze podąża za punktami, powinniśmy z podejrzliwością odnosić się także do wartości $\chi_{kr}^2(\alpha,\nu)/\nu << 1$. Przyczyn takiej relacji może być kilka. W modelowym podejściu formuła na sumę kwadratów reszt używa odchyleń standardowych σ_i wielkości mierzonych y_i – w praktyce wykorzystujemy niepewności standardowe u_i i przyczyną małej wartości χ_0^2 mogą być przeszacowane wartości niepewności. Możliwe jest także, że zmierzone wartości y_i nie są niezależne, a to oznacza, że formuła wyznaczająca wielkość $\mathcal{R}(\boldsymbol{\theta})$ nie jest poprawnie skonstruowana, co może prowadzić do zaniżenia wartości χ_0^2. W końcu powinniśmy także zawsze rozważyć możliwość zmanipulowania danych.

***Zadanie* 7 (*do domu – dla treningu*)**

W Tabeli 7 *podane są długości L* (*w tzw. jednostkach astronomicznych*) *połowy wielkiej osi orbit kolejnych ciał niebieskich w ich ruchu wokół Słońca* (*E. Rybka, Astronomia ogólna, PWN, Warszawa* 1983, *s.* 154). *„Odkryj” regułę Titusa – Bodego*: *L* = *an* + *b, gdzie n* = 0,1,2,4,8,16,..., *robiąc wykres zależności L od n. Wykonując dopasowanie parametrów a oraz b metodą najmniejszych kwadratów, pokaż, że ich wartości w przybliżeniu wynoszą: a* = 0,3 *oraz b* = 0,4.

Tabela 7. *Odległości, w jednostkach astronomicznych, ciał niebieskich od Słońca*

Merkury	*Wenus*	*Ziemia*	*Mars*	*Ceres*	*Jupiter*	*Saturn*	*Uran*	*Neptun*	*Pluton*
0,39	0,72	1	1,52	2,77	5,20	9,54	19,2	30,1	39,5

***Zadanie* 8 (*do domu – dla treningu*)**

Pokaż, że przy dopasowaniu zależności proporcjonalnej $\eta = Ax$, *gdy uzyskane w punktach* x_i *wartości* y_i, $i = 1,2, ..., N$, *określone odchyleniami standardowymi* σ_i, *wzory pozwalające ocenić nieznany współczynnik A i odchylenie standardowe* σ_A *tej oceny, mają postać:*

$$\hat{A} = \sigma_A^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}, \quad \sigma_A^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}.$$

***Zadanie* 9 (*do domu – dla treningu*)**

Pokaż, że podane we wcześniejszych zadaniach wzory na oceny i ich wariancje nieznanych współczynników a oraz b zależności $\eta = ax + b$ *można przedstawić w równoważnej postaci*

$$\hat{a} = \frac{1}{\Delta}\left(SS_{xy} - S_x S_y\right), \quad \hat{b} = \frac{1}{\Delta}\left(S_{xx} S_y - S_x S_{xy}\right), \quad \sigma_a^2 = \frac{1}{\Delta} S, \quad \sigma_b^2 = \frac{1}{\Delta} S_{xx},$$

gdzie:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad S_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2}, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}, \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\sigma_i^2}, \quad \Delta = SS_{xx} - S_x^2,$$

jeśli wyniki y_i pomiarów wielkości η charakteryzują się odchyleniami standardowymi σ_i.

Jeśli odchylenia te są takie same w każdy punkcie pomiarowym, wnoszą σ, ale są nieznane, to wyrażenia na oceny parametrów pozostają bez zmiany, przy czym

$$S = N, \quad S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \Delta = NS_{xx} - S_x^2,$$

a wyrażenia na kwadraty niepewności ocen parametrów a oraz b przyjmują postać:

$$s_a^2 = \frac{s^2}{\Delta} N, \quad s_b^2 = \frac{s^2}{\Delta} S_{xx},$$

gdzie wielkość s to wyznaczona z rozrzutu ocena odchylenie standardowe σ każdego z wyników y_i:

$$s^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \hat{a} x_i - \hat{b}\right)^2 .$$

PEARSONA TEST χ^2 ZGODNOŚCI Z MODELOWYM ROZKŁADEM

(ten materiał jest nadobowiązkowy i jego realizacja pozostawiona jest decyzji asystenta)

W Ćwiczeniu 3 dowiedzieliśmy się, jak należy porównywać graficznie (jakościowo) rozkład modelowy z rozkładem doświadczalnym. Teraz poszerzymy tę wiedzę o przykład metody (testu) ilościowego sprawdzania zgodności obu rozkładów. Wykorzystamy, najczęściej stosowany, **Pearsona test χ^2 zgodności** modelowego rozkład. W rozważaniach naszych odwołujemy się do tych samych danych, które wykorzystaliśmy przy porównaniu graficznym, tzn. porównamy modelowy rozkład Gaussa z rozkładem zebranych danych doświadczalnych.

***Zadanie* 10 (*na ćwiczeniach*)**

Przyjmując, że wyniki T_i pomiaru okresu drgań wahadła podlegają rozkładowi Gaussa z wartością oczekiwaną μ = 3,4408 s i dyspersją σ = 0,0456 s, przeprowadź test χ^2 Pearsona zgodności tego modelu z danymi doświadczalnymi. Skorzystaj z arkusza kalkulacyjnego i odwzorowanej tam Tabeli 8 *oraz DODATKU B, gdzie podane są wartości całek rozkładu Gaussa.*

Tabela 8. Test zgodności χ^2 Pearsona

krawędź dolna T_k [s]	–∞	3,35	3,40	3,45	3,50	–
krawędź górna $T_k + \Delta$ [s]	3,35	3,40	3,45	3,50	∞	suma
obserwowana liczba n_k danych	5	43	91	63	14	216
zmienna standaryzowana $z_k = (T_k - \mu)/\sigma$	–∞	–1,9912	–0,8947	0,2018		–
dystrybuanta $F(z_k)$ rozkładu Gaussa		0,0233	0,1855	0,5799		–
$z_{k+1} = (T_{k+1} - \mu)/\sigma$		–0,8947	0,2018	1,2982		–
$F(z_{k+1})$		0,1855	0,5799	0,9029		–
$p_k = P(z_k < z < z_{k+1}) = F(z_{k+1}) - F(z_k)$		0,1622	0,3945	0,3230		
oczekiwana liczba $\hat{N}_k = N\hat{p}_k$ danych		35,04	85,21	69,76		
$\left(n_k - \hat{p}_k N\right)^2 / \left(\hat{p}_k N\right)$		1,807	0,394	0,655		

Przypominamy sposób postępowania przy wykonywaniu testu χ^2 Pearsona zgodności modelowego rozkładu prawdopodobieństwa $f(x;\boldsymbol{\theta})$, określonego zestawem nieznanych parametrów $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ nie będących częścią hipotezy, z rozkładem doświadczalnym:

- ustalamy dopuszczane prawdopodobieństwo α odrzucenia prawdziwej hipotezy (błędu pierwszego rodzaju, zwanego też poziomem zgodności testu);
- dzielimy **cały teoretyczny zakres** wartości zmiennej losowej na n przedziałów $[x_k, x_k + \Delta_k]$, $k = 1, 2,\ldots, n$, (niekoniecznie tej samej długości) tak, aby liczba N_k oczekiwanych wyników w każdym z przedziałów była nie mniejsza niż 5 – w praktyce zadowalamy się *zaobserwowaną* liczbą n_k danych w przedziale nie mniejszą niż 5;
- konstruujemy ważoną sumę kwadratów reszt

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(n_k - Np_k(\boldsymbol{\theta})\right)^2}{Np_k(\boldsymbol{\theta})},$$

  gdzie

$$p_k(\boldsymbol{\theta}) = \int_{x_k}^{x_k+\Delta_k} f(x;\boldsymbol{\theta})\,dx$$

  to prawdopodobieństwo znalezienia wyniku x pomiaru w przedziale $[x_k, x_k + \Delta_k]$, a N jest całkowitą liczbą danych;
- minimalizujemy tę sumę względem nieznanych parametrów θ_i, wyznaczając w ten sposób poszukiwane oceny $\hat{\theta}_i$ tych parametrów rozkładu, które nie są częścią testowanej hipotezy;
- obliczamy liczbę stopni swobody $\nu = n - 1 - m$, gdzie n jest liczbą przedziałów, zaś m liczbą parametrów, których wartości zostały wyznaczone zgodnie z zarysowana wyżej procedurą;
- korzystając z DODATKU A, wyznaczamy wartość krytyczną $\chi^2_{kr}(\alpha,\nu)$ odpowiadającą zadanemu prawdopodobieństwu α i liczbie ν stopni swobody;
- na podstawie modelu i wyznaczonych bądź zadanych wartości parametrów obliczamy ocenę $\hat{p}_k = p_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ prawdopodobieństwa p_k znalezienia wartości zmiennej losowej w przedziale o numerze k;
- obliczamy ocenę oczekiwanej liczby $\hat{N}_k = N\hat{p}_k$ danych w przedziale o numerze k;
- obliczamy wartość ważonej sumy kwadratów w minimum;

$$\chi^2_0 = \mathcal{R}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n_k - N\hat{p}_k)^2}{N\hat{p}_k};$$

- porównujemy uzyskaną wartość χ^2_0 z wartością $\chi^2_{kr}(\alpha,\nu)$ – jeśli spełniony jest warunek $\chi^2_0 > \chi^2_{kr}(\alpha,\nu)$, to odrzucamy testowaną hipotezę jako niezgodną z obserwacjami. W przeciwnym przypadku nie uważamy, że udowodniliśmy, iż dane istotnie pochodzą z rozważanego rozkładu modelowego, a jedynie, że nie mamy podstaw do odrzucenia takiego stwierdzenia jako sprzecznego z danymi doświadczalnymi. Oczywiście, tu także ma zastosowanie UWAGA 2 umieszczona w części odnoszącej się do testu χ^2 zgodności dopasowania o małej wartości χ^2_0.

***Zadanie* 11 (*do domu – dla treningu*)**

Zgromadzono dane (*B. G. Mason, D. M. Pyle, W. B. Dade, and T. Jupp, Seasonality of volcanic eruptions, J. Geophys. Res.*, **109**, (2004), B04206) *dotyczące czasu wystąpienia każdej z* 3380 *erupcji wulkanu, jakie pojawiły się w latach* 1700 – 1999. *Wydarzenia te, zgodnie z datami ich wystąpienia, rozłożono między* 12 *„miesięcy" roku, przy czym słowo „miesiąc" oznacza tu dokładnie dwunastą część roku. Liczby erupcji w każdym miesiącu przedstawia Tabela* 9. *Przyjmując wartość błędu pierwszego rodzaju* α = 1%, *zweryfikuj hipotezę o tym, że wulkany wybuchając, nie preferują żadnego z miesięcy.*

Tabela 9. *Liczba erupcji wulkanów w miesiącu*

miesiąc	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
liczba k erupcji	325	328	295	297	261	264	253	250	288	242	302	275

RAPORT KOŃCOWY

Wyniki pomiarów, w postaci pliku tekstowego, pliku do programu Excel pakietu MS Office lub pliku do programu Calc pakietu Libre/Open Office proszę przesłać e-mailem prowadzącemu zajęcia ***niezwłocznie*** *po złożeniu raportu. Raport będzie czekał na sprawdzenie, aż to uczynisz.*

Pisanie raportu rozpocznij od ponownego przeczytania w instrukcji do Ćwiczenia 1 *uwag o tym, jak należy sporządzać raport.*

1. Wyznacz, wraz z niepewnością, ocenę współczynnika β, jaka wynika z pomiarów geometrycznych (wzór w ***Zadaniu*** **1**, punkt *b*)).
2. Przedyskutuj dokładność pomiarów drogi L i czasu t w pomiarach na równi. W szczególności porównaj udział dokładności odczytu i rozrzutu statystycznego w pełnej niepewności pomiaru czasu. Zwróć uwagę na realistyczny dobór niepewności pomiaru drogi.
3. Wykonaj wykres zależności drogi $L(t)$ oraz wielkości $\eta(t) = L(t)/t$ dla każdego z kątów nachylenia równi. Co sugerują Ci te wykresy? Jaki charakter ruchu i jaka postać zależności matematycznej drogi od czasu wynika z przyjętego modelu teoretycznego?
4. Aby zastosować metodę najmniejszych kwadratów w celu wyznaczenia nieznanych parametrów wybranego modelu teoretycznego, ustal, którą ze zmiennych należy wybrać jako zmienną niezależną (odwołaj się do wyników uzyskanych w punktach 2. i 3.).
5. Zdecyduj, którą wersję metody najmniejszych kwadratów wykorzystasz, aby ocenić te nieznane parametry – **podaj postać minimalizowanej funkcji i zadbaj, aby wszystkie występujące w niej wielkości były precyzyjnie zdefiniowane**.
6. Stosując wybraną metodę wyznacz, dla każdego z kątów nachylenia równi, oceny nieznanych parametrów i niepewności tych ocen, a także zweryfikuj, metodą testu χ^2 Pearsona, zgodności wybranego modelu ruchu z danymi.
7. Dla jednego z kątów nachylenia równi narysuj, jako funkcję wielkości x_i, wykres **reszt** $\varepsilon_i = y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}$, czyli różnic wartości zmierzonych i wartości obliczonych z dopasowania.
8. Wyznacz ocenę wartości przyspieszenia w badanym ruchu wraz z jej niepewnością dla obu kątów nachylenia równi. Dla każdej z wartości przyspieszenia podaj odpowiadającą jej ocenę parametru β i niepewność tej oceny.
9. Rozważ możliwość uzyskania najlepszej oceny parametru β z niniejszego doświadczenia drogą uśredniania wartości z pomiarów na równi, a następnie uśrednienia z wartością z pomiarów geometrycznych lub też drogą uśrednienia wartości z pomiarów geometrycznych z jedną z wartości z pomiarów na równi, a następnie uśrednienia wyniku z drugą wartością z pomiarów na równi.
10. Jeśli któryś ze sposobów uśredniania jest nieuzasadniony, wskaż przyczynę (lub przyczyny) i dla każdej z nich oszacuj (co do rzędu wielkości) jej wkład w obserwowaną rozbieżność.

Raport końcowy powinien zawierać wszystkie surowe wyniki pomiarów, aby można było, bez odwoływani się do zapisków sporządzonych w trakcie wykonywani doświadczenia, powtórzyć wszystkie obliczenia i sprawdzić ich poprawność.

Raport należy oddać, wraz z ostemplowanym arkuszem otrzymanym przy przystępowaniu do części pomiarowej, w Sekretariacie Pracowni na następnych zajęciach, po zakończeniu ćwiczeń rachunkowych do niniejszego doświadczenia. W raporcie możesz wykorzystać jedynie własne dane.

Raport nie może uzyskać pozytywnej oceny końcowej, jeśli choć jedna z wartości liczbowych jest błędna z powodu błędów rachunkowych bądź wyboru błędnej metody analizy!

DODATEK A – WARTOŚCI KRYTYCZNE ROZKŁADU χ^2

Tabela poniżej podaje wartości krytyczne $\chi^2_{kr}(\alpha,\nu)$ zmiennej χ^2 dla niektórych wartości ryzyka α błędu pierwszego rodzaju oraz liczb ν stopni swobody.

Prawdopodobieństwo α błędu pierwszego rodzaju	Wartości krytyczne $\chi^2_{kr}(\alpha,\nu)$ dla podanych liczb ν stopni swobody									
	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=4$	$\nu=5$	$\nu=6$	$\nu=7$	$\nu=8$	$\nu=9$	$\nu=10$
0,001	10,83	13,82	16,27	18,47	20,51	22,46	24,32	26,12	27,88	29,59
0,003	9,00	11,83	14,16	16,25	18,21	20,06	21,85	23,57	25,26	26,90
0,005	7,88	10,60	12,84	14,86	16,75	18,55	20,28	21,95	23,59	25,19
0,010	6,63	9,21	11,35	13,28	15,08	16,81	18,47	20,09	21,67	23,21
0,050	3,84	5,99	7,82	9,49	11,07	12,59	14,07	15,51	16,92	18,31
0,100	2,71	4,61	6,25	7,78	9,24	10,64	12,02	13,36	14,68	15,99
Prawdopodobieństwo α błędu pierwszego rodzaju	Wartości krytyczne $\chi^2_{kr}(\alpha,\nu)$ dla podanych liczb ν stopni swobody									
	$\nu=11$	$\nu=12$	$\nu=13$	$\nu=14$	$\nu=15$	$\nu=16$	$\nu=17$	$\nu=18$	$\nu=19$	$\nu=20$
0,001	31,26	32,91	34,53	36,12	37,70	39,25	40,79	42,31	43,82	45,31
0,003	28,51	30,10	31,66	33,20	34,71	36,22	37,70	39,17	40,63	42,08
0,005	26,76	28,30	29,82	31,32	32,80	34,27	35,72	37,16	38,58	40,00
0,010	24,73	26,22	27,69	29,14	30,58	32,00	33,41	34,81	36,19	37,57
0,050	19,68	21,03	22,36	23,68	25,00	26,30	27,59	28,87	30,14	31,41
0,100	17,28	18,55	19,81	21,06	22,31	23,54	24,77	25,99	27,20	28,41
Prawdopodobieństwo α błędu pierwszego rodzaju	Wartości krytyczne $\chi^2_{kr}(\alpha,\nu)$ dla podanych liczb ν stopni swobody									
	$\nu=21$	$\nu=22$	$\nu=23$	$\nu=24$	$\nu=25$	$\nu=26$	$\nu=27$	$\nu=28$	$\nu=29$	$\nu=30$
0,001	46,80	48,27	49,73	51,18	52,62	54,05	55,48	56,89	58,30	59,70
0,003	43,52	44,94	46,36	47,76	49,16	50,55	51,93	53,31	54,68	56,04
0,005	41,40	42,80	44,18	45,56	46,93	48,29	49,65	50,99	52,34	53,67
0,010	38,93	40,29	41,64	42,98	44,31	45,64	46,96	48,28	49,59	50,89
0,050	32,67	33,92	35,17	36,42	37,65	38,89	40,11	41,34	42,56	43,77
0,100	29,62	30,81	32,01	33,20	34,38	35,56	36,74	37,92	39,09	40,26

***Uwaga**: jeśli dysponujemy oprogramowaniem, który umożliwia wyznaczanie całek rozkładów prawdopodobieństwa, lepiej jest, w miejsce wartości krytycznej, podawać tzw. **wartość p testu**, czyli prawdopodobieństwo p, że zmienna u =* χ^2 *przyjmie wartość większą niż wartość* χ_0^2 *uzyskana z danych:*

$$p := P\left(u \geq \chi_0^2\right) = \int_{\chi_0^2}^{\infty} f_\nu(u)\,du,$$

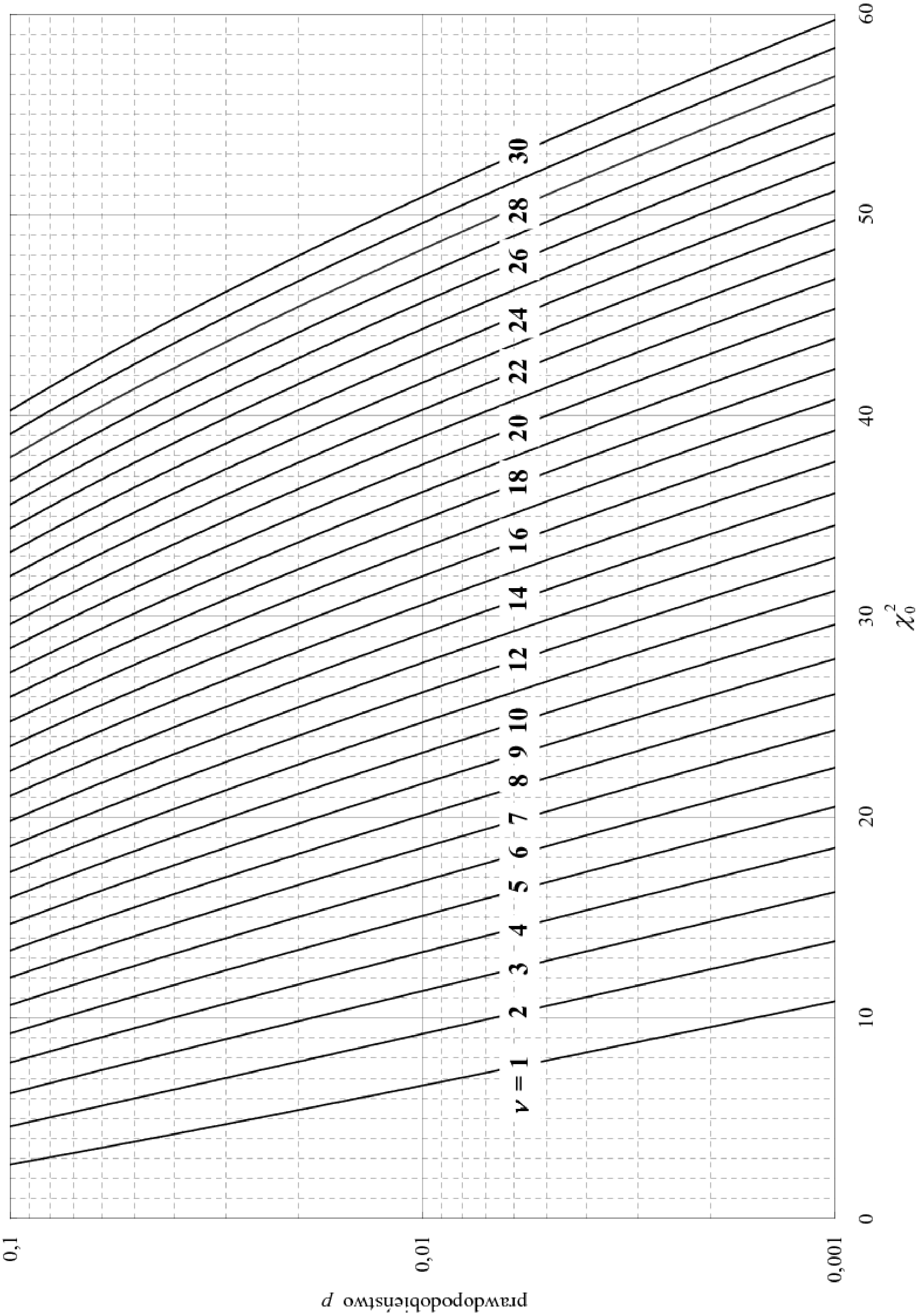
gdzie

$$f_\nu(u) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} u^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left(-\frac{u}{2}\right)$$

to rozkład zmiennej χ^2 *o* ν *stopniach swobody. Podejście to nie zwalnia Cię z obowiązku podjęcia decyzji co do zgodności wybranego modelu z danymi, a dostarcza większej ilości informacji czytelnikowi, umożliwiając mu, niekiedy, wyrażenie własnej opinii (jak również pozwala mu zorientować się w jakości i rygoryzmie Twych decyzji).*

Symbol Γ *powyżej oznacza funkcję gamma Eulera* $\Gamma(z)$*, zdefiniowaną za pomocą całki*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x}\,dx.$$



Wykres prawdopodobieństwa *p* jako funkcji obserwowanej wartości χ_0^2 dla niektórych wartości liczby ν stopni swobody

DODATEK B – CAŁKI ROZKŁADU NORMALNEGO (GAUSSA).

Tabela poniżej podaje wartość całki standardowego rozkładu normalnego

$$F(z) := P(-\infty < x \le z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \quad z > 0 .$$

Z uwagi na symetrię rozkładu, wartość całki dla ujemnych wartości argumentu można wyznaczyć ze związku $F(-z) = 1 - F(z)$.

Tabela 5. Wartości całek rozkładu Gaussa

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,10	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,20	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,30	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,40	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,50	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,60	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,70	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,80	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,90	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,00	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,10	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,20	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,30	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,40	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,50	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,60	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,70	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,80	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,90	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,00	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,10	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,20	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,30	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,40	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,50	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,60	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,70	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,80	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,90	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,00	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,10	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,20	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,30	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,40	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,50	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,60	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,70	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,80	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,90	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Aby odczytać wartość całki dla np. z = 1,23 wybierz wiersz odpowiadający liczbie 1,20 i kolumnę odpowiadającą wartości 0,03, a na ich przecięciu znajdziesz wartość $F(z)$ = 0,8907.