

# PRZYKŁAD INSTRUKCJI I RAPORTU

A. Majhofer i R. Nowak

## Ćwiczenie nr XXX MODUŁ YOUNGA STALI NARZĘDZIOWEJ Instrukcja dla studenta

### WSTĘP

Ciało poddane działaniu siły ulega deformacji, która oznacza zmiany jego rozmiarów zarówno w kierunku działania siły, jak i w kierunku do niej prostopadłym. Jeśli deformacja jest odwracalna i proporcjonalna do przyłożonej siły, to relację między tymi wielkościami nazywana jest prawem Hooke'a. Dla ciał jednorodnych i izotropowych deformację tę można opisać za pomocą jedynie dwóch współczynników proporcjonalności: modułu Younga  $E$  o wymiarze ciśnienia i bezwymiarowego współczynnika  $\nu$ , zwanego współczynnikiem Poissona. Należy pamiętać, że nie wszystkie ciała o stałej konsystencji stosują się do prawa Hooke'a. Dobrym przykładem takiego ciała, znanym z codziennej praktyki, jest glina.

Prawo Hooke'a, w swej najprostszej postaci, orzeka, że zmiana  $\Delta L$  długości w kierunku działania siły  $F$  jest proporcjonalna do działającej na ciało siły:

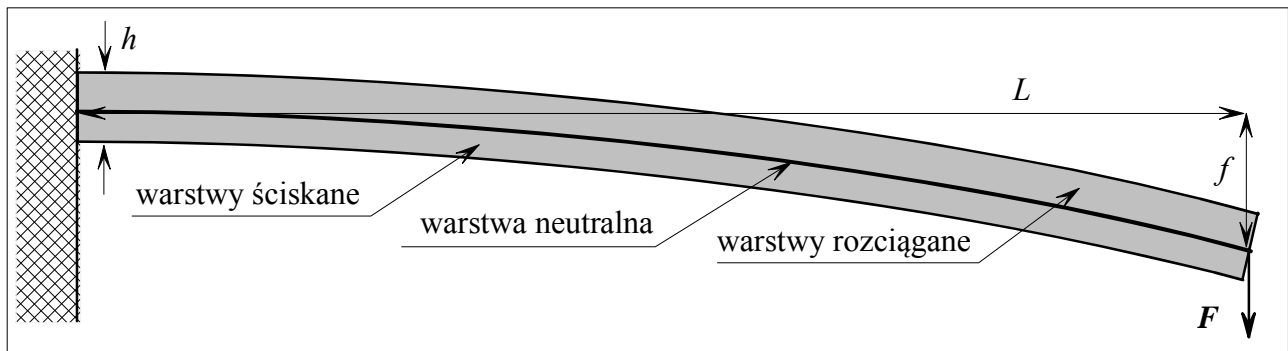
$$\Delta L = \frac{1}{E} \frac{FL}{S},$$

gdzie  $L$  jest długością niezdeformowanego ciała, natomiast  $S$  to pole przekroju poprzecznego, na które działa siła. Przy zmianie długości ciała następują jednocześnie zmiany  $\Delta D$  jego wymiarów poprzecznych względem kierunku działania siły, przy czym wg prawa Hooke'a mamy:

$$\Delta D = -\frac{\nu}{E} \frac{FD}{S} = -\nu \Delta L,$$

gdzie  $D$  jest pierwotną szerokością ciała. Oczywiście prawo Hooke'a, jeśli w ogóle obowiązuje, to obowiązuje jedynie w ograniczonym zakresie wartości siły, różnym dla różnych ciał, a poza tym zakresem prowadzi do trwałej deformacji lub nawet zniszczenia.

Rozważmy zorientowany poziomo pręt zamocowany sztywno jednym końcem do ściany. Na drugi jego koniec działa siła  $F$  prostopadła do jego osi. Siła ta powoduje wygięcie pręta, jak schematycznie ilustruje to Rysunek 1. Intuicja fizyczna podpowiada nam, że warstwy pręta leżące powyżej jego warstwy środkowej będą rozciągnięte, podczas gdy warstwy poniżej będą ściskane. Jeśli siła nie jest nadmierna i nie wychodzimy poza zakres stosowalności prawa Hooke'a, w opisie ugięcia  $f$  pręta musi pojawić się moduł Younga.



Rysunek 1. Rola modułu Younga w zagadnieniu zginaniu pręta

Dokładniejsze rozważenie problemu ugięcia  $f$  pręta wmurowanego poziomo w ścianę, którego drugi koniec obciążono masą  $m$ , prowadzi do następującego wyrażenia [1]

$$f = \frac{4L^3 g}{Edh^3} m,$$

gdzie  $h$  jest grubością pręta, jak na Rysunku 1, natomiast  $d$  jego szerokości,  $L$  długością nieodkształconego pręta, natomiast  $g$  przyspieszeniem ziemskim.

Celem ćwiczenia jest sprawdzenie prawa Hooke'a, w tym wypadku proporcjonalności między ugięciem a masą, potęgowej zależności współczynnika proporcjonalności od długości pręta i wyznaczenie oceny modułu Younga pręta w postaci brzeszczotu piłki do metalu.

### POMIARY

#### Masz do dyspozycji:

- dwa brzeszczoty piły do metalu;
- imadło;
- komplet ciężarków, które można zawieszać na metalowym haczyku;
- śrubę mikrometryczną o najmniejszej podziałce 0,01 mm;
- wagę laboratoryjną o najmniejszej podziałce 0,01 g,
- taśmę mierniczą o najmniejszej podziałce 1 mm.

#### Wykonanie pomiarów

- a) Zamocuj poziomo w imadle oba brzeszczoty.
- b) Zważ pierwszy ciężarek, zawieś go na dolnym brzeszczocie i zmierz miarką odległość między końcem tego brzeszczotu a brzeszczotem górnym.
- c) Powtórz pomiary, zawieszając na haczyku kolejne dodatkowe ciężarki, każdorazowo ważąc całkowitą masę układu ciężarków; dokładaj ciężarki z umiarem, aby nie doprowadzić do trwałej deformacji brzeszczotu – sprawdzaj, za każdym razem, czy brzeszczot powraca pozycji początkowej.
- d) Zmień długość brzeszczotów w imadle i powtórz pomiary z punktów b) i c).
- e) Wykonaj analogiczne pomiary dla kilku długości brzeszczotu.

Podczas wykonywania pomiarów pamiętaj o szczegółowej dokumentacji, tj. o notowaniu wszystkich informacji mogących mieć znaczenie podczas analizowania uzyskanych wyników.

### RAPPORT KOŃCOWY

Przygotuj raport końcowy zgodnie z ogólnymi zasadami. W szczególności, raport powinien zawierać:

- 1) w kilkudzaniowym streszczeniu: bardzo zwięzłą prezentację zagadnienia będącego przedmiotem doświadczenia i najważniejszych jego wyników, to znaczy: wnioski odnośnie do słuszności prawa Hooke'a, sześcienną zależność współczynnika sprężystości od długości brzeszczotu i ocenę modułu Younga wraz z jej niepewnością;
- 2) we wstępie: sformułowanie zadania wraz z kluczowymi elementami teoretycznymi;
- 3) w części odnoszącej się do pracy eksperymentalnej: informacje o używanych przyrządach i ich dokładnościach, opis metod pomiaru i ich przebiegu oraz surowe wyniki pomiarów – zapisane wraz z nieistotnymi zerami ukazującymi dokładność;
- 4) w części odnoszącej się do analizy danych:
  - a) sprawdzenie słuszności prawa Hooke'a;
  - b) sprawdzenie modelowej zależności współczynnika sprężystości od długości brzeszczotu;
  - c) wyznaczenie oceny modułu Younga;
- 5) w dyskusji i wnioskach końcowych: konkluzje odnośnie do sprawdzenia słuszności prawa Hooke'a i relacji między współczynnikiem sprężystości a długością brzeszczotu i komentarz na temat zgodności uzyskanej oceny modułu Younga z danymi literaturowymi; tu można także przedstawić własne refleksje na temat problemu;
- 6) w spisie literatury: poprawnie zredagowane, wykorzystane w raporcie źródła.

#### Literatura

- [1] Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna, część I, Mechanika i akustyka*, PWN, Warszawa, 1972, s. 407.

# PRZYKŁADOWY RAPORT NA PODSTAWIE POMIARÓW WYKONANYCH WEDŁUG POWYŻSZEJ INSTRUKCJI

## Ćwiczenie nr XXX MODUŁ YOUNGA STALI NARZĘDZIOWEJ A.R. Hoferwak

### STRESZCZENIE

W pracy badano własność sprężystość stali w formie brzeszczotu piłki do metalu. Brzeszczot zamocowany jednym końcem w imadle poddano działaniu sił przyłożonych do drugiego końca. Pomiaru wykonano przy różnych długościach brzeszczotu. Stwierdzono zgodność zależności ugięcia od siły nie tylko z prawem Hooke'a ale także z cytowaną w literaturze modelową zależnością współczynnika sprężystości od trzeciej potęgi długości brzeszczotu. Wyznaczono moduł Younga  $E = (184 \pm 11)$  GPa stali narzędziowej.

### WPROWADZENIE

Niech materiał, z którego wykonano pręt spełnia prawo Hooke'a. Gdy jeden koniec takiego pręta o długości  $L$  i przekroju prostokątnym o bokach  $d$  oraz  $h$  zostanie zamocowany, a do drugiego przyłożymy siłę  $F$  równoległą do boku o długości  $h$  i prostopadłą do osi pręta, to koniec pręta odchyli się od położenia równowagi o

$$f = \frac{4L^3}{Edh^3} F,$$

gdzie  $E$  jest modułem Younga materiału pręta [1]. Jeśli pręt ten zorientujemy poziomo, a na drugim końcu zawiesimy ciężarek o masie  $m$ , to wyrażenie na ugięcie możemy zapisać jako:

$$f = \frac{4L^3 g}{Edh^3} m, \quad (1)$$

gdzie  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim. Jak widać, zależność między masą  $m$  a ugięciem  $f$  jest proporcjonalna, a współczynnik proporcjonalności

$$k = \frac{4L^3 g}{Edh^3} \quad (2)$$

jest proporcjonalny do trzeciej potęgi długości  $L$  pręta. Obie te własności zostały sprawdzone metodą niewielu prostych pomiarów i ponieważ uzyskano zgodność z danymi, oceniono także moduł Younga materiału pręta.

### UKŁAD DOŚWIADCZALNY I POMIARY

Pomiary wykonano w układzie przedstawionym na Rysunku 1. Dwa brzeszczoty piłki do metalu złożono razem i zamocowano w imadle, które pozwoliło zorientować płaszczyzny obu brzeszczotów poziomo, jedną nad drugą. Na dolnym brzeszczocie zawieszano na haczyku ciężarki, uprzednio ważąc każdorazowo całość obciążenia na wadze WLC 1 o najmniejszej działce odczytu 0,01 g. Ugięcie brzeszczotu mierzono od górnego brzeszczotu, dzięki czemu uniknięto ewentualnego wpływu na wynik pomiaru odkształcenia brzeszczotu spowodowanego jego własnym ciężarem, choć akurat ten element nie jest tak istotny, gdyż jest łatwy do uwzględnienia w analizie. Pomiar ugięcia  $f$ , długość  $L$  brzeszczotu oraz jego szerokość  $d$  wykonano taśmą mierniczą o najmniejszej działce odczytu 1 mm, grubość  $h$  zaś zmierzono śrubą mikrometryczną o najmniejszej działce odczytu 0,01 mm.

### WYNIKI POMIARÓW I ICH NIEPEWNOŚCI

Wykorzystany w doświadczeniu brzeszczot miał szerokość  $d = 12,5$  mm, przy czym niepewność tej oceny wynosiła  $u_d = 0,58$  mm. Niepewność tę, jak i niepewności wszystkich innych wielkości mierzonych bezpośrednio i jednokrotnie, wyznaczono z dopuszczalnego, maksymalnego



Rysunek 1. Stanowisko pomiarowe (fot. P. Gortatewicz)

błędu  $\Delta$  pomiaru, który, z jednym wyjątkiem wskazanym niżej, przyjęto równym najmniejszej działce odczytu urządzenia, a samą niepewność obliczono ze wzoru:

$$u = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}.$$

Przy pomiarach masy  $m$  uzyskiwano powtarzalność wskazań, dlatego uznano, że efekty statystyczne są zanedbywalne, a dopuszczalny, maksymalny błąd pomiaru przyjęto równym najmniejszej działce, tj. 0,01 g, co dało niepewność standardową  $u_m = 0,0058$  g pomiaru masy. Niepewność  $u_f = 0,58$  mm w pomiarze ugięcia wynikała ze najmniejszej działki miarki, czyli 1 mm. Z uwagi na zaokrąglone końce brzeszczotu przyjęto, że dopuszczalny, maksymalny błąd pomiaru jego długości  $L$  nie jest równy najmniejszej działce taśmy mierniczej, tj. 1 mm, lecz wynosi 2 mm, co dało standardową niepewność  $u_L = 1,2$  mm. Pomiar grubości  $h$  brzeszczotu śrubą mikrometryczną wykonano pięciokrotnie, otrzymując wartości:  $h_1 = 0,62$  mm,  $h_2 = 0,61$  mm,  $h_3 = 0,62$  mm,  $h_4 = 0,63$  mm oraz  $h_5 = 0,62$  mm, co daje średnią  $\bar{h} = 0,62$  mm i niepewność

$$u_h^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2 + \frac{\Delta_h^2}{3} = (0,0066 \text{ mm})^2,$$

gdzie pierwszy składnik, z sumą, to kwadrat statystycznej niepewności średniej arytmetycznej. Samą niepewność średniej otrzymano równą 0,0032 mm, a wartość dopuszczalnego, maksymalnego błęd  $\Delta_h$  pomiaru przyjęto równą 0,01 mm, tj. równą najmniejszej działce śruby mikrometrycznej. Należy zaznaczyć, że mimo cytowanych tu zaokrąglonych, zgodnie z konwencją, wartości niepewności, w obliczeniach wykorzystywano pełną dokładność stosownych wielkości.

Głównym zadaniem części eksperymentalnej była seria pomiarów odchylenia  $f$  dla różnych obciążeń masą  $m$  dla sześciu długości  $L$  brzeszczotu. Uzyskane wyniki przedstawia Tabela 1 a jej zawartość Rysunek 2. Linie proste na rysunku wyjaśnione są w dalszej części pracy.

### ANALIZA DANYCH

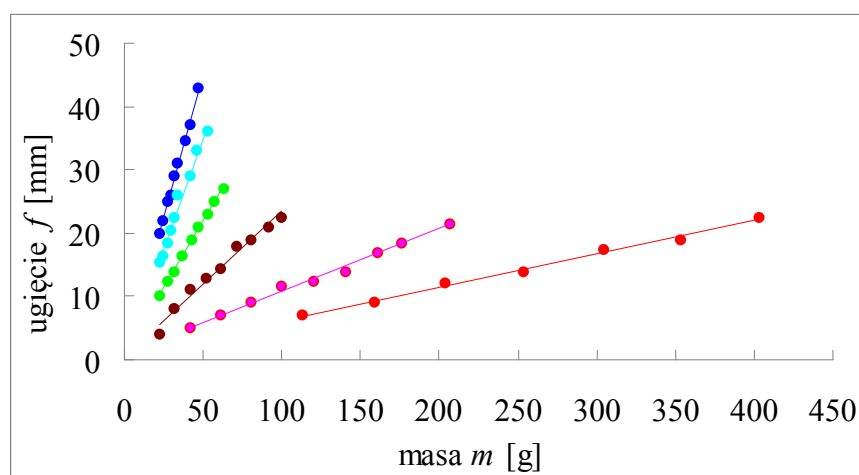
Model (1) ze współczynnikiem sprężystości  $k$  w postaci (2), wskazujący na proporcjonalność między ugięciem  $f$  a masą  $m$ , został poszerzony i do opisu tej zależności wybrano postać z wyrazem wolnym

$$f = Km + b. \quad (3)$$

W ten sposób uzyskano dodatkowy stopień kontroli pomiarów, jako że pomiary ugięcia wykonywano względem górnego, nieugiętego brzeszczotu, a więc ocena parametru  $b$  powinna być zgodna z zerem.

Tabela 1. Wyniki pomiarów ugięcia brzeszczotu

Długość $L$ brzeszczotu [mm]											
91		114		148		183		215		234	
Wartości masy $m$ i ugięcia $f$ dla wskazanej długości $L$ brzeszczotu											
masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]	masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]	masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]	masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]	masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]	masa $m$ [g]	ugięcie $f$ [mm]
113,11	7,0	41,45	5,0	22,06	4,0	22,06	10,0	22,06	15,5	22,06	20,0
158,69	9,0	61,07	7,0	31,98	8,0	27,07	12,5	24,05	16,5	24,05	22,0
204,00	12,0	80,59	9,0	41,67	11,0	32,00	14,0	27,07	18,5	27,07	25,0
253,92	14,0	100,19	11,5	51,62	13,0	37,00	16,5	29,07	20,5	29,07	26,0
304,04	17,5	119,63	12,5	61,17	14,5	42,57	19,0	31,99	22,5	32,00	29,0
353,21	19,0	140,45	14,0	71,12	18,0	47,00	21,0	34,01	26,0	34,00	31,0
403,14	22,5	160,97	17,0	80,81	19,0	52,51	23,0	41,93	29,0	39,02	34,5
–	–	175,99	18,5	91,37	21,0	57,51	25,0	46,00	33,0	41,93	37,0
–	–	206,78	21,5	100,25	22,5	63,38	27,0	52,51	36,0	46,93	43,0



Rysunek 2. Wyniki pomiarów ugięcia brzeszczotu

Dla każdej z długości  $L$  brzeszczotu wyznaczono oceny parametrów  $K$  oraz  $b$ , minimalizując ważoną sumę kwadratów reszt

$$R(K, b) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_f^2} (f_i - Km_i - b)^2, \quad (4)$$

w której wszystkie niepewności  $u_f$  są identyczne, ponieważ wszystkie ugięcia mierzone były tą samą techniką. Rezultat tego dopasowania przedstawia Tabela 2 i proste na Rysunku 2.

Tabela 2. Wyniki dopasowania zależności  $f = Km + b$

długość $L$ [mm]	ocena $\hat{K}$ nachylenia $K$ [mm/g]	ocena $\hat{b}$ odciętej $b$ [mm]	suma $R_{min}$ kwadratów odchyień	liczba stopni swobody	niepewność $\delta_f$ z przeniesienia [mm]
91	$0,0530 \pm 0,0022$	$0,88 \pm 0,61$	0,44	5	0,00013
114	$0,0986 \pm 0,0037$	$0,98 \pm 0,49$	3,75	7	0,00057
148	$0,2276 \pm 0,0076$	$0,59 \pm 0,50$	19,12	7	0,00131
185	$0,416 \pm 0,015$	$1,06 \pm 0,64$	1,87	7	0,00240
215	$0,697 \pm 0,020$	$0,27 \pm 0,70$	18,79	7	0,00402
234	$0,887 \pm 0,024$	$0,54 \pm 0,82$	6,26	7	0,00512

W Tabeli 2 dla kolejnych długości  $L$  pręta (pierwsza kolumna) podane są w kolejnych kolumnach: oceny  $\hat{K}$  współczynnika nachylenia  $K$  i wyrazu wolnego  $b$ , minimalne, ważone sumy

$R_{min}$  kwadratów reszt, liczby stopni swobody i niepewności  $\delta_f$  ugięcia obliczane jako  $\delta_f = \hat{K}u_m$ , tj. metodą przeniesienia (propagacji) niepewności.

Te ostatnie potrzebne są do rozstrzygnięcia, czy aby nie powinno się prowadzić dopasowania zależności w postaci  $m = Ff + c$  zamiast w postaci (3). W Tabeli 3 można zobaczyć, że niepewność  $\delta_f = \hat{K}u_m$  tj. przyczynek do niepewności ugięcia, wynikający z niepewności  $u_m$  pomiaru masy, jest istotnie większy od niepewności  $u_f = 0,58$  mm bezpośredniego pomiaru ugięcia. Tym samym można uznać, iż masa ciężarków jest znana dokładnie, a więc można ją wybrać jako zmienną niezależną, a przyjęta wersja (4) metody najmniejszych kwadratów jest dostosowana do analizy modelowej postaci zależności (3) między ugięciem a masą.

Można też uznać, że dla każdej długości brzeszczotu minimalna suma  $R_{min}$  kwadratów ważonych reszt jest akceptowalna. Jeśli potraktować tę wielkość jako wartość zmiennej o rozkładzie  $\chi^2$  z podaną w Tabeli 2 liczbą stopni swobody, to nawet największa z tych wartości jest mniejsza od wartości krytycznej 21,85 odpowiadającej prawdopodobieństwu 0,003 błędu pierwszego rodzaju, jaki kojarzony jest z testem  $3\sigma$  i który jesteśmy gotowi przyjąć jako kryterium.

W końcu należy zauważyć, że wszystkie oceny współczynnika  $b$  są zgodne z zerem w ramach mniej niż dwóch niepewności standardowych. Oznacza to, że w zależności (3) można porzucić wyraz wolny i ponownie przeprowadzić dopasowanie, tym razem zależności proporcjonalnej  $f = km$ , z jednym tylko parametrem, a więc bardziej restrykcyjnej, pozostawiającej mniej swobody na ukrycie błędów pomiarowych, a więc dostarczającej silniejszego testu słuszności prawa Hooke'a. W tym celu zminimalizowano ważoną sumę kwadratów reszt w postaci:

$$R(k) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_f^2} (f_i - km_i)^2,$$

a wynik tego dopasowania przedstawia Tabela 3.

Tabela 3. Wyniki dopasowania zależności  $f = km$

długość $L$ [mm]	ocena $\hat{k}$ nachylenia $k$ [mm/g]	suma $R_{min}$ kwadratów odchyłeń	liczba stopni swobody
91	$0,05599 \pm 0,00080$	5,02	6
114	$0,1054 \pm 0,0015$	7,81	8
148	$0,2359 \pm 0,0029$	20,50	8
185	$0,4386 \pm 0,0043$	4,56	8
215	$0,7040 \pm 0,0054$	18,94	8
234	$0,9024 \pm 0,0057$	6,68	8

Ponieważ zmiany ocen współczynników nachylenia są na poziomie kilku procent, więc i niepewności  $\delta_f$  ugięcia indukowane niepewnościami masy pozostają istotnie mniejsze niż niepewności pomiarowe tegoż ugięcia, dlatego też i tym razem można stwierdzić, *post factum*, stosowność wybranej wersji metody najmniejszych kwadratów. Wartość sum  $R_{min}$  kwadratów odchyłeń pozostają akceptowalne – wartość krytyczna odpowiadającą prawdopodobieństwu 0,003 błędu pierwszego rodzaju wynosi 21,57 przy ośmiu stopniach swobody. Zauważmy jednak bardzo znaczące zmniejszenie niepewności ocen parametru  $k$ , co jest konsekwencją bardziej restrykcyjnego modelu.

Związek (2) wyznacza sześcienną zależność między współczynnikiem proporcjonalności  $k$  w prawie Hooke'a a długością  $L$  brzeszczotu. Aby zweryfikować tę zależność, poddamy ją najpierw prostemu przekształceniu. W analizie oceny współczynnika sprężystości  $k$  wyrażane były w jednostkach mm/g, podzielmy więc obustronnie zależność (2) przez tę jednostkę:

$$\frac{k}{1 \text{ mm/g}} = \frac{4L^3 g}{Edh^3} \frac{1}{1 \text{ mm/g}} = \frac{L^3}{1 \text{ mm}^3} \cdot \frac{4g}{Edh^3} 1 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$$

i wprowadźmy wielkości bezwymiarowe:

$$\kappa = \frac{k}{1 \text{ mm/g}}, \quad \lambda^3 = \frac{L^3}{1 \text{ mm}^3}, \quad \beta = \frac{4g}{Edh^3} 1 \text{ g} \cdot \text{mm}^2,$$

co prowadzi do wyrażenia  $\kappa = \beta\lambda^3$ , które po zlogarytmowaniu przyjmuje postać:

$$\ln \kappa = 3 \ln \lambda + \ln \beta, \quad (5)$$

a po wprowadzeniu wielkości:

$$w = \ln \kappa, \quad z = \ln \lambda, \quad B = \ln \beta$$

zadaje zależność liniową

$$w = Az + B, \quad (6)$$

w której  $A = 3$ . Słuszność modelowej zależności (2) sprawdzamy, weryfikując linowy charakter zależności (6) i zgodność uzyskanej oceny parametru  $A$  z wartością 3. Weryfikację tę przeprowadzamy w ramach metody najmniejszych kwadratów, minimalizując względem parametrów  $A$  oraz  $B$  ważoną sumę kwadratów reszt:

$$R(A, B) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i^2} (w_i - Az_i - B)^2, \quad (7)$$

w której wielkości  $v_i$  to niepewności wielkości  $w_i$ :

$$v_i = \frac{u_i}{k_i},$$

natomiast wielkości  $u_i$  to podane w Tabeli 3 niepewności ocen współczynników sprężystości dla każdej z długości brzeszczotu. Za chwilę będą potrzebne także niepewności  $v$  wielkości  $z = \ln \lambda$ , zdefiniujmy je więc tutaj dla każdej długości brzeszczotu:

$$v_i = \frac{u_L}{L_i}.$$

Dopasowując zależność (6) do sześciu punktów danych otrzymano ocenę  $2,957 \pm 0,013$  współczynnika nachylenia  $A$ , współczynnik  $B$  uzyskał ocenę  $-16,241 \pm 0,067$ , a minimalna suma kwadratów reszt wyniosła 13,34. Z tych danych wykorzystamy ocenę współczynnika  $A$  aby sprawdzić adekwatności wybranej wersji metody najmniejszych kwadratów. Tabela 4 przedstawia niezbędne informacje.

Tabela 4. Wyniki dopasowania zależności  $w = Az + B$

długość $L$ [mm]	wielkość $z = \ln \lambda \pm v$	wielkość $w = \ln \kappa \pm v$	niepewność $\delta_w = \hat{A}v$
91	$4,511 \pm 0,013$	$0,05599 \pm 0,00080$	0,038
114	$4,736 \pm 0,010$	$0,1054 \pm 0,0015$	0,030
148	$4,9972 \pm 0,0078$	$0,2359 \pm 0,0029$	0,023
185	$5,2204 \pm 0,0062$	$0,4386 \pm 0,0043$	0,019
215	$5,3706 \pm 0,0054$	$0,7040 \pm 0,0054$	0,016
234	$5,4553 \pm 0,0049$	$0,9024 \pm 0,0057$	0,015

Aby dopasowanie zależności (6) metodą najmniejszych kwadratów w postaci (7) miało sens, niepewność wielkości  $w$  musi być istotnie mniejsza, niż niepewność  $\delta_w = \hat{A}v$  tej wielkości wynikająca z niepewności  $v$  wielkości  $z$ . W Tabeli 4 widzimy, że tak nie jest: niepewność  $\delta_w$  jest dla wszystkich długości brzeszczotu większa od wyznaczonej bezpośrednio niepewności  $v$  wielkości  $w$ , przy czym dla niektórych przypadków dysproporcja jest znaczna. Oznacza to, że relację (5) należy przepisać do postaci:

$$\ln \lambda = \frac{1}{3} \ln \kappa + \frac{1}{3} \ln \delta, \quad \delta = \frac{1}{\beta} = \frac{Edh^3}{4g} \frac{1}{1 \text{ g} \cdot \text{mm}^2},$$

czyli dokonać odwrócenia ról zmiennych w zależności (6) i zminimalizować względem współczynników  $C$  oraz  $D$  następującą ważoną sumę kwadratów reszt:

$$R(C, D) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i^2} (z_i - Cw_i - D)^2, \quad (8)$$

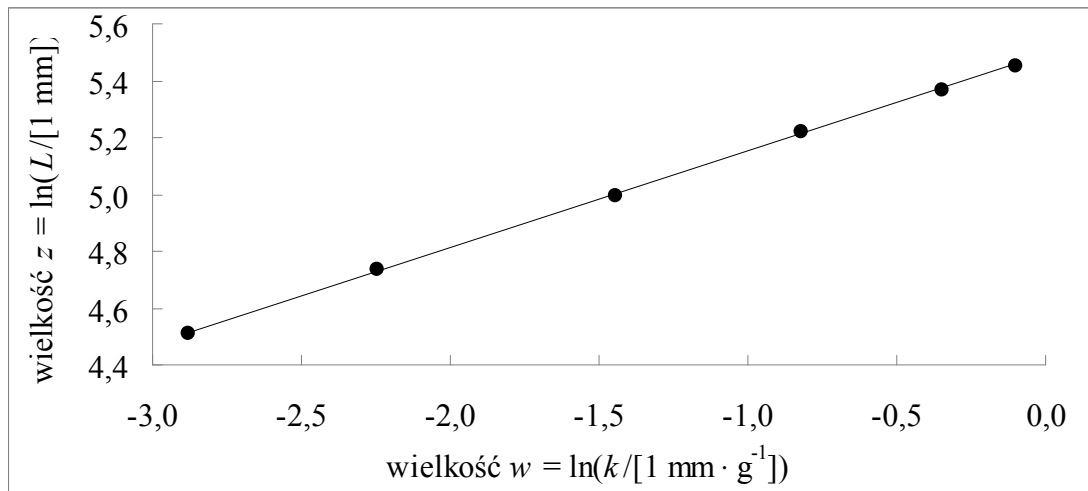
w której

$$C = \frac{1}{3}, \quad D = \frac{1}{3} \ln \delta.$$

W rezultacie takiej procedury otrzymano następujące wyniki:

$$\hat{C} = 0,3379 \pm 0,0035, \quad \hat{D} = 5,4912 \pm 0,0036,$$

przy czym minimalna ważona suma kwadratów reszt wyniosła  $R_{min} = 2,77$ . Jeśli potraktować tę wartość jako wartość zmiennej  $\chi^2$  o 4 stopnia swobody, to dopasowanie jest bardzo dobre, gdyż wartość krytyczna nawet dla prawdopodobieństwa 0,1 błędu pierwszego rodzaju wynosi 7,78 (tzw. wartość  $p$  test  $\chi^2$ , oznaczająca prawdopodobieństwo  $P(\chi^2 > R_{min})$ , wynosi 0,60). Rysunek 3 przedstawia punkty danych i omawianą zależność.



Rysunek 3. Relacja między współczynnikiem sprężystości i długością brzeszczotu

Wykorzystanie wartości  $g = 981,23 \text{ cm/s}^2$ , uznanej za wartość bezbłądną, przyspieszenia ziemskiego w Warszawie [2] pozwala, ze znajomości oceny parametru  $D$ , wyznaczyć ocenę

$$\hat{E} = \frac{4g}{dh^3} \exp(3\hat{D}) = (188 \pm 11) \text{ GPa}$$

modułu Younga materiału, z którego wykonano brzeszczot. W wyrażeniu tym przyspieszenie ziemskie musi być wyrażone w  $\text{mm/s}^2$ , a wymiary brzeszczotu w milimetrach.

### DYSKUSJA WYNIKÓW I WNIOSKI

Pomiary ugięcia brzeszczotu prowadzono poczynając od jego największej długości, stopniowo skracając ją w każdym kroku. Po każdym pomiarze ugięcia sprawdzano, czy po zdjęciu obciążenia brzeszczot wraca do pozycji początkowej i za każdym razem potwierdzano takie zachowanie. Oceny parametru  $b$  we wzorze (3) nie wykazują żadnej systematycznej zmiany wskazującej na deformacje brzeszczotu, a wartości minimalnej, ważonej sumy kwadratów reszt pozwalają na skwitowanie tej części analizy stwierdzeniem o braku sprzeczności prawa Hooke'a z danymi uzyskanymi z pomiarów ugięć brzeszczotu.

Niewysoka, minimalna wartość ważonej sumy kwadratów w dopasowaniu zależności między logarytmami długości brzeszczotu i współczynnika sprężystości jednoznacznie wskazuje na potęgową zależność między tym współczynnikiem a długością, natomiast zgodność oceny parametru  $C$  z wartością  $1/3$  na poziomie poniżej półtorej niepewności standardowej, potwierdza modelową, sześcienną zależność  $k = cL^3$ , ze stałą wartością  $c$ . Wyznaczona w tym podejściu ocena  $\hat{E} = (188 \pm 11) \text{ GPa}$  modułu Younga zgadza się, w ramach jednej do dwóch niepewności



standardowych, ze znaną wartością [3], wynoszącą od 200 GPa do 210 GPa dla stali po obróbce termomechanicznej.

Jednoczesną weryfikację zależności potęgowej i wykładnika tej potęgi można przeprowadzić w nieco inny sposób, od strony statystycznej bardziej właściwy, bo bardziej restrykcyjny i bezpośrednio realizujący wskazane zadanie. Otóż, przyjmując wartość współczynnika  $C = 1/3$  możemy, metodą najmniejszych kwadratów, wyznaczyć ocenę parametru  $D$  minimalizując taką oto ważoną sumę kwadratów:

$$R(D) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i^2} \left( z_i - \frac{1}{3} w_i - D \right)^2,$$

co prowadzi do  $\hat{D} = 5,4848 \pm 0,0083$ , przy czym wartość sumy  $R_{min}$  w minimum otrzymuje się równą 5,61. Jest to ciągle akceptowalna wartość, choć nieco większa od uzyskanej w dopasowaniu z dwoma parametrami, co spowodowane jest faktem, że dane preferują wartość parametru  $C$  trochę większą niż testowana wartość  $1/3$ . Zauważmy także zwiększenie niepewności oceny parametru  $D$ . Wzrost ten nie odbija się jednak na niepewności oceny modułu Younga, gdyż ta przyjmuje wartość

$$\hat{E} = (184 \pm 11) \text{ GPa}.$$

Jedynie zmiana oceny parametru  $D$  doprowadziła do nieznacznego obniżenia oceny modułu Younga, w dalszym ciągu zgodnej z wartościami cytowanymi w źródłach. Uzyskaną tą drogą ocenę modułu Younga traktujemy jako ostateczny wynik doświadczenia.

Warto zwrócić uwagę na różnice między różnymi wielkościami uzyskanymi na drodze minimalizacji sumy kwadratów reszt w postaci (7) oraz (8). Wyznaczona ocena współczynnika  $A$  różni się od oczekiwanej o 3,4 niepewności standardowe. Ważona suma kwadratów reszt (7) jest większa niż w podejściu (8), choć ciągle akceptowalna, bo zbliżona, przy czterech stopniach swobody, do wartości krytycznej 13,28 odpowiadającej prawdopodobieństwu 0,01 błędu pierwszego rodzaju. Największa różnica objawia się w ocenie modułu Younga, który wyznaczony z oceny współczynnika  $B$  ma wartość  $(149 \pm 13)$  GPa i jest ewidentnie niezgodny z danymi tablicowymi. Rozbieżność ta powinna nas definitywnie uczulić na znaczenie poprawnej identyfikacji zmiennej zależnej i niezależnej w modelu.

Najwięcej trudności w eksperymencie sprawiał pomiar ugięcia brzeszczotu. Wykonywany był „z ręki” i wymagał wiele uwagi i cierpliwości, aby jednocześnie przykładając miarkę do obu brzeszczotów nie zaburzyć ich wzajemnej odległości. Szczególnie dobitnie widać to dla danych uzyskanych przy długości brzeszczotu  $L = 148$  cm (w pomiarach przy  $L = 215$  cm jest faktycznie jeden punkt, który wiedzie do dużej sumy kwadratów reszt). Można sądzić, że wszelki następny identyczny eksperyment winien uprzednio skoncentrować się na ulepszeniu tej części pomiarów.

## LITERATURA

- [1] Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna, część I, Mechanika i akustyka*, PWN, Warszawa, 1972, s. 407.
- [2] H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1994, s. 529.
- [3] *Encyklopedia fizyki*, tom II, tabele na stronach: 297, 402 i 764, PWN, Warszawa, 1974.