Ćwiczenie nr 2 – WYZNACZANIE GĘSTOŚCI CIAŁ STAŁYCH

Instrukcja dla studenta (wersja z dnia 20 III 2018)

A. Majhofer i R. Nowak,

Niniejsze ćwiczenie jest nietypowe w tym względzie, że jego część rachunkowa odbywa się na tym samy spotkaniu, na którym wykonywane są pomiary i rozpoczyna się bezpośrednio po tym, gdy wszyscy w grupie te pomiary ukończą. Gdy nie cały materiał zostanie rozważony w trakcie spotkanie, analiza zadań kontynuowana jest na następnym, drugim, spotkaniu. Na tym drugim spotkaniu, po ukończeniu analizy materiału rachunkowego, prowadzący zajęcia omawia błędy, jakie pojawiły się w raportach z pierwszego ćwiczenia.

WYMAGANIA TEORETYCZNE

- Definicja gęstości masy i prawo Archimedesa
- Definicja niepewności standardowej pojedynczego pomiaru i niepewności standardowej średniej arytmetycznej i ich interpretacja
- Rozwinięcie Taylora

WSTĘP

W ćwiczeniu WAHADŁO MATEMATYCZNE rozpatrywaliśmy sytuację, gdy powtarzanie pomiarów prowadziło do różnych wyników – inaczej mówiąc, badaliśmy wpływ przypadkowych zaburzeń na rozkład wyników pomiarów, a zatem i na dokładność wyniku końcowego. Zdarza się jednak, że powtarzając pomiary uzyskujemy ten sam wynik. Nie należy stąd wyciągać wniosku, że pomiar jest bezbłędny i nie występują czynniki losowe. Oznacza to jedynie, że spowodowany przez nie rozrzut wartości badanej wielkości jest istotnie mniejszy niż rozdzielczość przyrządu. W tym ćwiczeniu dowiemy się, jak przy wyznaczaniu niepewności pomiaru należy ową rozdzielczość uwzględniać, a także jak na dokładność pomiaru wpływają różne metody pomiaru. Naszym zadaniem będzie wyznaczenie średniej gęstości metalowej próbki w kształcie walca, jak również ustalenie, jak dokładnie tę wartość mierzymy.

Do wyznaczania mas próbki posłużymy się wagą elektroniczną, natomiast objętość próbki będziemy wyznaczali trzema różnymi metodami pośrednimi:

A) mierząc średnicę i wysokość walca suwmiarką i korzystając ze wzoru na objętość walca;
B) za pomocą wyskalowanej menzurki;
C) za pomocą wagi, wykorzystując przy tym prawo Archimedesa.

***Zadanie* 1 (*obowiązkowe do domu – przed wykonaniem pomiarów*)**
a) Wyprowadź wzory (2), (3) *oraz* (4) *na wyznaczanie gęstości metodami A, B oraz C.*
b) Korzystając z informacji o dostępnych przyrządach pomiarowych (*patrz poniżej*) *oraz wiedząc, że średnica i wysokość próbki mieści się w przedziale* 2-5 cm, *spróbuj ocenić, która z metod pomiarowych pozwoli najdokładniej wyznaczyć gęstość próbki. Zaryzykuj uszeregowanie metod od najdokładniejszej do najmniej dokładnej. Jak rozpoznasz, czy wyniki uzyskane różnymi metodami są ze sobą zgodne?*

POMIARY

Masz do dyspozycji:

- pojedynczą próbkę w kształcie walca wykonaną z nieznanego metalu;
- wagę elektroniczną wyświetlającą wartość masy z dokładnością do 0,01 g;
- suwmiarkę z wyświetlaczem pozwalającym na odczyt długości z dokładnością do 0,01 mm;
- menzurkę z naniesioną skalą objętości – podziałka skali co 1cm^3;
- dużą zlewkę o pojemności ok. 300 cm^3;
- wodę destylowaną;
- termometr do pomiaru temperatury wody;
- statyw i cienką nić.

Wykonanie pomiarów

Podczas wykonywania pomiarów pamiętaj o szczegółowej dokumentacji, tj. notuj wszystkie mierzone wartości oraz wszystkie inne informacje, które mogą mieć znaczenie podczas analizowania uzyskanych wyników.

Pomiar mas próbki

- W pierwszym kroku wyznacz masę próbki. Rozpocznij od wypoziomowania i tarowania wagi. Wytrzyj próbkę ręcznikiem papierowym, aby usunąć z niej kurz i wszelkie zabrudzenia. Pomiar masy próbki powtórz co najmniej 3 razy. Jeśli wyniki będą różne, to kontynuuj serię pomiarów w celu wiarygodnego ocenienia parametrów rozkładu wyników (wartości średniej i jej niepewności standardowej). Jeśli wyniki będą się powtarzały, to możesz uznać, że odchylenia przypadkowe są mniejsze niż wartość odpowiadająca najmniejszej podziałce skali i nie ma potrzeby wydłużać serii pomiarów.

Wyznaczanie objętości próbki – metoda A

- Za pomocą suwmiarki wykonaj wielokrotne pomiary średnicy D próbki. Pamiętaj, że przedmiot wyglądający jak walec może w rzeczywistości nim nie być – poza przekonaniem się (jak podczas pomiaru masy), czy powtarzanie pomiaru w tym samym miejscu daje ten sam wynik, wykonaj pomiary kilku średnic tego samego przekroju w różnych miejscach i dla różnych wysokości. W ten sposób sprawdzisz, czy dopuszczalne jest założenie, że przekrój próbki na każdej wysokości jest kołem o tym samym promieniu.
- W podobny sposób powtarzaj pomiary suwmiarką wysokości H próbki w różnych miejscach.

Wyznaczanie objętości próbki – metoda B

- Za pomocą menzurki (o średnicy nieznacznie większej od średnicy próbki) wypełnionej **wodą z kranu** wyznacz objętość próbki. Nalej w tym celu wody do menzurki tak, aby jej poziom pokrywał się z jedną z kresek skali – zwróć uwagę jaki wpływ na dokładność odczytu ma kształt powierzchni wody (menisk) oraz położenie Twego oka względem powierzchni cieczy (paralaksa) – odczytaj objętość V_1. Następnie podwieś próbkę na cienkiej nitce (pozwala na to mała śrubka w jednej z podstaw każdej z próbek) i ostrożnie zanurz ją całkowicie w menzurce, a następnie odczytaj nowy poziom wody, tj. objętość V_2. Na ogół nowy poziom nie będzie pokrywał się z żadnym ze znaczników skali – czy można wiarygodnie odczytać ułamek szerokości działki do najbliższego znacznika? Jeśli tak, to wyznacz tę wartość i zapisz wynik. Czy powtarzanie tego pomiaru jest celowe? Jeśli tak, wykonaj odpowiednią serię pomiarów. Różnica odczytanych objętości to poszukiwana objętość próbki.

Wyznaczanie objętości próbki – metoda C

- Nalej wody destylowanej do zlewki tak, aby mogła się w niej całkowicie zanurzyć próbka. Zanotuj temperaturę wody.
- Wyznacz masę m_{zw} zlewki z wodą.
- Zawieś próbkę na statywie tak, aby wisząc swobodnie mogła całkowicie zanurzyć się w wodzie w zlewce stojącej na wadze. Po zanurzeniu próbka nie może opierać się o dno zlewki. Zwróć uwagę, czy do próbki nie przykleiły się (zwłaszcza od spodu) bąbelki powietrza.
- Odczytaj wskazania wagi, m_{zwp}, gdy podwieszona próbka jest całkowicie zanurzona w zlewce. Jeśli zdecydujesz się na wielokrotne pomiary, to pamiętaj, że między pomiarami należy osuszyć próbkę i nitkę (np. ręcznikiem papierowym) i rozpoczynać kolejny pomiar od pomiaru masy zlewki z wodą (dlaczego?).

ANALIZA DANYCH

Spostrzeżenie, że wynik pomiaru zależy od dokładności przyrządu wymaga uogólnienia wprowadzonej w ćwiczeniu WAHADŁO MATEMATYCZNE niepewności standardowej do postaci uwzględniającej zarówno obserwowany rozrzut wyników, jak i dokładności przyrządu.

W przypadku bezpośredniego pomiaru pojedynczej wielkości fizycznej najczęściej przyjmuje się, że uogólniona niepewność standardowa u wyniku dana jest jako:

$$u^2 = s^2 + \frac{1}{3}\Delta^2, \tag{1}$$

gdzie wielkość s to niepewność statystyczna pomiaru (w szczególności, jeśli wynikiem pomiaru jest średnia, to s podaje jej niepewność), zaś Δ **oznacza dopuszczalny błąd graniczny wskazania** stosowanego przyrządu. W niniejszym ćwiczeniu przyjmiemy, ze błąd ten wyznaczony jest wartością najmniejszej podziałki zwanej **zdolnością rozdzielczą** przyrządu. W następnym ćwiczeniu uogólnimy tę wielkość na przypadki, kiedy to nie tylko podziałka przyrządu odgrywa rolę, ale istotne są także dodatkowe informacje podane przez producenta w metryczce przyrządu. **UWAGA**. Współczynnik 1/3 we wzorze (1) wynika z powszechnie akceptowanego modelu rozkładu błędów wskazań przyrządu. Do tego też odniesiemy się w następnym ćwiczeniu.

***Zadanie* 2 (*na ćwiczeniach*)**

Pokaż, że jeśli dla próbki N par (x_i, y_i) wyników pomiarów, opisanych wartościami średnimi $\overline{x}$ oraz $\overline{y}$ i niepewnościami standardowymi u_x oraz u_y pojedynczego pomiaru, utworzymy liniową kombinacje wyników postaci $z_i = \alpha x_i + \beta y_i + \gamma$, gdzie α, β oraz γ to zadane stałe, to średnia $\overline{z}$, niepewność standardowa u_z pojedynczego pomiaru i niepewność standardowa $u_{\overline{z}}$ średniej arytmetycznej dla próbki wartości z_i wyznaczone są związkami:

$$\overline{z} = \alpha\overline{x} + \beta\overline{y} + \gamma, \quad s_z^2 = \alpha^2 s_x^2 + \beta^2 s_y^2 + 2\alpha\beta c_{xy}, \quad s_{\overline{z}}^2 = \alpha^2 s_{\overline{x}}^2 + \beta^2 s_{\overline{y}}^2 + \frac{2\alpha\beta}{N} c_{xy},$$

$$c_{xy} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right).$$

Jeśli w problemie występują niepewności przyrządu, statystyczne niepewności średnich należy zastąpić niepewnościami uogólnionymi.

Dla wszystkich rozważanych tu metod gęstość wyznaczana jest pośrednio. W dalszej analizie będziemy więc wyznaczać niepewności pomiarów pośrednich, obliczając tzw. **złożoną niepewność standardową**, zwana też **niepewnością wielkości mierzonej pośrednio**. Wykorzystamy do tego metodę przenoszenia niepewności popularnie określaną jako „propagacja małych błędów". Przyjmijmy, że prawdziwa wartość η pewnej wielkości fizycznej wyraża się związkiem $\eta = f(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)$ przez prawdziwe wartości μ_1, μ_2, ..., μ_n innych wielkości fizycznych. Jeśli wykonujemy **niezależne** pomiary wielkości μ_i, i = 1, 2, ..., n, i zamiast wartości μ_i otrzymujemy wartości x_i z niepewnościami u_i, a wtedy ocenę y wielkości η wyznaczamy za pomocą związku $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, a niepewność u_f tej oceny obliczamy przenosząc niepewności

$$u_f^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}u_i\right)^2.$$

Jest to rezultat rozwinięcia Taylora do wyrazów liniowych i zastosowanie wyników **Zadania 2**.

> **UWAGA!**
> **Jeśli argumenty x_i funkcji $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ wyznaczamy na podstawie serii pomiarów, to do zależności matematycznej podstawiamy wartość średnią serii**.

***Zadanie* 3 (*na ćwiczeniach*)**

a) *Zmierzono bok kwadratu otrzymując* x = 2,500 m z niepewnością u_x = 0,030 m. *Ile wynosi niepewność u_P oceny $\hat{P} = x^2$ pola P tego kwadratu?*
b) *Podaj kilka przykładów zależności fizycznych, które przyjmują postać:*

$$\eta = a\mu_1^{k_1}\mu_2^{k_2}\cdots\mu_n^{k_n},$$

gdzie a oraz k_i są pewnymi zadanymi stałymi, zaś wielkości μ_i to rozmaite wielkości fizyczne podlegające pomiarom. Jeśli w wyniku niezależnych pomiarów wielkości μ_i otrzymano wartość x_i z niepewnością u_i, pokaż, że niepewność u_η oceny $y = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ wielkości η wynosi

$$u_\eta^2 = y^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{k_i u_i}{x_i} \right)^2 .$$

***Zadanie* 4 (*na ćwiczeniach*)**

Wysokość H domu możemy wyznaczyć ze związku $H = L$ tg φ, gdzie L jest długością cienia rzucanego przez dom, wielkość φ zaś to kąt pod którym widać dom z końca cienia. Mierzona długość cienia $L_0 = 25$ m znana jest wystarczająco dokładnie, zmierzony zaś kąt $\varphi_0 = 45°$ z niepewnością $u_\varphi = 1°$. Wyznacz niepewność u_H obliczonej wysokości domu.

ANALIZA POMIARÓW BEZPOŚREDNICH

Pomiar masy *m* próbki

Dysponujemy zestawem n wartości m_i masy próbki uzyskanych za pomocą wagi z dokładnością odczytu $\Delta_m = 0{,}01$ g. Najlepsza ocena masy próbki to średnia

$$\overline{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m_i ,$$

a jej statystyczna niepewność standardowa, jak pokazaliśmy w **Ćwiczeniu 1**, to

$$s_{\overline{m}}^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(m_i - \overline{m} \right)^2 .$$

Uwzględnienie dokładności przyrządu, jak to podano wyżej, prowadzi do ostatecznej niepewności oceny wartości masy próbki

$$u_{\overline{m}}^2 = s_{\overline{m}}^2 + \frac{1}{3} \Delta_m^2 .$$

Wynik zapisujemy w postaci: $\overline{m} \pm u_{\overline{m}}$ wraz z mianem, np. (12,34 ± 0,56) g.

Metoda A – Pomiary średnicy *D* i wysokości *H* próbki

W podobny sposób znajdujemy średnią średnicę $\overline{D}$ i średnią wysokość $\overline{H}$ i ich niepewności

$$u_{\overline{D}}^2 = s_{\overline{D}}^2 + \frac{1}{3} \Delta_D^2 , \qquad u_{\overline{H}}^2 = s_{\overline{H}}^2 + \frac{1}{3} \Delta_H^2 ,$$

gdzie $\Delta_D = \Delta_H = 0{,}01$ mm, zaś wyniki to: $\overline{D} \pm u_{\overline{D}}$ oraz $\overline{H} \pm u_{\overline{H}}$.

Metoda B – Pomiar objętości *V* próbki

Ocenę objętości $V = V_1 - V_2$ próbki wyznaczamy jako różnicę poziomów wody w menzurce z zanurzoną próbką – odczyt V_2 – i bez próbki – odczyt V_1. Dla V_2 i V_1 możliwe jest przyjęcie naturalnego założenia, że dokładność odczytu wartości obu wielkości jest taka sama: $\Delta_{V1} = \Delta_{V2} = \Delta_V$. Jeśli uznałaś/uznałeś, że potrafisz odczytać wartości V_1 i V_2 z dokładnością do ułamka działki skali menzurki, to za wartość Δ_{V1} oraz Δ_{V2} przyjmij wartość tego ułamka. Zauważ, że bezpośrednio mierzone są wielkości V_1 i V_2, zaś wielkość V uzyskujemy w sposób pośredni.

Czy jest istotne, że w pomiarze używamy wody z kranu a nie wody destylowanej lub innej cieczy? Ciecz o jakich własnościach fizyko-chemicznych byłaby najwłaściwsza?

Metoda C – Wyznaczanie objętości *V* próbki z wykorzystaniem prawa Archimedesa

Metodą tą objętość próbki wyznaczamy na podstawie związku (dlaczego?)

$$V = \frac{m_{zwp} - m_{zw}}{\rho_w} ,$$

gdzie m_{zw} to masa zlewki z wodą destylowaną, m_{zwp} to mas zlewki z wodą i zawieszoną w niej próbką, zaś ρ_w to gęstość wody. W obliczeniach uwzględnij zależność gęstości wody od temperatury, którą możesz znaleźć w tablicach (jak dokładnie należy znać tę wartość, aby jej niepewność nie wpływała znacząco na dokładność wyniku końcowego?).

WYZNACZANIE GĘSTOŚCI

Średnia gęstość ρ ciała definiowana jest jako:

$$\rho = \frac{m}{V},$$

gdzie m jest masą ciała, a V jego objętością. Wartość masy wyznaczona została jedną metodą, zaś objętość trzema, co prowadzi do trzech ocen gęstości.

Metoda A

Objętość V próbki wyznaczamy na podstawie związku

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 H,$$

a więc gęstość wynosi

$$\rho = \frac{4m}{\pi D^2 H}, \tag{2}$$

a jej ocenę ρ_A wyznaczamy, podstawiając uzyskane wcześniej oceny odpowiednich wielkości, to jest $\bar{m}$, $\bar{D}$ oraz $\bar{H}$ (jak dokładnie należy znać wartość liczby π, aby jej błąd zaokrąglenia nie wpływał znacząco na dokładność wyniku końcowego?). Niepewność u_A uzyskanej oceny gęstości wyznaczamy za pomocą związku

$$u_A^2 = \rho_A^2 \left(\left(\frac{u_m}{\bar{m}} \right)^2 + \left(\frac{2u_{\bar{D}}}{\bar{D}} \right)^2 + \left(\frac{u_{\bar{H}}}{\bar{H}} \right)^2 \right).$$

Warto uświadomić sobie fakt, że metoda ta zakłada walcowy kształt próbki, co w ogólności nie musi być prawdą. Pozostałe metody są pod tym względem uniwersalne.

Metoda B

Ocenę gęstość wyznaczamy tu ze związku

$$\rho_B = \frac{m}{V_2 - V_1}, \tag{3}$$

a jej niepewność ze wzoru

$$u_B^2 = \rho_B^2 \left(\left(\frac{u_{\bar{m}}}{\bar{m}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_{V1}}{\sqrt{3}\left(V_2 - V_1\right)} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_{V2}}{\sqrt{3}\left(V_2 - V\right)_1} \right)^2 \right),$$

jeśli pomiar każdej z objętości V_1 i V_2 wykonano jednokrotnie lub też

$$u_B^2 = \rho_B^2 \left(\left(\frac{u_{\bar{m}}}{\bar{m}} \right)^2 + \left(\frac{u_{\bar{V}}}{\bar{V}} \right)^2 \right),$$

jeśli wykonano serię pomiarów par objętości V_1 i V_2, z których obliczano serię różnic V, z różnic średnią $\bar{V}$, jej statystyczną niepewność $s_{\bar{V}}$ i ostateczną niepewność objętości próbki

$$u_{\bar{V}} = \sqrt{s_{\bar{V}}^2 + \frac{\Delta_{V1}^2}{3} + \frac{\Delta_{V2}^2}{3}}.$$

Metoda C

Tym razem ocenę gęstości otrzymujemy jako

$$\rho_C = \frac{m\rho_w}{m_{zwp} - m_{zw}}, \tag{4}$$

natomiast niepewność wyznaczamy za pomocą wzoru

$$u_C^2 = \rho_C^2 \left(\left(\frac{u_{\bar{m}}}{\bar{m}} \right)^2 + 2\left(\frac{u_m}{m_{zwp} - m_{zw}} \right)^2 + \left(\frac{u_{\rho w}}{\rho_w} \right)^2 \right),$$

jeśli pomiar każdej z mas m_{zwp} i m_{zw} był wykonany jednokrotnie lub też

$$u_C^2 = \rho_C^2\left(\left(\frac{u_m}{\overline{m}}\right)^2 + \left(\frac{u_{mww}}{\overline{m}_{ww}}\right)^2 + \left(\frac{u_{\rho w}}{\rho_w}\right)^2\right),$$

jeśli wykonano serię pomiarów mas m_{zwp} i m_{zw}, z których obliczano różnicę $m_{ww} = m_{zwp} - m_{zw}$, z różnic średnią $\overline{m}_{ww}$, jej statystyczną niepewność s_{mww} i ostateczną niepewność u_{mww}

$$u_{mww}^2 = s_{mww}^2 + \frac{2}{3}\Delta_m^2 .$$

Ponieważ pomiar mas m_{zwp} i m_{zw} odbywa się za pomocą wagi wykorzystywanej w pomiarze masy próbki, wielkość Δ_m znana jest na podstawie pomiaru tej masy.

***Zadanie* 5 (*na ćwiczeniach*)**

Dla wszystkich trzech metod pomiaru gęstości wyprowadź podane wyżej wzory wyrażające niepewność gęstości przez wielkości mierzone bezpośrednio oraz ich niepewności.

***Zadanie* 6 (*na ćwiczeniach*)**

Tablice podają wartość funkcji f(*x*) *zaokrąglone do pewnej liczby cyfr znaczących. Oznaczmy symbolem* Δ *najmniej znaczącą jednostkę wartości funkcji* (*np. jeśli wartości funkcji zostały zaokrąglone do jednej setnej, to* Δ = 0,01). *Chcemy uzyskać z tych tablic liniowo interpolowaną wartość w punkcie x między punktami* x_1 *i* x_2, *w których funkcja przyjmuje odpowiednio wartości* y_1 *i* y_2. *Wyznacz odchylenie standardowe interpolowanej wartości w punkcie x. Dla jakiej wartości argumentu x odchylenie to jest najmniejsze i ile ono wynosi*?

***Zadanie* 7 (*do domu – dla treningu*)**

Aby zmierzyć odległość D między pewnym punktem A na lądzie a boją B na jeziorze, wyznaczono odległość L między punktem A i wybranym, także na lądzie, punktem C, jak również kąt α *między odcinkami AB i AC oraz kąt* γ *między odcinkami AC i BC. Przyjmij, że niepewność pomiaru długości L wynosi* u_L, *zaś niepewności pomiarów kątów są identyczne i wynoszą u. Wyznacz niepewność* u_D *pomiaru odległości D między punktami A i B.*

***Zadanie* 8 (*do domu – dla treningu*)**

W celu wyznaczenia objętości V stożka możemy zmierzyć jego średnicę D podstawy i wysokości H i skorzystać ze związku $V = \pi D^2 H/12$ *lub też zmierzyć długość L tworzącej stożka oraz średnicę podstawy i skorzystać ze związku* $V = \frac{1}{12}\pi D^2\sqrt{L^2 - (D/2)^2}$ *lub też zmierzyć długość tworzącej i wysokość i odwołać się do związku* $V = \frac{1}{3}\pi\left(L^2 - H^2\right)H$. *Przypuśćmy, że wielkości D, H oraz L mierzymy z tą samą niepewnością u. Która z metod zapewni najmniejszą niepewności oceny objętości?*

***Zadanie* 9 (*do domu – dla treningu*)**

Dwaj studenci otrzymali jako zadanie pomiar masy dwóch ciał za pomocą szalkowej wagi laboratoryjnej, wyposażonej w komplet odważników, z których najmniejszy miał masę Δ =1 g. *Student A zmierzył masę każdego z ciał bezpośrednio tj. kładąc każde z nich oddzielnie na jedną szalkę, a odważniki na drugą. Student B natomiast, najpierw zmierzył sumę mas obu ciał łącznie, a następnie położył jedno ciało na jednej szalce, a drugie na drugiej szalce i wyrównał wagę dokładając odpowiednie odważniki na tej szalce, na której leżało ciało o mniejszej masie. Układając stosowne równania, student B mógł obliczyć masę każdego z ciał. Jaką dokładność pomiaru masy każdego z ciał uzyskali studenci?*

***Zadanie* 10 (*do domu – dla treningu*)**

Sferometr to trzy pionowe, sztywno połączone nóżki umieszczone w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku L= 6 cm. *W środku tego trójkąta znajduje się śruba mikrometryczna, której koniec można przesuwać, w kierunku prostopadłym do płaszczyzny trójkąta, w kontrolowany sposób, z możliwością pomiaru pozycji tego końca. Ustawiając sferometr na powierzchni kuli, dolne krawędzie nóżek wyznaczają płaszczyznę odcinającą część kuli w postaci czaszy, której wysokość H można zmierzyć za pomocą śruby mikrometrycznej. Dysponując wielkościami H oraz L, można* *znaleźć promień R kuli:* $R = \frac{H}{2} + \frac{L^2}{6H}$. *Jak dokładnie powinniśmy znać rozstaw L nóżek sferometru, jeśli wielkość H* = 1 mm *jest mierzona z niepewnością* u_H = 0,01 mm?

***Zadanie* 11 (*do domu – dla treningu*)**

Przy pomiarze ogniskowej f cienkiej soczewki skupiającej, przedmiot umieszczamy w odległości x od niej, a obraz uzyskujemy w odległości y od soczewki, po jej drugiej stronie, przy czym:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}.$$

Wielkość x oraz y mierzymy z tą samą niepewnością u.

a) *Podaj wyrażenie na niepewność* u_f *ogniskowej.*
b) *Rozważ, jak zmienia się niepewność wyznaczanej wartości ogniskowej, jeśli zmieniamy odległość x. Podaj wyrażenie, które będzie opisywało zależność niepewności* u_f *od wielkości x. Pamiętaj, że przy zmianie odległości x, zmienia się odległość y!*
c) *Naszkicuj wykres tej zależności.*
d) *W jakiej odległości x od soczewki powinniśmy umieścić przedmiot, aby niepewność ogniskowej była najmniejsza?*
e) *Ile wtedy wynosi ta niepewność?*

***Zadanie* 12 (*do domu – dla treningu*)**

Ogniskową f okrągłej soczewki rozpraszającej o średnicy D można zmierzyć w pogodny dzień, mierząc zewnętrzną średnicę P jasnego pierścienia, jaki soczewka ta skierowana na słońce wytwarza na ekranie. Jeśli L jest odległością ekranu od soczewki, to:

$$f = \frac{LD}{D - P + aL},$$

gdzie a = $\mathrm{tg}\varphi$ = 0,0094 *i kąt* φ *jest średnicą kątową Słońca i jest on znany dokładnie. Przyjmij, że wielkości D, P oraz L mierzone są z niepewnościami odpowiednio* u_D, u_P *oraz* u_L.

a) *Ile wynosi niepewność* u_f *oceny długości ogniskowej soczewki?*
b) *Jak niepewność* u_f *zależy od odległości L ekranu od soczewki* (*pamiętaj, że przy zmianie odległości L zmienia się średnica P jasnego pierścienia*)*? Ponieważ chcemy zmierzyć ogniskową zadanej soczewki, przyjmij, że jej średnica D jest znana dokładnie.*
c) *Naszkicuj postać tej zależności.*
d) *W jakiej odległości L od soczewki powinniśmy ustawić ekran, aby niepewność naszego pomiaru była minimalna, jeśli dysponujemy wstępną oceną* f_0 *wartości ogniskowej?*
e) *Ile będzie wynosiła niepewność ocenianej długości ogniskowej w warunkach optymalnego pomiaru?*

***Zadanie* 13 (*do domu – dla treningu*)**

Wielkość fizyczną μ *wyznaczamy w sposób pośredni, korzystając ze związku postaci* $\mu = c\mu_x^{\alpha}\mu_y^{\beta}$, *gdzie c,* α *i* β *to stałe liczbowe, zaś* μ_x *oraz* μ_y *to nieznane wartości dokładne bezpośrednio mierzonych wielkości fizycznych, które w niezależnych pomiarach znajdujemy jako x oraz y o znanych niepewnościach* u_x *i* u_y, *co prowadzi do oceny* $\hat{\mu} = cx^{\alpha}y^{\beta}$. *Jakie warunki muszą spełniać potęgi* α *i* β, *aby znając wstępną ocenę* μ_0 *wielkości* μ, *wielkość tę można było ocenić, w wyniku jednokrotnego pomiaru wielkości* μ_x *oraz* μ_y, *z minimalną możliwą niepewnością?*

PRACA Z WYKRESEM

***Zadanie* 14 (*na ćwiczeniach*)**

Autorzy (*J.R. Smithson i E.R. Pinkston, Half-Life of a Water Column as a Laboratory Exercise in Exponential Decay, Am. J.Phys.,* **28**,740 (1960)) *szklaną kolumnę o wysokości* 4 *stóp i średnicy* 21/32 *cala napełnili wodą. W dnie kolumny wykonali otwór i pozwolili wypływać wodzie przez długi, poziomy wąż o średnicy wewnętrznej około* 1,5 mm. *W doświadczeniu obserwowali wysokość h słupa wody w kolumnie jako funkcję czasu t. Wyniki eksperymentu przedstawia Rys.* 1. *Dopasuj, za pomocą linijki, najlepszą prostą do punktów danych doświadczalnych i wyznacz oceny* *jej parametrów. Podaj postać zależność h(t) wysokości słupa wody w kolumnie jako funkcję czasu.*

RAPORT KOŃCOWY

Wyniki pomiarów, w postaci pliku tekstowego, pliku do programu Excel pakietu MS Office lub pliku do programu Calc pakietu Libre/Open Office proszę przesłać e-mailem prowadzącemu zajęcia ***niezwłocznie*** *po złożeniu raportu. Raport będzie czekał na sprawdzenie, aż to uczynisz.*

Na stronie, z której pobrałaś/pobrałeś niniejszą Instrukcję, znajduje się arkusz kalkulacyjny do programu Calc pakietu Open Office/Libre Office przygotowany do przeprowadzenia obliczeń koniecznych do przygotowania opisu. W przeciwieństwie do arkusza do Ćwiczenia 1*, nie zawiera on żadnych zaprogramowanych wzorów i obliczenia musisz sporządzić samodzielnie. Nie jest on niezbędny do ćwiczeń rachunkowych, więc nie musisz go przynosić na zajęcia. Co więcej – nie musisz go w ogóle używać. Możesz przygotować własny lub wykorzystać swój inny, ulubiony program od obliczeń numerycznych. Arkusz ten jest niczym innym, jak tylko próbą podpowiedzenia Ci, jak zorganizować, w sposób kontrolowany, obliczenia, które musisz wykonać do swojego opisu i ewentualnie dostarczyć Ci wzoru, jak takie obliczenia można przeprowadzać w przyszłości.*

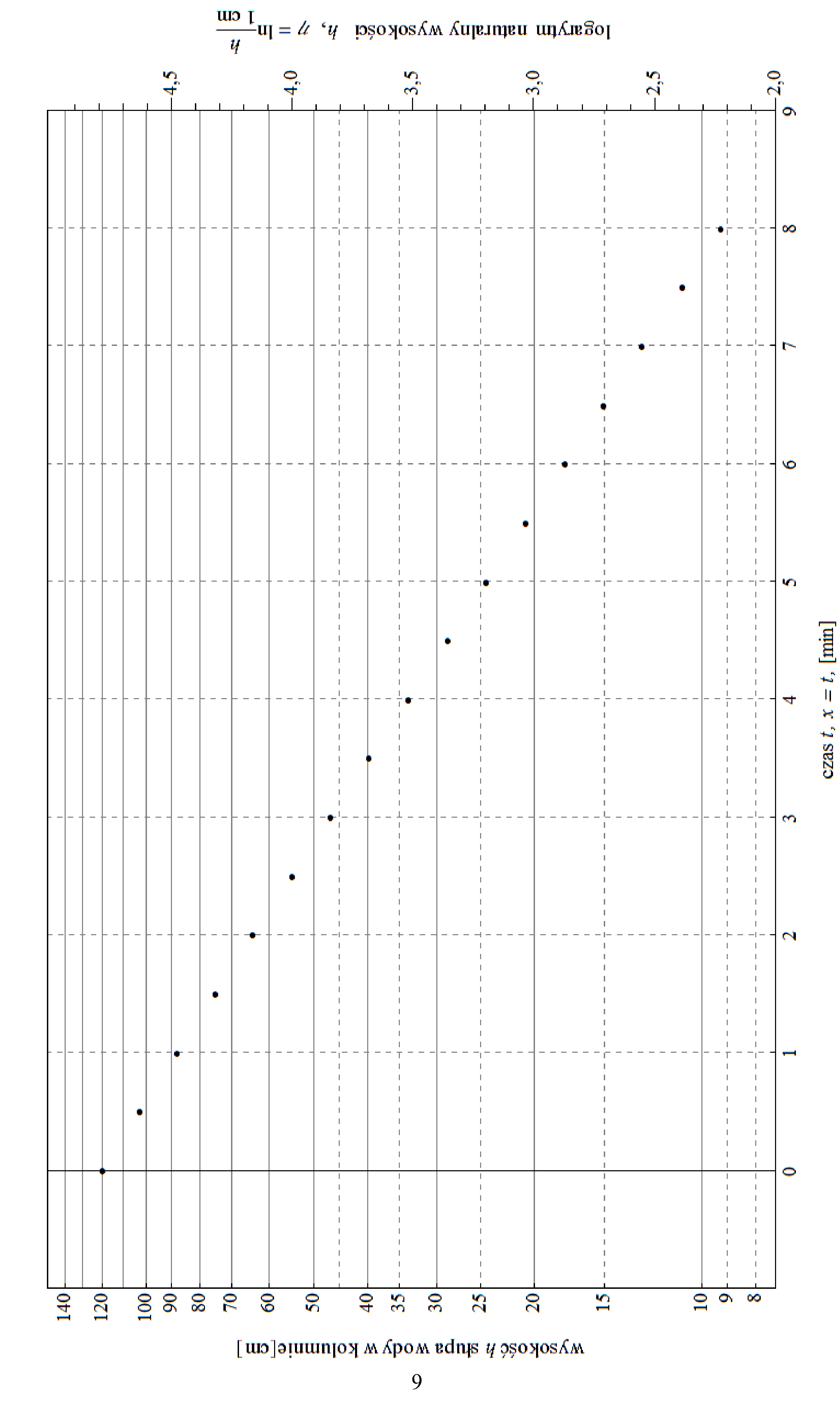
Przygotuj raport końcowy zgodnie z ogólnymi zasadami podanymi w Instrukcji do Ćwiczenia 1 – WAHADŁO MATEMATYCZNE. W szczególności, raport powinien zawierać:

1. w kilkuzdaniowym streszczeniu: stwierdzenie o zastosowaniu różnych metod oraz wartości uzyskanych tymi metodami ocen gęstości wraz z niepewnościami tych ocen zapisanymi wg reguł przedstawionych w Instrukcji do Ćwiczenia 1;
2. we wstępie: sformułowanie zadania, tj. przedstawienie zagadnienia pomiaru gęstości różnymi metodami wraz ze stosownymi wzorami niezbędnymi do rozwiązania postawionego problemu;
3. w części odnoszącej się do pracy eksperymentalnej: informacje o używanych przyrządach i ich dokładnościach (najmniejszej działce odczytu), opis metod pomiaru i ich przebiegu oraz surowe wyniki pomiarów – zapisane wraz z nieistotnymi zerami ukazującymi dokładność; pamiętaj – raport, to nie dziennik laboranta, w którym prezentowana jest czasowa sekwencja podejmowanych działań – w raporcie prezentowane kroki pomiarowe powinny mieć uzasadnienie merytoryczne wynikające z postawionego problemu;
4. w części odnoszącej się do analizy danych: omówienie analizy pomiarów bezpośrednich i pośrednich wraz z wynikami liczbowymi – tu powinny się znaleźć uzyskane oceny gęstości wraz ich niepewnościami dla wszystkich metod;
5. w dyskusji i wnioskach końcowych: omówienie dokładności wyników z różnych metod; tu możesz także przedstawić własne refleksje na temat problemu; w szczególności powinna się tu pojawić informacja o tym, z jakiego metalu mogła być wykonana próbka;
6. w spisie literatury: poprawnie zredagowane, wykorzystane w raporcie źródła, o ile w raporcie była potrzeba odwoływania się do źródeł zewnętrznych.

Raport powinien zawierać wszystkie surowe wyniki pomiarów, aby można było, bez odwoływani się do zapisków sporządzonych w trakcie wykonywani doświadczenia, powtórzyć wszystkie obliczenia i sprawdzić ich poprawność.

Raport należy oddać, wraz z **ostemplowanym arkuszem**, otrzymanym przy przystępowaniu do pomiarów, w Sekretariacie Pracowni na następnych zajęciach, po zakończeniu drugiego spotkania do niniejszego doświadczenia. W raporcie możesz wykorzystać jedynie własne dane.

Raport nie może uzyskać zaliczenia, jeśli choć jedna z wartości liczbowych jest błędna z powodu błędów rachunkowych bądź wyboru błędnej metody analizy!



Rys.1. Zależność wysokości słupa wody w kolumnie od czasu