Analiza niepewności pomiarowych
Wstęp do analizy danych
Wykład 5
Pomiary pośrednie i "propagacja małych niepewności"

1 Uwagi wstępne

Poprzedni wykład poświęcony był bezpośrednim pomiarom pojedynczej wielkości fizycznej. Przedstawione zostały sposoby wyznaczania wartości oczekiwanej i wariancji rozkładu błędòw przypadkowych na podstawie wynikòw serii niezależnych, ròwnoważnych pomiaròw. W rozważaniach tych o rozkładzie jakiemu podlega błąd przypadkowy zakładaliśmy jedynie, że jego wartość oczekiwana i wariancja są skończone. Ocenę wartości oczekiwanej (średnią arytmetyczną) przyjęliśmy za wynik pomiaru. Ocena niepewności tak otrzymanego wyniku wymagała uwzględnienia dokładności wskazań użytyego przyrządu – przyjęliśmy (model błędu kwantyzacji), że błąad odczytu podlega rozkładowi jednostajnemu. Niepewność wyniku określiliśmy jako pierwiastek z wariancji sumy zmiennych: *błąd przypadkowy* + *błąd odczytu*. Tę część rozważań zakończyliśmy sformułowaniem testu "3σ". Skonstruowanie testu wymagało przyjęcia konkretnego modelu rozkładu błędu przypadkowego. Przyjęliśmy, że jest to rozkład Gaussa. Test pozwala nam poròwnywać wynik pomiaru z przewidywaniami modeli teoretycznych oraz poròwnywać między sobą wyniki ròżnych pomiaròw tej samej wielkości fizycznej.
W kolejnej części wykładu będziemy zajmowali się oceną wartości oczekiwanych i wariancji rozkładòw zmiennych losowych, ktòre są funkcją innych zmiennych losowych. Będziemy przy tym korzystali z ogòlnych założeń o skończonych wartościach: wartości oczekiwanych, wariancji oraz macierzy kowariancji rozkładòw argumentòw tej funkcji.

2 Pomiary pośrednie

§18. Znaczna część pomiaròw w nauce i technice, to pomiary pośrednie. Korzystamy w nich ze znanej postaci funkcji łączącej wielkość, ktòrej wartość chcemy poznać, z innymi wielkościami, ktòre potrafimy bezpośrednio zmierzyć. Postać tej funkcji możemy znać na podstawie rozważań teoretycznych lub związkòw odkrytych wcześniej na drodze badań doświadczalnych. Zakładamy, że postać tej funkcji znamy dokładnie, a potrzebna jest nam jej wartość dla konkretnych wartości jej arguentòw, ktòre potrafimy zmierzyć bezpośrednio. Argumenty funkcji (zbiòr wielkości x_i) są zmiennymi losowymi. Wyprowadzając potrzebne nam wzory przyjmujemy jedynie ogòlne założenia dotyczące rozkładòw tych zmiennych: zakładamy, że istnieją i są skończone ich wartości oczekiwane i wariancje oraz kowariancje tych zmiennych (jeśli zmienne nie są niezależne) i traktujemy te wartości jak znane liczby. Po wyprowadzeniu wzoròw końcowych podstawiamy do nich nasze najlepsze oceny tych wielkości (w tej części wykładu symbole s^2 z odpowiednimi indeksami ($\bar{x}_i$), jak dla ocen na podstawie pròby z rozkładu (serii pomiaròw), i ogòlniejsze symbole $u^2(\bar{x}_i)$, jak dla pełnej oceny niepewności, stosowane są zamiennie).

Twierdzenie na stronie 39 "slajdòw do wykładu" dotyczy przypadku, gdy interesująca nas wielkość jest liniową funkcją innych wielkości, ktòre potrafimy mierzyć bezpośrednio. Dowòd polega na skorzystaniu z linowości wartości oczekiwanej po rozwinięciu kwadratu, ktòrego wartość oczekiwaną obliczamy, a następnie bezpośrednim skorzystaniu z założeń dotyczących rozkładòw zmiennych losowych – argumentòw funkcji. Przeważnie zakłada się, że argumenty funkcji są wielkościami mierzonymi niezależnie i tym samym są niezależnymi zmiennymi losowymi. Ogòlniejszy przypadek przedstawiony jest w *Uwadze*. Ròżna od zera macierz kowariancji może pojawić się, gdy zmienne x_i użyte do obliczenia $\hat{y}$ zostały wyznaczone na drodze pośredniej (jak w przypadku parametròw prostej – przykładem takich wielkości są np. parametry prostej wyznaczone metodą najmniejszych kwadratòw – patrz dalsza część wykładu).

Dla zależności liniowej uzyskane we *Wniosku* wzory są ścisłe. Bardzo często jednak związek wielkości y z wielkościami x_i jest nieliniowy – tzn $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ nie jest funkcją linową. Wòwczas obliczamy wartość tej funcji podstawiając najlepsze znane nam oceny wartości oczekiwanych jej argumentòw $\hat{x}_i$. Jest to dobre przybliżenie $f(\mu_i, \ldots, \mu_k)$, jeśli $\hat{x}_i$ dobrze przybliżają μ_i – wartości oczekiwane zmiennych x_i. Dla oceny dokładności tego przybliżenia obliczamy:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\left(\hat{y}-\eta\right) &= \mathcal{E}\left(f(\hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_k) - f(\mu_1, \ldots, \mu_k)\right) \\
&= \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\hat{x}_i - \mu_i) + \frac{1}{2}\sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\hat{x}_i - \mu_i)(\hat{x}_j - \mu_j) + \ldots\right)
\end{aligned}$$

W powyższym wzorze pochodne cząstkowe f brane są w punkcie $(\mu_1, \ldots, \mu_k)$ – to są liczby (nie zmienne losowe). Wartość oczekiwana pierwszej z sum (pojedynczej) w drugiej linijce wynosi zero (bo $\mathcal{E}(\hat{x}_i) = \mu_i$). Pozostaną więc wyrazy kwadratowe i wyższe w odchyleniach $(\hat{x}_i - \mu_i)$. Podstawienie $\hat{x}_i$ zamiast μ_i do funkcji f będzie dobrym przybliżeniem, gdy drugie pochodne f będą małe – tzn. f będzie niewiele odbiegała od funkcji liniowej, gdy $(x_i - \mu_i)$ zmienia się w przedziale $\pm u(\hat{x}_i)$ (wtedy w tym przedziale, pierwsze pochodne f są w przybliżeniu stałe).
Wyznaczenie niepewności $\hat{y}$ wymaga obliczenia $\mathcal{E}((\hat{y} - f(\mu_1, \ldots, \mu_k))^2)$. Znowu stosujemy rozwinięcie f, jak poprzednio. Jak widać, wiodącym wyrazem tak obliczanej wariancji $\hat{y}$ jest kwadrat pierwszej z sum w drugiej linijce przytoczonego przed chwilą wzoru. Pochodne f obliczane w punkcie $(\mu_1, \ldots, \mu_k)$ są liczbami, a więc (w tym przybliżeniu) obliczenia sprowadzają się do zastosowania Twierdzenia ze str. 39. Znaleźliśmy przybliżoną wartość wariancji $\hat{y}$. Nie znamy jednak wartości pochodnych f w $(\mu_1, \ldots, \mu_k)$. W tym miejscu stosujemy następne przybliżenie i zamiast μ_i do obliczania pochodnych bierzemy $\hat{x}_i$.

Podobnie jak dla funkcji liniowej otrzymane wyrażenie można uogòlnić na przypadek, gdy argumenty f nie są niezależne (w sensie niezależności zmiennych losowych) – odpowiedni wzòr jest w ostatniej linijce strony 40 "slajdòw do wykładu".
Wyprowadzony w tym paragrafie wzòr opisuje "propagację niepewności" argumentòw do niepewności wartości funkcji. Według dawnej terminologii wzòr ten nazywano "propagacją małych błędòw" – ta nazwa ma bardzo długą tradycję i dlatego zachowałem ją w tytule tej części wykładu.

Przykład
Chcemy wyznaczyć przyspieszenie ziemskie g na podstawie pomiaròw czasu trwania okresu T wahadła o długości l. Znamy wzòr na okres małych drgań wahadła: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, a więc:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Budujemy wahadło. Wykonujemy serię pomiaròw jego długości l i na ich podstawie wyznaczamy $\hat{l} \pm u(\hat{l})$, a następnie wprawiamy wahadło w ruch i wielokrotnie mierzymy jego okres T, co pozwala nam wyznaczyć $\hat{T} \pm u(\hat{T})$. Zgodnie z rozważaniami tego paragrafu obliczmy g jako:

$$\hat{g} = 4\pi^2 \frac{\hat{l}}{\hat{T}^2}.$$

następnie obliczamy niepewność $u(\hat{g})$:

$$u^2(\hat{g}) = \left(\frac{\partial \hat{g}}{\partial \hat{l}} u(\hat{l})\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{g}}{\partial \hat{T}} u(\hat{T})\right)^2 = \left(\frac{4\pi^2 u(\hat{l})}{\hat{T}}\right)^2 + \left(\frac{-2 \cdot 4\pi^2 \hat{l}}{\hat{T}^3} u(\hat{T})\right)^2.$$

Po uporządkowaniu wyrazòw dostrzegamy, że ten wzòr można uprościć do postaci:

$$u^2(\hat{g}) = \hat{g}^2 \left((\frac{u(\hat{l})}{\hat{l}})^2 + 4(\frac{u(\hat{T})}{\hat{T}})^2 \right).$$

Otrzymany wzòr pozwala nam nie tylko wyznaczyć niepewność $u(\hat{g})$, ale także ocenić, ktòra z wielkości: $\hat{l}$, czy $\hat{T}$ daje większy wkład do niepewności wyniku końcowego i tę obserwację uwględnić podczas planowania pomiaròw.

Uwagi: Tak prostą postać wzoru na niepewność wyniku jak otrzymaliśmy powyżej – kwadrat wielkości obliczonej mnożony przez sumę kwadratòw względnych niepewności argumentòw – można otrzymać tylko w przypadku funkcji postaci: $f(x_1, x_2, x_3, \ldots) = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} \ldots$.

Zadania do Wykładu 5

Zadanie 1. Podczas przepływu prądu o natężeniu I przez grzałkę o oporze R w czasie t, wydzielane jest ciepło $Q = I^2 R t$. Wyznacz ocenę ilości wydzielonego ciepła Q i niepewność tej oceny, jeśli $R = (30{,}0 \pm 0{,}2)\ \Omega$, $I = (10{,}0 \pm 0{,}1)$ A oraz $t = (50 \pm 5)$ s.

Zadanie 2. Korzystając ze wzoru Snella:

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

student miał wyznaczyć współczynnik załamania n pewnego gatunku szkła. Wyniki jego pomiaròw to, kąt padania $\alpha = 31°\pm1°$oraz kąt załamania $\beta = 20°\pm1°$. Wyznacz ocenę wartość współczynnika załamania n i niepewność tej oceny.

Zadanie 3. Dysponując rònią pochyłą o zmiennym kącie nachylenia z naklejonym na nią papierem, monetą 5 zł oraz kątomierzem o podziałce co 0,5°, studentka wyznaczała współczynnik μ tarcia statycznego monety o papier. Zwiększając powoli kąt nachylenia ròwni, na ktòrej spoczywała moneta, studentka rejestrowała wartość kąta granicznego, przy którym moneta zaczynała się ześlizgiwać z równi. Powtarzając pięciokrotnie pomiar otrzymała następującą serię wartości kąta granicznego: 14,5°, 14,5°, 14,0°, 14,0 oraz 15,0°. Współczynnik tarcia statycznego $\mu = \text{tg}\ \alpha$, gdzie α jest kątem granicznym. Wyznacz najlepszą ocenę wartości współczynnika μ oraz niepewność tej oceny.

Zadanie 4. Do wykonania doświadczenia chemicznego potrzebna jest objętość $V = 500\ \text{cm}^3$ wody destylowanej. Student dysponuje szklaną, walcową menzurką o wewnętrznej średnicy $D = (8,0 \pm 0.1)$ cm i wysokości $H = 15$ cm oraz elektroniczną wagą kuchenną podającą masę z dokładnością $\Delta = 5$ g. W tablicach student odczytał gęstość $\rho = 0,99821\ \text{g/cm}^3$ wody destylowanej w temperaturze 20°C (taka temperatura panowała w laboratorium). Wysokość słupa wody w menzurce student mmierzy linijką o podziałce $\delta = 0,1$ cm. Którą z dwóch metod powinien wybrać, aby jak najdokładniej odmierzyć potrzebną ilość wody destylowanej:

- Czy powinien odmierzyć odpowiednią wysokość słupa wody w menzurce?
- Czy powinien postawić pustą menzurkę na wadze, a następnie ostrożnie wlewać do niej wodę, aż odczyta odpowiednią różnicę mas?

Odpowiedź należy poprzeć odpowienimi obliczeniami.