Analiza niepewności pomiarowych
Wstęp do analizy danych
Wykłady 2 i 3
Rozkłady prawdopodobieństwa: dwumianowy, Poissona i normalny (Gaussa)

1 Uwagi wstępne

Wykład 1 zakończyliśmy definicją pomiaru jako porównania z wzorcem nierzonej wielkości. Zdefinowaliśmy także pojęcie błędu pomiaru jako różnicy wyniku pomiaru i *wartości dokładnej*. §5 *Slajdów/transparencji do wykładu* kończy podział błędów pomiaru na: błędy grube, systematyczne oraz przypadkowe. Zaczynamy od sformułowania matematycznego modelu błedów przypadkowych. Posłużymy się **rachunkiem prawdopodobieństwa**. Aksjomaty rachunku prawdopodobieństwa przypomniane zostały w §6 *Slajdów/transparencji do wykładu*. Podczas wykładów 2 i 3 przedyskutowane zostały przykłady rozkładów prawdopodobieństwa: rozkład dwumianowy, rozkład Poissona i rozkład normalny (zwany też rozkładem Gaussa. Poniżej przytaczone są ich definicje i wyprowadzenia przydatnych wzorów.

2 Rozkład dwumianowy

Wykonujemy n losowych prób. Wynikiem każdej próby jest sukces lub porażka (trzeciej możliwości nie ma). W każdej próbie prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu wynosi p, $0 \leq p \leq 1$, a porażki q. Oczywiście, $p + q = 1$. Próby są niezależne, tzn. wynik kolejnej próby jest niezależny od wyników wszystkich poprzednich prób.

Pytanie: Jakie jest przwdopodobieństwo $P(k; n, p)$ uzyskania dokładnie k sukcesów w serii n takich prób?

Jeśli oznaczymy sukces jako $+$, a porażkę jako $-$, to wynik kolejnych n prób zapiszemy jako ciąg n znaków $+$ i $-$:

$$++-+--+\ldots\ldots+---++--+\ ,$$

w którym wystąpi k znaków $+$ i $n-k$ znaków $-$. Prawdopodobieństwo uzyskania konkretnego ciągu uzyskamy obliczając wartość iloczynu n liczb p i q, w którym znaki $+$ zastąpimy prawdopodobieństwem p, a znaki $-$ prawdopodobieństwem q:

$$P(++-+--+\ldots+---++--+) = p\cdot p\cdot q\cdot p\cdot q\cdot q\cdot p\ldots p\cdot q\cdot q\cdot q\cdot p\cdot p\cdot q\cdot q\cdot p = p^k\cdot q^{n-k}.$$

Prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie k sukcesów otrzymamy sumując prawdopodobieństwa wszystkich możliwych ciągów k znaków $+$ i $n-k$ znaków $-$ różniące się położeniami tych znaków. Wiemy, że n różnych obiektów możemy przestawić na $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$ sposobów (przyjmujemy, że $0! = 1$). Jednak wszystkie przestawienia między sobą znaków $+$ w naszym ciągu opisują ten sam wynik, podobnie jest z przestawieniami znaków $-$. Liczbę różnych ciągów n znaków $+$ i $n-k$ znaków $-$ otrzymamy, gdy podzielimy $n!$ przez liczbę możliwych przestawień znaków $+$ i znaków $-$. Otrzymamy, że liczba różnych ciągów z dokładnie k znakami $+$ wynosi:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Prawdopodobieństwo $P(k;n,p)$ uzyskania dokładnie k sukcesów w n niezależnych próbach, gdy prawdopodobieństwo sukcesu w każdej próbie wynosi p jest równe:

$$P(k;n,p) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Sprawdzamy, że suma prawdopodobieństw otrzymania wszystkich możliwych wartości k od $k=0$ do $k=n$ wynosi 1, tak jak powinna:

$$\sum_{k=0}^{k=n} P(k;n,p) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

Otrzymany **rozkład prawdopodobieństwa dyskretnej zmiennej losowej** k nazywany jest **rozkładem dwumianowym**.

Obliczmy ile wynosi **wartość oczekiwana** $\mathcal{E}(k)$ **liczby sukcesów** k, .

$$\mathcal{E}(k) = \sum_{k=0}^{k=n} kP(k;n,p) = \sum_{k=1}^{k=n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Definiujemy nowy wskaźnik sumowania, $l = k-1$ i korzystamy z własności silni:
$k! = k \cdot (k-1)! = k \cdot (l)!$. Otrzymujemy:

$$\mathcal{E}(k) = np \sum_{l=0}^{l=n-1} \frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!} p^l q^{n-1-l} = np(p+q)^{n-1} = np.$$

W ostatnich dwóch równościach skorzystaliśmy z rozwinięcia dwumianu Newtona i z faktu, że $p+q=1$.

Obliczmy także ile wynosi wariancja $Var(k)$ liczby sukcesów k, nazywana także średnim odchyleniem kwadratowym:

$$Var(k) := \sum_{k=0}^{k=n} (k - \mathcal{E}(k))^2 P(k;n,p).$$

W obliczaniu wariancji bardzo pomocne jest poniższe twierdzenie.
Twierdzenie: Dla dowolnej zmiennej losowej x, dla której istnieją wartości oczekiwane $\mathcal{E}(x)$ oraz $\mathcal{E}(x^2)$ i obie te wartości są skończone, zachodzi równość:

$$\mathcal{E}((x - \mathcal{E}(x))^2 = \mathcal{E}(x^2) - (\mathcal{E}(x))^2$$

Dowód przez wykonanie obliczeń. Korzystamy z faktów: (a) wartość oczekiwana jest liczbą oraz (b) wartość oczekiwana dowolnej zmiennej losowej x mnożonej przez dowolną liczbę α równa jest wartości oczekiwanej x mnożonej przez tęliczbę:

$$\mathcal{E}(\alpha x) = \alpha \mathcal{E}(x).$$

Wykonujemy obliczenia:

$$\mathcal{E}(((x - \mathcal{E}(x))^2) = \mathcal{E}(x^2 - 2x\mathcal{E}(x) + (\mathcal{E}(x))^2) = \mathcal{E}(x^2) - 2\mathcal{E}(x)\mathcal{E}(x) + (\mathcal{E}(x))^2 = \mathcal{E}(x^2) - (\mathcal{E}(x))^2.$$

Do obliczenia $Var(k)$ potrzebujemy więc już tylko obliczyć $\mathcal{E}(k^2)$. Możemy postępować podobnie jak poprzednio. Będziemy musieli dwukrotnie zmieniać wskaźnik sumowania... Spróbujmy jednak innej metody. Potraktujmy nasz wzór tak, jakby p i q były niezależnymi zmiennymi i dopiero na samym końcu obliczeń skorzystajmy z faktu, że $p + q = 1$.

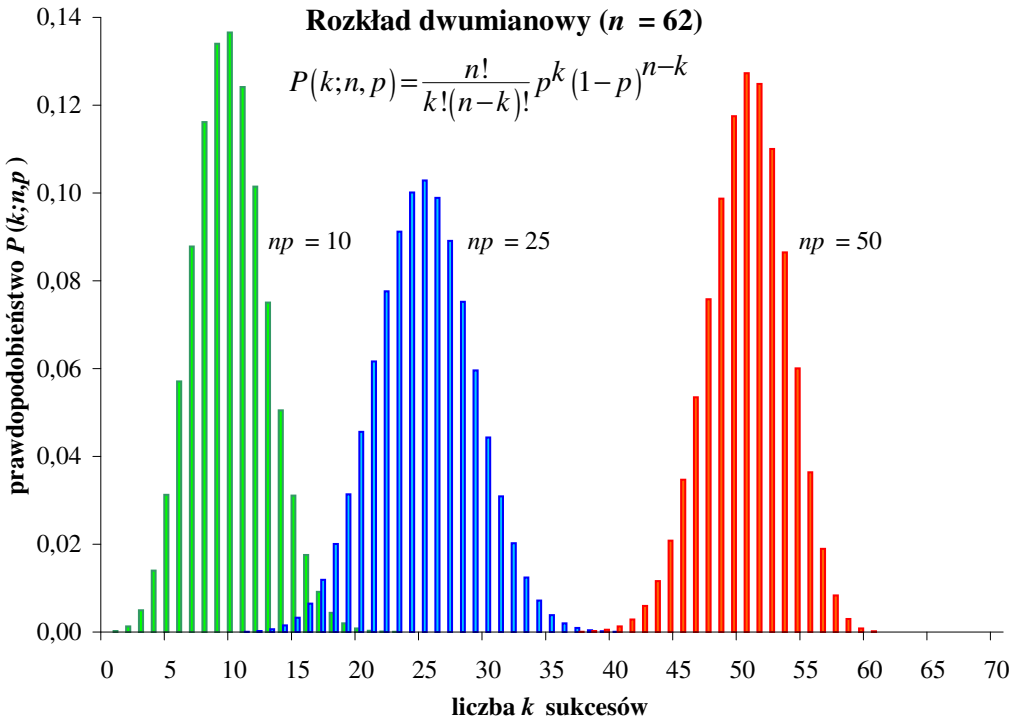
$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(k^2) &= \sum_{k=0}^{k=n} k^2 P(k; n, p) \\
&= \sum_{k=1}^{k=n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= p\frac{\partial}{\partial p} p \frac{\partial}{\partial p} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} p^k q^{n-k} \right).
\end{aligned}$$

Suma w nawiasie jest rozwinięciem dwumianu $(p+q)^n$. Skorzystajmy z tego:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(k^2) &= p\frac{\partial}{\partial p} p \frac{\partial}{\partial p} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} p^k q^{n-k} \right) \\
&= p\frac{\partial}{\partial p} p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^n \\
&= p\frac{\partial}{\partial p} p (n(p+q)^{n-1} \\
&= p(n(p+q)^{n-1} + n(n-1)p(p+q)^{n-2} \\
&= np + n(n-1)p^2 \\
&= np + n^2p^2 - np^2
\end{aligned}$$

W ostatnich dwóch linijkach skorzystaliśmy z faktu że $p + q = 1$. Możemy teraz skorzystać z udowodnionego przed chwilą twierdzenia i otrzymać:

$$\mathcal{E}((k - \mathcal{E}(k))^2) = np - np^2 = np(1-p) = npq.$$



Histogramy prawdopodobieństw rozkładu dwumianowego dla $n = 62$ i różnych wartośści p.

3 Rozkład Poissona

Zbadajmy graniczną postać rozkładu dwumianowego, gdy liczba prób $n \to \infty, p \to 0$ i jednocześnie wartość oczekiwana liczby sukcesów pozostaje stała, $np = \lambda$. Podstawmy wartość $p = \lambda/n$ do wzoru na $P(k; n, p)$:

$$\begin{aligned} P(k;n,p) &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy z $n \to \infty$ skorzystaliśmy z faktu, że iloczyn skończonej liczby (k jest znane i skończone) wyrazów mających skończone granice dąży do iloczynu tych granic oraz tego, że, gdy $n \to \infty$:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}.$$

Otrzymaliśmy rozkład prawdopodobieństwa dyskretnej zmiennej losowej k zwany **rozkładem Poissona**:

$$P(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Podobnie jak w przypadku rozkładu dwumianowego sprawdzamy, że podany wyżej rozkład prawdopodobieństwa liczby sukcesów „sumuje się" do 1 oraz obliczymy wartości oczekiwane $\mathcal{E}(k), \mathcal{E}(k^2)$ oraz $\mathcal{E}((k - \mathcal{E}(k))^2)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k;\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Skorzystaliśmy z rozwinięcia funkcji e^{λ} w szereg potęgowy. Przekonaliśśmy się, że tak, jak być powinno suma prawdopodobieństw jest równa 1.

Obliczmy **wartość oczekiwaną liczby sukcesów**, k, podlegającej rozkładowi Poissona:

$$\mathcal{E}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(k;\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} = \lambda.$$

Obliczmy także wartość oczekiwaną k^2:

$$\mathcal{E}(k^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k;\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{\lambda^{l+1}}{l!} e^{-\lambda}.$$

Ostatnią z równości otrzymaliśmy zmieniając wskaźnik sumowania na $l = k - 1$. Zauważamy, że otrzymaliśmy sumę poprzedniego wyniku mnożonego przez λ oraz λ:

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{\lambda^{l+1}}{l!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{l=0}^{\infty} l \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

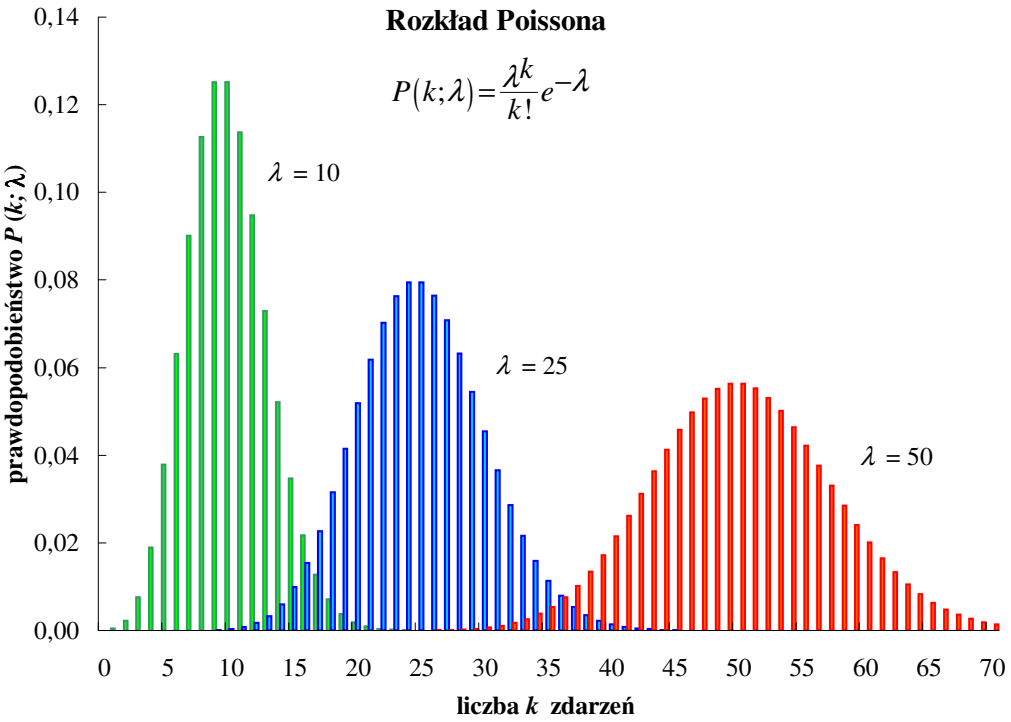
Korzystając z poprzednio idowodnionego twierdzenia otrzymujemy wartość
wariancji dyskretnej zmiennej losowej podlegającej rozkładowi Poissona:

$$Var(k) = \mathcal{E}((k - \mathcal{E}(k))^2) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Warto zapamiętać, że **wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej podlegającej rozkładowi Poissona są sobie równe**.

Rozkład Poissona jest przydatny do analizowania zjawisk, w których prawdopodobieństwo „sukcesu" jest małe, a wartość oczekiwana liczby sukcesów jest znana. Na przykład liczba goli strzelonych przez jednego zawodnika w jednym meczu. Jeśli na podstawie wyników wielu meczów ustalimy, że zawodnik ten strzela średnio $\lambda = 1,2$ gola w jednym meczu, to rozkład Poissona pozwoli nam obliczyć prawdopodobieństwa strzelenia przez niego $k = 0, 1, 2, \ldots$ bramek w kolejnym meczu (takie analizy są rzeczywiście wykonywane przez zawodowych komentatorów sportowych). Podobną analizę możemy przprowadzić w odniesieniu do liczby samochodów przejeżdżających w ciągu godziny mało uczęszczaną uliczką.

W fizyce rozkład Poissona używany jest między innymi do analizowania procesów rozpadu promieniotwórczego.



Histogramy prawdopodobieństw rozkładu Poissona dla różnych wartośści λ.

4 Rozkład Gaussa – Graniczna postać rozkładu dwumianowego ($n \to \infty$).

Oblicznie prawdopodobieństw zadanych rozkładem dwumianowym dla dużej liczby prób n jest kłopotliwe ze względu na konieczność obliczania silni dużych liczb. Zbadajmy jak zachowuje się $P(k;p,n)$ dla dużych n. Posłużymy się przybliżeniem silni za pomocą wzoru Stirlinga:

$$n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\sqrt{2\pi}.$$

do wyrażenia przybliżonej wartości logarytmu naturalnego $P(k;n,p)$. Dla uproszczenia notacji zapisujmy dalej $\ln(P(k;n,p)$ jako $\ln(P)$:

$$\begin{aligned}
\ln(P) &= \ln\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}\right) \\
&\approx (n+\frac{1}{2})\ln(n) - (k+\frac{1}{2})\ln(k) - (n-k+\frac{1}{2})\ln(n-k) + k\ln(p) - (n-k)\ln(q) - \frac{1}{2}\ln(2\pi) \\
&= -(k+\frac{1}{2})\ln(\frac{k}{np}) - (n-k+\frac{1}{2})\ln(\frac{n-k}{nq}) - \frac{1}{2}\ln(2\pi npq).
\end{aligned}$$

Znak przybliżonej równości związany jest z podstawieniem przybliżenia Stirlinga zamiast $n!, k!(n-k)!$. Dalej dokonywaliśmy jedynie przegrupowania wyrazów i korzystaliśmy z własności funkcji logarytm. Otrzymany wzór nie jest jeszcze dość wygodny do badania zachowania $P(k;n,p)$ dla dużych n. Przyjrzyjmy się histogramom $P(k;n,p)$. Dosyć łatwo zauważyć, że maksimum osiągan ejest dla $k \approx np$, a wartości istotnie różne od zera skupiają się w pobliżu tego maksimum, w obszarze wartości: $np - \sqrt{npq} \le k \le np + \sqrt{npq}$. Zdefiniujmy więc nową zmienną:

$$x := \frac{k-np}{\sqrt{npq}},$$

Mamy wówczas:

$$k = np + x\sqrt{npq}\ ;\ n-k = nq - x\sqrt{npq}$$

Podstawiamy oba wyrażenia do otrzymanego wyżej wzoru na przybliżenie $\ln(P)$. Dostajemy:

$$\ln(P) \approx -\frac{1}{2}\ln(2\pi npq) - (np + x\sqrt{npq} + \frac{1}{2})\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (nq - x\sqrt{npq} + \frac{1}{2})\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right).$$

Do znalezienia przydatnego rozwinięcia $\ln(P)$ potrzebne będzie nam jeszcze rozwinięcie logarytmu naturalnego. Zacznijmy od przedstawienia logarytmu za pomocą całki:

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{dt}{1+t}.$$

Interesuje nas rozwinięcie dla małych wartości z. Przyjmijmy $|z| < 1$, wówczas także $|t| < 1$ w wyrażeniu podcałkowym i możemy to wyrażenie przedstawić jako sumę szeregu geometrycznego:

$$\ln(1+z) = \int_0^z dz\left(\sum_{l=0}^{\infty}(-t)^l\right) = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{z^{l+1}}{l+1} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots.$$

Dla $\ln(1-z)$, gdy $|z|<1$ otrzymujemy rozwinięcie (wystarczy w powyższym wzorze podstawić $-z$ w niejsce z):

$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \dots .$$

Po podstawieniu do przybliżenia $\ln(P)$, wykonaniu mnożeń i uporządkowaniu wyrazów według potęg x i n otrzymujemy przybliżenie:

$$\ln(P) \approx -\frac{1}{2}\ln(2\pi npq) - \frac{x^2}{2} + \frac{x(p-q)}{2\sqrt{npq}} - \frac{x^2(p^2+q^2)}{npq} + \frac{x^3(q^2-p^2)}{6\sqrt{npq}} + \dots .$$

Dalsze wyrazy, pominięte w powyżższym rozwinięciu, mają w liczniku x w potędze 4 lub większej, a w mianowniku npq w potęędze $3/2$ lub większej. Ze wzrostem n pozostają dwa dominujące wyrazy:

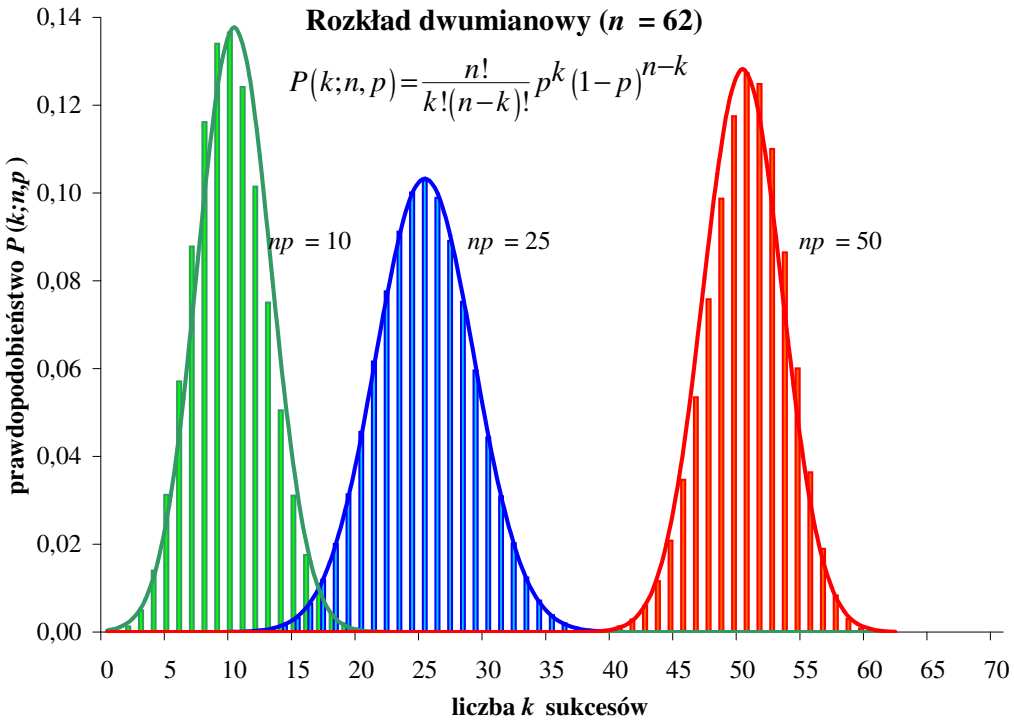
$$\ln(P) \approx -\frac{1}{2}\ln(2\pi npq) - \frac{x^2}{2}.$$

Ostatecznie, dla dla dużych n otrzymaliśmy przybliżżenie:

$$P(k;n,p) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp(-\frac{x^2}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right).$$

Rysunek na następnej stronie pokazuje, jak dobrze, otrzymane przybliżenie (linie ciągłe) „pasuje" do histogramów $P(k;n,p)$ dla $n=62$ i różnych wartości p. Dla niebieska linia ciągła, dla $p=25/62$ przebiega niemal dokładnie przez wierzchołki słupków niebieskiego histogramu. Dla $p=10/62$) – histogram i linia zielona i dla $p=50/62$ – histogram i linia czerwona, zgodność jest nieco gorsza, ale ciągle niezła. Zielony histogram przewyższa odpowiednią ciągłą krzywą na lewo od swego maksimum, a czerwony na prawo – zgodnie z „wpływem" pierwszego odrzuconego wyrazu,liniowego w x, w przybliżeniu $\ln(P)$.

Otrzymany wzór przybliżony ułatwia posługiwanie się rozkładem dwumianowym, gdy liczba prób jest duża, a prawdopodobieństwo sukcesu jest bliskie $p=1/2$. W dalszej części wykładu – §11 i następne *Slajdów/transparencji do wykładu* – wzóposłuży do sformułowania modelu rozkładu prawdopodobieństwa dla wartości przyjmowanych przez błędy przypadkowe.



Porównanie dokładnych wartości prawdopodobieństw rozkładu dwumianowego (histogramy) z obliczonymi za pomocą wyprowadzonego wyżej wzoru przybliżonego (linie ciągłe).