Wykład 7 – odpowiedzi do zadań

1 Uwagi wstępne

Wykład 7 poświęcony jest metodom testowania hipotez korzystającym ze statystyk podlegających rozkładowi χ^2. Omawiane w nim techniki dotyczyły testowania jakości dopasowania funkcji do wyników pomiarów oraz testowania hipotez dotyczących rozkładów prawdopodobieństwa. Zadania dotyczą jedynie pierwszego z tych zagadnień i tylko takie problemy pojawią się w zestawie zadań sprawdzianu zaliczającego wykład. Testowanie rozkładów prawdopodobieństwa jest zwykle znacznie bardziej pracochłonne od testowania jakości dopasowania funkcji do danych doświadczalnych. W przypadku porównania z rozkładem ciągłym przeprowadzenie testu wymaga wyznaczenia zbioru prawdopodobieństw p_i za pomocą całkowania. W przykładowych zadaniach ilustrujących materiał wykładu ograniczymy się więc do zagadnień związanych z badaniem dopasowania funkcji do wyników pomiarów.

Testowanie jakości dopasowania funckji jest zwykle ostatnim etapem analizy wyników doświadczeń. Zaczynamy od zebrania dannych $x_i \longmapsto y_i \pm u_i; i = 1, \ldots, N$. Otrzymane wyniki analizujemy jakościowo wykonując wykresy z użyciem różnych skal osi odciętych i rzędnych – tzn. wykreślamy wyniki np. w zmiennych $(x, y), (x, \ln y), (\ln x, \ln y)$ – w celu dostrzeżenia prawidłowości. Następnie "odgadujemy" postać funkcji opisującej zależność y od x, a potem znajdujemy wartości parametrów tej funkcji. Dopiero ostatnim krokiem jest statystyczny test zgodności wybranej funkcji (z dopasowanymi parametrami) z zebranymi wynikami pomiarów.

Zadania kończące *Wykład 7* zostały dobrane tak, żeby zilustrować różne przypadki: a) gdy test nie upoważnia do odrzucenia hipotezy – Zadania 1 i 2 lub b) pozwala hipotezę odrzucić – Zadanie 3. W Zadaniu 1 sprawdzamy, czy obserwowaną zależność można opisać za pomocą proporcjonalności badanych wielkości – najlepszą wartość współczynnika znajdujemy metodą najmniejszych kwadratów. W Zadaniu 2 podana w treści wartość współczynnika jest częścią testowanej hipotezy – taki charakter mają np.badania jakości wyprodukowanych elmentów, gdy sprawdzamy, czy ich parametry odpowiedają podanym wartościom nominalnym.

Dane w poniższych zadaniach zostały wymyślone przez ich autorów. Dyskusje otrzymanych wyników starają się jednak ilustrować rzeczywiste pytania, jakie pdczas analizy danych często mogą się pojawiać.

2 Treści i rozwiązania zadań

Dla ułatwienia śledzenia rozwiązań przypominamy tabelę wartości krytycznych *statystyki* $\mathcal{R}$ obliczonych przy założeniu, że podlega ona rozkładowi χ^2.

Tabela wartości krytycznych χ^2

	Liczba stopni swobody								
α	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,01	9,21	11,35	13,28	15,08	16,81	18,47	20,09	21,67	23,21
0,05	5,99	7,82	9,49	11,07	12,59	14,07	15,51	16,92	18,31
0,10	4,61	6,25	7,78	9,24	10,64	12,02	13,36	14,68	15,99
0,15	3,79	5,32	6,75	8,12	9,45	10,75	12,03	13,29	14,53

Zadanie 1. Równanie stanu gazu doskonałego ma postać: $pV = nRT$, gdzie p oznacza ciśnienie, V objętość, n liczbę moli gazu, T temperaturę gazu w skali Kelvina, a R to uniwersalna stała gazowa. Student badał zmiany objętości V dla $n = 0,05$ mola gazu od jego temperatury T przy stałym ciśnieniu $p = 1015$ hPa. Po ustaleniu temperatury T, pomiar objętości V powtarzał wielokrotnie i obliczał wartość średnią $\bar{V}$. Wyniki pomiarów zebrał w tabeli:

Temperatura T/K	293	298	303	308	313
Średnia objętość $\bar{V}$/litr	1,196	1,207	1,243	1,274	1,293

Niepewności kolejnych wartości $\bar{V}$ były bardzo zbliżone i wynosiły $u_V = 0,010$ litra. Przyjmij, że liczba moli n i ciśnienie p gazu znane są wystarczająco dokładnie.
Przeprowadź test hipotezy: *objętość gazu pod stałym ciśnieniem jest wprost proporcjonalna do temperatury gazu w skali Kelvina.* Jako dopuszczalne prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy prawdziwej przyjmij wartość $\alpha = 0,05$.

Rozwiązanie. Z treści zadania i danych wynika, że temperaturę T należy uznać za wielkość mierzoną (i kontrolowaną) *dokładnie.* Niepewnośść wszystkich pomiarów V jest taka sama i wynosi $u_V = 0,01$ litra. testujemy hipotezę: Objętość V jest proporcjonalna do T:

$$V = aT.$$

Ocenę wartości stałej proporcjonalności, $\hat{a}$, musimy znaleźć za pomocą metody najmniejszych kwadratów, a następnie podstawić otrzymaną wartość $\hat{a}$ do wzoru na $\mathcal{R}$ i porównać z wartością krytyczną odczytaną w tabeli umieszczonej nad treściami zadań. W tabeli wyników pomiarów mamy dane dla $N = 5$ punktów pomiarowych. Dane w tym zadaniu są identyczne z danymi *Zadania 3* do *Wykładu 6*, gdzie wyznaczyliśmy stałą proporcjonalności:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{5} V_i T_i}{\sum_{i=1}^{5} T_i^2};$$

otrzymaliśmy $\hat{a} = 0{,}004101599$ litr/K. Musimy teraz obliczyć wartość:

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{5} \frac{(V_i - \hat{a}T_i)^2}{u_v^2};$$

otrzymujemy $\mathcal{R} = 4{,}6598$. Metodą najmniejszych kwadratów znaleźliśmy wartość jednego parametru, a więc $k = 1$ i liczba stopni swobody równa, $N - k$, wynosi 4. W związku z tym porównujemy otrzymaną wartość $\mathcal{R} = 4{,}6598$ z odczytaną w tabeli wartością krytyczną dla $\alpha = 0,05$ i liczby stopni swobody $N - k = 4$ – jest to wartość $\mathcal{R}_{crit} = 9{,}49$. Wartość obliczona dla naszych danych jest mniejsza od wartości krytycznej odczytanej z tabeli, a więc nie mamy powodu odrzucać testowanej hipotezy.
Odpowiedź: Na podstawie podanych wyników pomiarów nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy: *objętość gazu pod stałym ciśnieniem jest wprost proporcjonalna do temperatury gazu w skali Kelvina.*

Zadanie 2. Studentka miała za zadanie wyznaczyć nieznany opór R pewnego opornika. Do dyspozycji miała układ elektryczny, w którym mogła zmieniać napięcie na oporniku oraz amperomierz, którym dla ustalonego napięcia U mierzyła natężenie I prądu płynącego przez opornik. Wartość napięcia ustalana była z bardzo dużą dokładnością (przyjmij, że niepewność wartości U jest pomijalnie mała). Niepewność pomiaru natężenia prądu nie była pomijalna i wynosiła u, zgodnie wartościami podanymi w tabeli. Zależność między natężeniem I i napięciem opisuje wzór: $U = RI$. Otrzymane wyniki studentka zapisała w tabeli:

Numer pomiaru	1	2	3	4	5
I [mA]	0,48	1,24	2,14	2,35	2,91
U [mV]	1,12	2,31	4,15	4,95	5,81
u [mA]	0,05	0,10	0,10	0,15	0,20

Przeprowadź test hipotezy: *natężenie prądu płynącego w przewodniku jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia, a współczynnik proporcjonalności wynosi 0,5 Ω^{-1}*. Jako dopuszczalne prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy prawdziwej przyjmij wartość $\alpha = 0{,}01$.

Rozwiązanie. Z opisu w treści zadania wynika, że U należy przyjąć za zmienną niezależną znaną dokładnie. Niepewności pomiarów I podane są w tabeli. Mamy więc przeprowadzić test, czy wyniki zgodne są z zależnością:

$$I = aU$$

z wartością $a = 0{,}5\ \Omega^{-1}$ oznaczającą, że opór $R = 2\ \Omega$. Tego typu testy mogą być przeprowadzane np. podczas badania jakości wyprodukowanych oporników. Mamy tu podaną wartość współczynnika proporcjonalności. Pozostaje więc sprawdzenie, czy obliczona z tym współczynnikiem wartość statystyki $\mathcal{R}$ jest większa (odrzucamy hipotezę), czy mniejsza (nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy) od odpowiedniej wartości krytycznej z tabeli nad treścią zadań. Obliczamy:

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{5} \frac{(I_i - 0,5\Omega^{-1}U_i)^2}{u_i^2}$$

Otrzymujemy $\mathcal{R} = 4{,}400$. Mamy $N = 5$ punktów pomiarowych i żadnego parametru dopasowanego metodą najmniejszych kwadratów: $k = 0$. Tym samym liczba stopni swobody wynosi 5 i otrzymaną wartość $\mathcal{R}$ porównujemy z wartością krytyczną dla $\alpha = 0{,}01$ i liczby stopni swobody 5: $\mathcal{R}_{crit} = 15{,}08$. Wartość krytyczna jest większa od obliczonej dla danych studentki.
Odpowiedź: Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy: *natężenie prądu płynącego w przewodniku jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia, a współczynnik proporcjonalności*

wynosi 0,5 Ω^{-1}. Ta odpowiedź, oczywiście, dotyczy tylko opornika badanego w tym doświadczeniu.

Zadanie 3. Student badał przemianę izochoryczną gazu. Podgrzewał pewną ilość tego gazu w zamkniętym naczyniu i mierzył ciśnienie p i temperaturę T w skali Kelwina i uzyskał wyniki podane w tabeli. Przyjmij, że temperatura była mierzona z niepewnością $u = 0,5$ K, a ciśnienie było mierzone dostatecznie dokładnie.

Ciśnienie p (atmosfery)	1,0	1,4	1,6	2,0
Temperatura T/K	309,0	431,5	496,5	623,0

Przeprowadź test hipotezy: *w stałej objętości iloraz ciśnienia i temperatury gazu w skali Kelvina jest wielkością stałą*. Jako dopuszczalne prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy prawdziwej przyjmij wartość $\alpha = 0{,}10$.

Rozwiązanie Mamy $N = 4$ punkty pomiarowe (p, T), przy czym o p zakładamy, że jest znane dokładnie, a wszystkie wartości T znane są z tą samą niepewnością $u(T) = 0,5$ K. Testowana hipoteza orzeka, że iloraz wartość ilorazu p/T nie zależy od numeru punktu pomiarowego. Testowanie hipotezy zaczynamy od wyznaczenia najlepszej wartości tego ilorazu. Wartość tę znajdujemy metodą najmniejszych kwadratów. Najpierw jednak musimy obliczyć kolejne wartości ilorazów i niepewności tych wartości. Niepewność każdego z ilorazów obliczymy stosując wzór na "propagację niepewności": $u(p/T) = pu(T)/T^2$. Po podstawieniu danych, dla kolejnych punktów pomiarowych otrzymujemy następujące wartości $p/T \pm u(p/T)$:

$(3,23625 \pm 0,00524) \cdot 10^{-3}$ atm/K
$(3,24450 \pm 0,00376) \cdot 10^{-3}$ atm/K
$(3,22256 \pm 0,00325) \cdot 10^{-3}$ atm/K
$(3,21027 \pm 0,00258) \cdot 10^{-3}$ atm/K

Średnia ważona ilorazu $(p/T)_w = 3,22313$ atm/K. Tę wartość podstawiamy do obliczeń wartości $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\left((p/T)_i - (p/T)_w\right)^2}{u^2(p/T)_i}.$$

Otrzymujemy wartość $\mathcal{R} = 63,504$. Tę wartość porównujemy z wartoą krytyczną $\mathcal{R}_{crit} = 6,25$ odczytaną z tabeli dla 3 stopni swobody (bo 4 punkty pomiarowe i 1 parametr – średnia ważona – wyznaczony metodą najmniejszych kwadratów) i wartości krytycznej $\alpha = 0,10$. Obliczona wartość jest znacznie większa od wartości krytycznej odczytanej w tabeli.
Odpowiedź: Odrzucamy hipotezę: *w stałej objętości iloraz ciśnienia i temperatury gazu w skali Kelvina jest wielkością stałą.*

Uwaga 1: Zadanie zostało rozwiązane. Jednak obliczone wartości ilorazów p/T wydają się bardzo bliskie siebie i obliczonej ich średniej ważonej, a więc nasza odpowiedź – odrzucenie hipotezy o stałości ilorazu p/T – może budzić niepokój. Przyjrzyjmy się danym. Hipotezę odrzucamy, bo obliczona dla danych zadania wartość statystyki $\mathcal{R}$ jest "za duża". Tak duża wartość może wynikać z:

- Przyjęcia zbyt małych niepewności $u(T)$ – jeśli przyjęte wartości wynikały z dokładności odczytu na naszym termometrze, to znaczy, że uznaliśmy *błąd przypadkowy* za pomijalnie mały w porównaniu z dokładnością przyrządu (termometru). To założenie można sprawdzić powtarzając kilkakrotnie pomiary dla ustalonego ciśnienia i obliczając wkład błedu przypadkowego do niepewności pomiaru T.

- Założenia, że ciśnienie p mierzone jest *wystarczająco dokładnie*. Fakt, że nasz manomentr stale pokazywał (wyświetlał) tę samą wartość ciśnienia p podczas pomiaru temperatury T nie oznacza, że ciśnienie było *dokładnie* równe wskazywanej wartości. Powinniśmy sprawdzić (np. w instrukcji producenta przyrządu) jaka jest rzeczywista dokładność pomiaru ciśnienia. Wartości podane w tabeli pozwalają na przypuszczenie, że rzeczywista dokładność pomiaru ciśnienia mogła wynosić od 0,5 atm do 1 atm. Nawet dla niepewności pomiaru ciśnienia $u(p) = 0,5$ atm okazałoby się, że to ciśnienie mierzone jest *mniej dokładnie* niż temperatura i całą analizę należałoby przeprowadzić na nowo.

Jeśli jednak staranna analiza dokumentacji przeprowadzonych pomiarów z uwzględnieniem sprawdzenia dokładności przyrządów i powtarzalności wyników, potwierdzi założenia przyjęte w treści zadania, to naszym wnioskiem jest odrzucenie testowanej hipotezy. Może powinniśmy zająć się dalszymi badaniami źródeł obserwowanej zmienności?

Pozostaje jeszcze do przemyślenia zasadność wyboru $\alpha = 0,1$. Argumenty, które doprowadziły do takiego wyboru też powinny zostać starannie przeanalizowane. Przyjęcie zbyt dużej wartości α prowadzi do pochopnego odrzucania hipotez prawdziwych. Dla $\alpha = 0,1$, średnio raz na dziesięć przypadków testowania hipotezy prawdziwej będziemy ją odrzucali. To niepokojąco często.

Uwaga 2: Przeprowadzona wyżej analiza, w której badaliśmy stałość ilorazu p/T, odwoływała się bezpośrednio do dosłownego sformułowania testowanej hipotezy. Jeśli jendak iloraz p/T jest stały, to równoważnym stwierdzeniem jest, oczywiście, także stwierdzenie, że iloraz T/p jest stały. Analogiczne analiza dla T/p jest rachunkowo prostsza, bo mamy podane niepewności $u(T)$, a jej wynik jest taki sam, jak analiza przeprowadzona dla p/T – wartość obliczonej statystyki $\mathcal{R} = 63,78$ i wniosek o odrzuceniu hipotezy nie zmienia się.