Wykład 6 – odpowiedzi do zadań

Zadanie 1. Neutron jest niestabilną cząstką elementarną, która po pewnym czasie ulega rozpadowi na proton, elektron i antyneutrino elektronowe. Wykonano 3 niezależne doświadczenia, w których mierzono czas życia neutronu i otrzymano następujące wyniki: (883 ± 30) s, (888 ± 3) s, (894 ± 5) s. Podaj najlepszą ocenę czasu życia neutronu i niepewność tej oceny.

Rozwiązanie. Na podstawie trzech różnych wyników pomiarów tej samej wielkości wyznaczamy najlepszą ocenę jej wartości. Nasze dane, to: zmierzone czasy życia: $\tau_1 = 883$ s, $\tau_2 = 888$ s, $\tau_3 = 894$ s i ich niepewności: $u_1 = 30$ s, $u_2 = 3$ s, $u_3 = 5$ s. Obliczamy średnią ważoną i jej niepewność – we wzorach poniżej podstawiam bezpośrednio liczbę danych $N = 3$:

$$\tau_w = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} \tau_i/u_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{3} 1/u_i^2}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy $\tau_w = 889,5401$ s. Mianownik wyrażenia jest równy $1/u_{int}^2$. Otrzymujemy $u_{int} = 2,5631$ s. Potrzebujemy jeszcze obliczyć u_{ext}:

$$u_{ext}^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} (\tau_i - \tau_w)^2/u_i^2}{3-1} u_{int}^2.$$

Otrzymujemy $u_{ext} = 1,9066 \text{ s} < u_{int}$.

Wybieramy większą z niepewności i po poprawnym zaokrągleniu podajemy ostateczną odpowiedź $\tau = (889,5 \pm 2,6)$ s.

Zadanie 2. Podczas zajęć pracowni fizycznej trzej studenci A, B i C wyznaczali gęstość trzech próbek metalu (każdy z nich badał jedną próbkę) dostarczonych przez asystenta. O asystencie wiadomo, że dysponuje tylko dwoma typami próbek i są to próbki żelaza i chromu. W tabelach można znaleźć, że gęstość żelaza wynosi 7,874 g/cm^3, a chromu 7,140 g/cm^3. Studenci otrzymali następujące rezultaty: $\rho_A = (7{,}095 \pm 0{,}150)$ g/cm^3, $\rho_B = (8{,}006 \pm 0{,}150)$ g/cm^3 i $\rho_C = (7{,}070 \pm 0{,}081)$ g/cm^3. Ponieważ przynajmniej dwóch studentów badało ten sam metal, znajdź najlepszą ocenę gęstości tego metalu i jej niepewność, wynikające z pomiarów wykonanych przez studentów.

Rozwiązanie. Jak w poprzednim zadaniu mamy trzy różne wyniki pomiarów, o których wiemy, że co najmniej dwa dotyczą tej samej wielkości – gęstości jednego z metali. Do podjęcia decyzji, które wyniki dotyczą tego samego metalu posłużymy się testem “3σ”:

$$\frac{|\rho_A - \rho_B|}{\sqrt{u_A^2 + u_B^2}} = 4,29... > 3,$$

a więc przyjmujemy, że próbki A i B nie były z tego samego metalu. Ponieważ $\rho_C < \rho_A$ więc tym bardziej nie może to być ten sam metal, co B. Dla pewności sprawdźmy zgodność wartości A i C:

$$\frac{|\rho_A - \rho_C|}{\sqrt{u_A^2 + u_C^2}} = 0,146.. < 3.$$

Wartości gęstości ρ_A i ρ_B są zgodne i na ich podstawie możemy wyznaczyć ocenę gęstości lepszą niż każda z nich oddzielnie. Obliczamy średnią ważoną ρ_A i ρ_C i jej niepewność:

$\rho_w = 7,07564$ g/cm^3, $u_{int} = 0,07127$ g/cm^3 i $u_{ext} = 0,010452..$ g/cm^3.

Po poprawnym zaokrągleniu wyników podajemy ostateczną odpowiedź:
$\rho_w = (7,076 \pm 0,071)$ g/cm^3.

Do rozwiązania tego zadani podane tablicowe wartości gęstości nie są potrzebne. Przed obliczeniem średniej ważonej porównujemy zgodność wyników między sobą, a nie zgodność z danymi tablicowymi.

Zadanie 3. Równanie stanu gazu doskonałego ma postać: $pV = nRT$, gdzie p oznacza ciśnienie, V objętość, n liczbę moli gazu, T temperaturę gazu w skali Kelvina, a R to uniwersalna stała gazowa. Student badał zmiany objętości V dla $n = 0,05$ mola gazu od jego temperatury T przy stałym ciśnieniu $p = 1015$ hPa. Po ustaleniu temperatury T, pomiar objętości V powtarzał wielokrotnie i obliczał wartość średnią $\bar{V}$. Wyniki pomiarów zebrał w tabeli:

Temperatura T/K	293	298	303	308	313
Średnia objętość $\bar{V}$/litr	1,196	1,207	1,243	1,274	1,293

Niepewności kolejnych wartości $\bar{V}$ były bardzo zbliżone i wynosiły $u_V = 0,010$ litra. Przyjmij, że liczba moli n i ciśnienie p gazu znane są wystarczająco dokładnie. Wyznacz ocenę wartości stałej gazowej i niepewność tej oceny.

Rozwiązanie. Z treści zadania i danych wynika, że temperaturę T należy uznać za wielkość mierzoną (i kontrolowaną) *dokładnie* – tzn. mierzoną dokładniej niż objętość V gazu. Za zmienną niezależną uznajemy więc T, a V za zmienną zależną. Niepewnośść wszystkich pomiarów V jest taka sama i wynosi $u_V = 0,01$ litra. Objętość V jest więc proporcjonalna do T:

$$V = \frac{nR}{p}T.$$

Należy teraz wyznaczyć współczynnik proporcjonalności $a = nR/p$ i jego niepewność, a następnie, znając *dokładne* wartości n i p wyznaczyć R. Ta sama niepewność w sumach licznika i mianownika ulega skróceniu, mamy więc ocenę:

$$\hat{a} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{5} V_i T_i}{\sum\limits_{i=1}^{5} T_i^2}.$$

Otrzymujemy $\hat{a} = 0,004101599$ litr/K. Niepewność $\hat{a}$ równa jest:

$$u^2(\hat{a}) = \frac{u_V^2}{\sum\limits_{i=1}^{5} T_i^2.}$$

Otrzymujemy $u(\hat{a}) = 1,475551 \cdot 10^{-5}$ litr/K. Pozostaje podstawienie $\hat{a}$ do wzoru $\hat{R} = \hat{a} \cdot p/n = 0,004101599 \cdot 1,015 \cdot 10^5/0,05 = 8,326246$ litr·Pa/mol= $8,3262246$ J/mol. Pozostaje wyznaczenie $u(\hat{R}) = p \cdot u(\hat{a})/n = 0,02995..$ J/(mol·K) – skorzystaliśmy z prawa *propagacji niepewności.*

Po poprawnym zaokrągleniu otrzymujemy ostateczną odpowiedź: $R = (8,326 \pm 0,030)$ J/(mol·K).

Zadanie 4. Studentka miała za zadanie wyznaczyć nieznany opór R pewnego opornika. Do dyspozycji miała układ elektryczny, w którym mogła zmieniać napięcie na oporniku oraz amperomierz, którym dla ustalonego napięcia U mierzyła natężenie I prądu płynącego przez opornik. Wartość napięcia ustalana była z bardzo dużą dokładnością (przyjmij, że niepewność wartości U jest pomijalnie mała). Niepewność pomiaru natężenia prądu nie była pomijalna i wynosiła u, zgodnie wartościami podanymi w tabeli. Zależność między natężeniem I i napięciem opisuje wzór: $U = RI$. Otrzymane wyniki studentka zapisała w tabeli:

Numer pomiaru	1	2	3	4	5
I [mA]	0,48	1,24	2,14	2,35	2,91
U [mV]	1,12	2,31	4,15	4,95	5,81
u [mA]	0,05	0,10	0,10	0,15	0,20

Wyznacz ocenę wartości oporu R oraz niepewność tej oceny.

Rozwiązanie. Z opisu w treści zadania wynika, że U należy przyjąć za zmienną niezależną znana dokładnie, a I za zmienną zależną mierzoną z podanymi niepewnościami. Mamy więc:

$$I = U/R.$$

Współczynnikiem proporcjonalności jest $a = 1/R$. Zadanie staje się bardzo podobne do poprzedniego, z tą różnicą, że dla różnych punktów pomiarowych niepewność pomiaru I jest różna, co komplikuje nieco obliczenia. Mamy (u_i oznacza niepewność pomiaru I_i):

$$\hat{a} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{5} I_i U_i / u_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{5} U_i^2 / u_i^2}$$

oraz

$$u^2(\hat{a}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{5} U_i^2/u_i^2}.$$

Otrzymujemy $\hat{a} = 0,4965881$ A/V i $u(\hat{a}) = 0,01460123$ A/V. Na tej podstawie wyznaczamy $\hat{R} = 2,013742$ V/A i $u(\hat{R}) = u(\hat{a})/\hat{a}^2 = 0,0,05921$ V/A.

Po poprawnym zaokrągleniu otrzymujemy ostateczną odpowiedź: $R = 2,014 \pm 0,059$ V/A.

Zadanie 5. Student badał przemianę izochoryczną gazu. Podgrzewał pewną ilość tego gazu w zamkniętym naczyniu i mierzył ciśnienie p i temperaturę t w skali Celsjusza i uzyskał wyniki podane w tabeli. Zakładając, że w warunkach doświadczenia gaz zachowuje się jak gaz doskonały, tzn. spełnia ròwnanie:

$$\frac{pV}{T} = const,$$

gdzie p jest jego ciśnieniem, V objętością, a T temperaturą w skali bezwzględnej, wyznacz ocenę temperatury zera bezwzględnego w skali Celsjusza i niepewność tej oceny. Zastosuj metodę najmniejszych kwadratów. Przyjmij, że temperatura była mierzona z niepewnością $u = 2$℃, a ciśnienie było mierzone dostatecznie dokładnie.

Ciśnienie p (atmosfery)	1,0	1,4	1,6	2,0
Temperatura t (℃)	36	158	223	350

Rozwiązanie. Podany w treści zadania opis pomiarów wskazuje, że za zmienną niezależną powinniśmy przyjąć ciśnienie p, a zmienna zależna to temperatura t. Niepewności pomiaru kolejnych wartości t są takie same i wynoszą $u = 2$ ℃. W opisie przemiany występuje temperatura bezwzględna T, a pomiary temperatury były wykonane przyrządem podającym wartości w skali Celsjusza i w tej skali podane są wartości t_i w tabeli. Wiemy, że między ubydwoma skalami zachodzi związek:

$$T = t + t_0,$$

gdzie t_0 oznacza wartość temperatury bezwzględnej odpowiadającej temperaturze 0 ℃. Tym samym temperatura zera bezwzglednego $T_0 = 0 = t + t_0$ odpowiada w skali Celsjusza $t = -t_0$. Podstawmy zwiąązek między skalami temperatur do ròwnania przemiany izochorycznej dla "*const*" przyjmujemy oznaczenie A):

$$\frac{pV}{T} = \frac{pV}{t + t_0} = A \Rightarrow t = \frac{pV}{A} - t_0.$$

Podczas przemiany izochorycznej objętość V pozostaje stała, a więc otrzymaną zależność możemy zapisać jako:

$$t = ap + b,$$

gdzie $a = V/A$ oraz $b = -t_0$. Z treści zadania wynika, że p należy przyjąć za zmienną niezależną, a t za zmienną zależną, przy czym niepewność każdej z podanych wartości t wynosi $u = 2$ ℃. Jak widać, wartość b jest poszukiwaną temperaturą zera bezwzględnego w skali

Celsjusza. Pozostaje zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do wyznaczenia parametru b na podstawie danych zadania umieszczonych w tabeli. Wszystkie niepewności pomiarów t są jednakowe, a więc ta wielkość ulega skróceniu we wzorach na b (poniżej wzory uwzględniające to uproszczenie):

$$
\begin{aligned}
D &= N\sum_{i=1}^{N} p_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} p_i\right)^2 \\
\hat{b} &= \frac{1}{D}\left(\sum_{i=1}^{N} p_i^2 \sum_{j=1}^{N} t_j - \sum_{i=1}^{N} p_i \sum_{j=1}^{N} p_t y_j\right).
\end{aligned}
$$

Po podstawieniu danych z tabeli i $N = 4$ otrzymujemy: $\hat{b} = -279,885$ ℃. Obliczmy $u(\hat{b})$. Korzystamy ze wzorów wyprowadzonych podczas *Wykładu 6*. Po uwzględnieniu równości wszystkich niepewności t_i wzór na $u(\hat{b})$ upraszcza się do postaci:

$$u^2(\hat{b}) = \frac{u^2}{D}\sum_{i=1}^{N} x_i^2.$$

Otrzymujemy $u(\hat{b}) = 4,27875$ ℃.

Po poprawnym zaokrągleniu wynikòw otrzymujemy odpowiedź końcową $b = (-279,9 \pm 4,3)$ ℃.

Uwaga: Oczywiście wiemy "ze szkoły" ile wynosi temperatura zera bezwzgędnego w skali Celsjusza (-273,15 ℃). Wartość ta została wyznaczona na podstawie pomiarów podobnych do opisanych w treści tego zadania i właśnie wyznaczenie tej wartości na podstawie wyników pomiarów jest przedmiotem tego zadania. Otrzymana wartość leży daleko poza badanym obszarem temperatur – warto zauważyć, że otrzymany wynik jest tym dokładniejszy, im większy przedział temperatur obejmują pomiary (zakładając tę samą dokładność pomiarów w całym badanym obszarze).

Zadanie 6. Studentka przeprowadziła pomiar ciepła c parowania wody zdefiniowanego związkiem $Q = cm$, gdzie Q jest ilością energii, jaką należy dostarczyć masie m wody, żeby zamienić ją w parę. Ustawiła na wadze otwarty termos z pewną ilością wody i zanurzoną w wodzie grzałką o mocy $P = 600$ W. Po włączeniu grzałki odczekała aż woda zacznie wrzeć i rozpoczęła pomiary masy m układu rejestrując wskazania wagi w równych odstępach czasu. Wyniki zestawiła w tabeli:

Czas t (minuty)	0	5	10	15	20
Wskazania wagi m (gramy)	1000	910	800	770	720

Przyjmij, że czas mierzony był wystarczająco dokładnie, także moc grzałki znana jest wystarczająco dokładnie i pozostawała stała podczas całego pomiaru. Wyznacz ciepło parowania wody c i niepewność uzyskanej oceny.

Rozwiązanie. Ilość ciepła Q pobranego podczas zamiany wody w parę jest proporcjonalna do masy m powstałej pary. Jednocześnie jest ona równa energii dostarczonej przez grzałkę o mocy P działającą w czasie t: $Q = Pt$. Zgodnie z treścią zadania przyjmujemy, że moc grzałki $P = 600$ W znana jest dokładnie oraz, że czas t jest mierzony dokładnie (dokładniej niż masa) i dlatego przyjmiemy czas t za zmienną niezależną. W tabeli podane są wyniki pomiaru masy w kolejnych chwilach czasu, ale nie mamy określonych niepewności pomiarów masy. Warunki wykonywania pomiarów – ta sama waga i niewielki zakres wartości mierzonych mas – wskazują, że każda wartość masy była zmierzona z taką samą niepewnością. Niepewność tę ocenimy na podstawie rozrzutu punktów pomiarowych w stosunku do dopasowanej prostej. Mierzona masa m zawiera zarówno masę wody, która w chwili pomiaru jest w termosie jak i masę termosu. Wskazuje to, że należy przyjąć, że:

$$m = M_0 - \frac{Q}{c} = M_0 - \frac{P}{c}t,$$

gdzie M_0 oznacza początkową masę termosu i wody w chwili, gdy woda zaczęła wrzeć, a Q/c jest masą wody zamienionej w parę. Posługując się metodą najmniejszych kwadratów znajdziemy parametry prostej: $m = M_0 + at$, gdzie $a = -P/c$. Po zwyznaczeniu wartości parametru a i jej niepewności będziemy mogli wyznaczyć poszukiwaną wartość $c = P/a$ i jej niepewność. Odpowiednie wzory zostały omówione w ramach *Wykładu 6* jako przypadek, gdy nie znamy niepewności zmiennej niezależnej, ale możemy założyć, że dla wszystkich punktów pomiarowych niepewność wyniku pomiaru jest taka sama. Interesuje nas wartość współczynnika a, ale do obliczenia niepewności będziemy także potrzebowali wartości $\hat{M}_0$:

$$\begin{aligned}
D &= N\sum_{i=1}^{N} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)^2 \\
\hat{a} &= \frac{1}{D}\left(N\sum_{i=1}^{N} t_i m_i - \sum_{i=1}^{N} t_i \sum_{j=1}^{N} m_j\right) \\
\hat{M}_0 &= \frac{1}{D}\left(\sum_{i=1}^{N} t_i^2 \sum_{j=1}^{N} m_j - \sum_{i=1}^{N} t_i \sum_{j=1}^{N} m_j t_j\right).
\end{aligned}$$

Po podstawieniu $N = 5$ oraz t_i i m_i z tabeli otrzymujemy: $\hat{a} = -14,00$ g/min $= 0,2333..$ g/s, $\hat{M}_0 = 980,0$ g. Do oszacowania niepewności $\hat{a}$ potrzebna jest ocena u – niepewności pomiaru masy:

$$u^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(m_i - \hat{a}t_i - \hat{M}_0\right)^2}{N-2}.$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy $u = 28,2843$ g, co daje niepewność $\hat{a}$ równą:

$$u^2(\hat{a}) = \frac{Nu^2}{D}$$

Otrzymujemy $u(\hat{a}) = 1,78885$ g/min $= 0,029814$ g/s. Wyznaczamy $\hat{c} = -P/a = 2571,43$ J/g i niepewność $u(\hat{c}) = u(\hat{a})P/\hat{a}^2 = 328,56$ J/g.

Po poprawnych zaokrągleniach otrzymujemy odpowiedź: $c = (2,57 \pm 0,33)$ kJ/g.