Wykład 5 – odpowiedzi do zadań

Zadanie 1.
Podczas przepływu prądu o natężeniu I przez grzałkę o oporze R, w czasie t, wydzielane jest ciepło $Q = I^2 Rt$. Wyznacz ocenę ilości wydzielonego ciepła Q i niepewność tej oceny, jeśli $R = (30,0 \pm 0,2)$ Ω, $I = (10,0 \pm 0,1)$ A oraz $t = (50 \pm 5)$ s.

Rozwiązanie. W treści zadania podany jest wzòr pozwalający wyznaczyć szukaną wielkość Q oraz wszystkie dane pomiarowe z niepewnościami. Rozwiązanie polega więc jedynie na poprawnym pdstawieniu danych do wzorów: na Q i niepewność $u(Q)$.

$Q = I^2 Rt = 10^2 \cdot 30 \cdot 50$ J $= 150$ kJ. Mamy także:

$$u^2(Q) = (2IRtu(I))^2 + (I^2 tu(R))^2 + (I^2 Ru(t))^2.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy $u(Q) = 15{,}33$ kJ ≈ 15 kJ.

Odpowiedź: $Q = (150 \pm 15)$ kJ.

Zadanie 2.
Korzystając ze wzoru Snella:

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

student miał wyznaczyć współczynnik załamania n pewnego gatunku szkła. Wyniki jego pomiarów to, kąt padania $\alpha = 31°\pm 1°$oraz kąt załamania $\beta = 20°\pm 1°$. Wyznacz ocenę wartość współczynnika załamania n i niepewność tej oceny.

Rozwiązanie.
Podstawiamy wartości kątów do wzoru Snella i otrzymujemy $n = \frac{0{,}515038..}{0{,}342020..} \approx 1,50587$.
Do wyznaczenia niepewności $u(n)$ stosujemy wzór na propagację małych niepewności:

$$\begin{aligned} u^2(n) &= \left(\frac{\partial n}{\partial \alpha} u(\alpha)\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \beta} u(\beta)\right)^2 \\ &= \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} u(\alpha)\right)^2 + \left(\frac{-\sin\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta} u(\beta)\right)^2. \end{aligned}$$

Obliczając pochodne korzystaliśmy z faktu, że, gdy kąt α mierzony jest w mierze łukowej (tzn. w radianach – jedynej naturalnej mierze kąta), to pochodną $\sin\alpha$ jest funkcja $\cos\alpha$ itd. Oznacza to, że wartości niepewności $u(\alpha)$ i $u(\beta)$ musimy wyrazić w radianach: $1° = \frac{\pi}{180} \approx 0,017453$ radiana. Po tej zamianie jednostki podstawiamy wartość $u(\alpha) = u(\beta) = 0,017453$ rad do wzoru na $u(n)$ i otrzymujemy: $u(n) \approx 0,084425$. Po poprawnym zaokrągleniu wyniku otrzymujemy:

Odpowiedź: $n = 1,506 \pm 0,084$.

Zadanie 3.
Dysponując rònią pochyłą o zmiennym kącie nachylenia z naklejonym na nią papierem, monetą 5 zł oraz kątomierzem o podziałce co 0,5°, studentka wyznaczała wspòłczynnik μ tarcia statycznego monety o papier. Zwiększając powoli kąt nachylenia ròwni, na ktòrej spoczywała moneta, studentka rejestrowała wartość kąta granicznego, przy ktòrym moneta zaczynała się ześlizgiwać z ròwni. Powtarzając pięciokrotnie pomiar otrzymała następującą serię wartości kąta granicznego: 14,5°, 14,5°, 14,0°, 14,0°oraz 15,0°. Wspòłczynnik tarcia statycznego $\mu =$ tg α, gdzie α jest kątem granicznym. Wyznacz najlepszą ocenę wartości wspòłczynnika μ oraz niepewność tej oceny.

Rozwiązanie.
Najlepszą oceną kąta granicznego, kiedy moneta zaczyna zsuwać się z ròwni, jest średnia arytmetyczna wszystkich pomiaròw:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i = \frac{1}{5}(14,5 + 14,5 + 14,0 + 14,0 + 15,5) = 14,5,$$

wszystkie liczby oznaczają kąty w stopniach.

Niepewność tak obliczonej średniej wynosi:

$$u^2(\bar{\alpha}) = \frac{1}{4 \cdot 5}(0,25 + 0,25 + 1.0) + 0,25/3 = 0,15833,$$

wszystkie wyniki w $1°^2$.

Ostatecznie $u(\hat{\alpha}) = 0,397911°\approx 0,40°$.
Wspòłczynnik tarcia $\hat{\mu}=$ tg $\bar{\alpha} = 0,258618$, a jego niepewność:

$$u^2(\hat{\mu}) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} u(\bar{\alpha})\right)^2.$$

Pochodna funkcji tg α względem α wynosi $1/\cos^2\alpha$ – pamiętamy o mierze łukowej – $u(\bar{\alpha}) = 0,0069449$ rad – otrzymujemy $u(\hat{\mu}) = 0,0,007409 \approx 0,0074$.

Odpowiedź: $\mu = 0,2586 \pm 0,0074$.

Zadanie 4.
Do wykonania doświadczenia chemicznego potrzebna jest objętość $V = 500$ cm^3 wody destylowanej. Student dysponuje szklaną, walcową menzurką o wewnętrznej średnicy $D = (8,0 \pm 0.1)$ cm i wysokości $H = 15$ cm oraz elektroniczną wagą kuchenną podającą masę z dokładnością $\Delta = 5$ g. W tablicach student odczytał gęstość $\rho = 0,99821$ g/cm^3 wody destylowanej w temperaturze 20°C (taka temperatura panowała w laboratorium). Wysokość słupa wody w menzurce student mierzy linijką o podziałce $\delta = 0,1$ cm. Ktòrą z dwòch metod powinien wybrać, aby jak najdokładniej odmierzyć potrzebną ilość wody destylowanej:

- Czy powinien odmierzyć odpowiednią wysokość słupa wody w menzurce?

- Czy powinien postawić pustą menzurkę na wadze, a następnie ostrożnie wlewać do niej wodę, aż odczyta odpowiednią ròżnicę mas?

Odpowiedź należy poprzeć odpowienimi obliczeniami.

Rozwiązanie.
Decyzję dotyczącą metody nleży podjąć po wyznaczeniu niepewności, z jaką zostanie odmierzona potrzebna ilość wody każdą z metod. Pojemność wnętrza walca o wymiarach o średnicy wewnętrznej D i wysokości h (wodę nalewamy do wysokości $h < H$) wynosi:

$$V = \pi \frac{D^2 h}{4}$$

Niepewność u_1 tak wyznaczanej pojemności wynosi:

$$u_1^2 = \left(\frac{2\pi D h u(D)}{4}\right)^2 + \left(\frac{\pi D^2 u(h)}{4}\right)^2,$$

gdzie $u(D) = 0,1$ cm, $u(h) = 0,1/\sqrt{3}$ cm, jak podano w treści zadania (pamiętamy, że za niepewność pomiaru przyrządem o rozdzielczości δ przyjmujemy $\delta/\sqrt{3}$). Do wykonania obliczenia niepewności u_1 potrzebujemy oszacować wartość wysokości h, do jakiej należy nalać wody do menzurki: $h = 4V/(\pi D^2) = 9,94718..$ cm. Po podstawieniu danych otrzymujemy: $u_1 \approx 12,83$ cm^3 (jeśli przyjmiemy $u(h) = \delta$, co jest dopuszczalne, to $u_1 \approx 13,47$ cm^3). W przypadku użycia wagi należy odmierzyć masę $m = V/\rho = 500/0,99821$ g $= 500,897$ g ≈ 501 g. Powinniśmy jeszcze zastanowić się jak taki pomiar będzie przeprowadzany. Jeśli waga posiada funkcję tarowania (wiele wag elektronicznych taką funkcję posiada), to wòwczas odczytujemy bezpośrednio masę dodaną po "wytarowaniu" wagi i możemy przyjąć $u_2 = \Delta/(\rho\sqrt{3})$ $= 2,8919$ cm^3 lub, gdy przyjmiemy $u(m) = \Delta$, $u_2 = \Delta/\rho = 5,00897$ cm^3. Jeśli pomiar wykonujemy poprzez dwukrotne ważenie: pustej menzurki i następnie wypełnionej wodą, to nasz wynik pomiaru masy będzie ròżnicą obu wynikòw $m_{woda} = m_{menzurka+woda} - m_{menzurka}$, więc $u(m_{woda}) = \sqrt{2}\Delta/\sqrt{3}$ (lub $u(m_{woda}) = \sqrt{2}\Delta$, gdy uznamy rozdzielczość wagi za niepewność wykonanych za jej pomocą pomiaròw. Odpowiednio przeliczona niepewność $u_2 = 4,0898$ cm^3 i $7,08375$ cm^3, gdy utożsamiamy niepewność pomiaru masy z rozdzielczością pomiaru masy.

Odpowiedź: użycie wagi jest metodą dokładniejszą i tą metodą powinien posłużyć się student. Podając niepewność student oczywiście odpowiednio zaokrągli otrzymaną jej ocenę do nie więcej niż 2 cyfr znaczących.

Uwaga: Podane rozwiązanie wydaje się niejednoznaczne. Należy jednak pamiętać, że wykonując pomiary mamy obowiązek dokładnie zapoznać się z "działaniem" przyrządòw pomiarowych (czy waga ma funkcję tarowania, czy nie, i czy tej funkcji używamy). W przypadku, gdy mamy do czynienia z przyrządem analogowym (menzurka, waga kuchenna "ze wskazòwką", możemy utożsamić najmniejszą działkę jej podziałki z niepewnością wskazań). Nasza decyzja w znacznym stopniu zależy od oceny dokładności naniesienia skali – gdy podziałka analogowa wykonana jest bardzo starannie, to dopuszcalne jest nawet "interpolowanie" odczytu "pomiędzy" kreskami podziałki z dokładnością do ok. 0,2 - 0,5 najmniejszej działki

Poprawne rozwiązanie zadania tego typu powinno zawierać informacje o sposobie interpretowania danych – tę rolę spełniają w rozwiązaniu uwagi o przyjętym związku niepewności z rozdzielczością przyrządu oraz uwagi o funkcji tarowania wagi. Dopiero z takimi objaśnieniami można ocenić poprawność obliczeń.