

# Ćwiczenie nr 3 – SPRAWDZANIE PRAWA OHMA I KIRCHHOFFA

## Instrukcja dla studenta (wersja z dnia 7 V 2018)

A. Majhofer i R. Nowak

### WYMAGANIA TEORETYCZNE

- Prawa Ohma i Kirchhoffa, łączenie oporów i rozwiązywanie obwodów elektrycznych, włączanie do obwodu amperomierza i woltomierza.
- Pojęcie gęstości prawdopodobieństwa – przykłady gęstości.
- Definicja i interpretacja wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego zmiennej losowej.
- Test „ $3\sigma$ ”.
- Oczekiwana liczba danych w przedziale histogramu dla zadanej gęstości prawdopodobieństwa.

### WSTĘP

Celem ćwiczenia od strony analizy danych jest prześledzenie, na przykładzie mierników elektrycznych, sposobu wyznaczania **dopuszczalnego granicznego błędu wskazania** oraz wprowadzenie najprostszego testu statystycznego, jakim jest test  $3\sigma$ . Test ten zastosujemy do weryfikacji praw Ohma i Kirchhoffa. Ważnym elementem ćwiczenia jest także nabycie umiejętności posługiwania się miernikami napięcia, oporności i natężenia prądu. Zadaniem dodatkowym jest opanowanie sztuki nanoszenia na histogram, wynikających z modelu, wartości oczekiwanych wielkości histogramowanej.

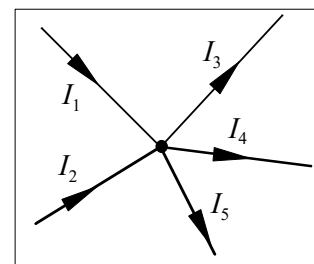
Zgodnie z **prawem Ohma** różnica potencjałów, czyli *napięcie elektryczne  $U$  między dwoma punktami przewodnika jest proporcjonalne do natężenia  $I$  prądu płynącego przez przewodnik*, czyli  $U = RI$ , gdzie współczynnik proporcjonalności  $R$  zwany jest **oporem** lub **opornością** przewodnika. Jednostką oporności w układzie SI jest om ( $\Omega$ ).

**I prawo Kirchhoffa** dotyczy węzłów obwodu elektrycznego, tzn. punktów, w których zbiega się kilka gałęzi (przewodów). Stwierdza ono, że *suma natężeń prądów wpływających do węzła jest równa sumie natężeń prądów z niego wypływających* i wynika z zasady zachowania ładunku elektrycznego: w węzłach sieci ładunek nie znika i nie gromadzi się w trakcie przepływu prądu. Dla sytuacji przedstawionej na Rysunku 1 prawo to ma postać:  $I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$ .

Przy okazji przypominamy, że natężenie prądu charakteryzuje **ilość przenieszonego w jednostce czasu ładunku przez przekrój poprzeczny przewodnika** i dlatego **amperomierz, czyli miernik natężenia prądu, włączamy szeregowo do gałęzi, w której chcemy zmierzyć natężenie płynącego przez nią prądu** (przykład takiego podłączenia ukazuje Rysunek 7). Jednostką natężenia prądu układu SI jest amper, oznaczany literą A. Jeśli przez przekrój poprzeczny przewodnika przepływa prąd o natężeniu 1 A, to w czasie jednej sekundy przenoszony jest ładunek 1 kulomba (1 C).

**II prawo Kirchhoffa** dotyczy obwodów zamkniętych, tzw. „oczek”. Słownie treść tego prawa można wyrazić następująco: *w dowolnym obwodzie zamkniętym (oczku) algebraiczna suma sił elektromotorycznych, oznaczanych symbolem SEM, tj. napięć generowanych np. przez znajdujące się w obwodzie baterie lub zasilacze, jest równa sumie napięć na elementach obwodu*. Przy okazji przypominamy, że **napięcie, jakie panuje między dwoma punktami obwodu zdefiniowane jest odniesioną do ładunku pracą, jaką należy wykonać, aby ładunek ten przenieść między tymi dwoma punktami** i dlatego **woltomierz, czyli miernik napięcia, włączamy równolegle do elementu obwodu, na którym chcemy zmierzyć napięcie** (przykład takiego podłączenia ukazuje Rysunek 7). Jednostką napięcia w układzie SI jest wolt, oznaczany symbolem V. Między dwoma punktami obwodu panuje napięcie 1 V, jeśli przeniesienie między nimi ładunku 1 C wymaga pracy 1 J.

W przypadku obwodów złożonych, II prawo Kirchhoffa stosuje się dla każdego oczka tego obwodu. Dla obwodu przedstawionego na Rysunku 2 mamy 3 oczka:



Rys. 1. Węzeł obwodu

- a) SEM  $E_1 \rightarrow$  opór  $R_1 \rightarrow$  opór  $R_2 \rightarrow$  SEM  $E_1$ ,  
 b) SEM  $E_1 \rightarrow$  opór  $R_1 \rightarrow$  opór  $R_3 \rightarrow$  SEM  $E_2 \rightarrow$  SEM  $E_1$ ,  
 c) SEM  $E_2 \rightarrow$  opór  $R_3 \rightarrow$  opór  $R_2 \rightarrow$  SEM  $E_2$ .

Istnieje kilka technik „rozwiązywania oczek”, tj. formułowania równań na nieznane prądy. Jedną z nich polega na ustaleniu konwencjonalnego – od bieguna dodatniego do bieguna ujemnego – kierunku przepływu prądów w każdym z oczek, jak na Rysunku 2 i wypisaniu równań Kirchhoffa dla każdego z nich. Przy ustalaniu znaków w wyrażeniach określających napięcie na elementach obwodu, stosujemy się do wybranego kierunku przepływu prądu – jeśli przejście przez element jest zgodne z wybranym kierunkiem przepływu prądu, stawiamy znak „+”, a jeśli przeciwnie, to znak „-”. I tak, odpowiednio dla oczek a), b) i c) otrzymujemy:

$$R_1 I_1 + R_2 (I_1 + I_2) = E_1,$$

$$R_1 I_1 - R_3 I_2 = E_1 - E_2,$$

$$R_3 I_2 + R_2 (I_1 + I_2) = E_2$$

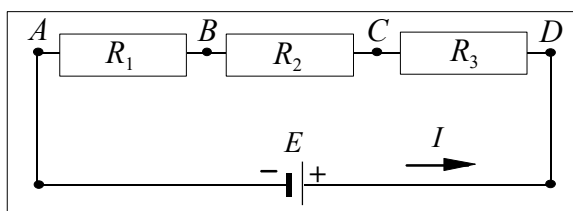
układ trzech równań na dwa nieznane natężenia  $I_1$  oraz  $I_2$ . Widzimy jednak, że drugie równanie otrzymujemy przez odejmowanie stronami równania trzeciego od pierwszego, a więc jest ono liniowo od nich zależne. Odrzucając równanie liniowo zależne i rozwiązując równania liniowo niezależne, wyznaczmy nieznane natężenia prądów.

Z praw Kirchhoffa wynika, że całkowita oporność  $R$  przewodników połączonych szeregowo, jak na Rysunku 3, jest równa sumie oporności  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , tych przewodników:

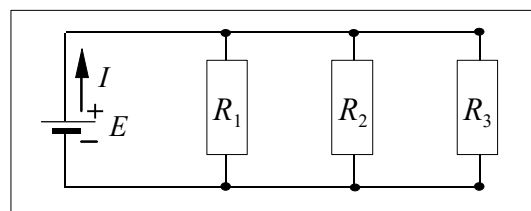
$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n,$$

a całkowita oporność  $R$  takich przewodników połączonych równolegle, jak na Rysunku 4, wynosi:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$



Rys. 3. Przykład obwodu z szeregowym połączeniem przewodników



Rys. 4. Przykład obwodu z równoległym połączeniem przewodników

## POMIARY

### Do dyspozycji masz:

- mierniki uniwersalne: Brymen 805 oraz CHY 38;
- przewody z końcówkami;

oraz dwa zestawy pomiarowe:

- zestaw 1:
  - ukazana na Rysunku 5 płytką drukowaną, służącą do włączania elementów obwodu,
  - oporniki o opornościach powyżej 1 k $\Omega$ ,
  - zasilacz stałego napięcia;
- zestaw 2:
  - ukazana na Rysunku 6 płytką drukowaną z baterią,
  - oporniki o opornościach poniżej 1 k $\Omega$ .

**UWAGA** Wysłuchaj uwag asystenta na temat obsługi mierników, nim przystąpisz do wykonania pomiarów. Miernik Brymen, przy pomiarze oporności, napięcia i natężenia prądu, ma zarówno tryb

ręczny jak i automatyczny wyboru zakresu. **Bezwzględnie zalecamy stosowanie automatycznego trybu wyboru zakresu.** Miernik CHY ma tylko ręczny wybór zakresu, dlatego wybór mierzonej wielkości i zakresu pomiaru powinien nastąpić przed podłączeniem miernika. Należy zaczynać od największego zakresu wartości wielkości mierzonej, a dopiero w trakcie pomiaru, i w miarę potrzeby, przełączać miernik na niższe zakresy. Podłączenie do obwodu miernika z nieodpowiednio wybranym zakresem może spowodować jego uszkodzenie. Podobne skutki może mieć zmienianie zakresu w trakcie pomiaru, jako że w tym typie miernika przekręcenie pokrętła do pozycji np. „wyłączony” wymaga przejścia pokrętłem przez kilka różnych zakresów pomiarowych.

Miernik Brymen charakteryzują, ujęte w Tabeli 1, 2 oraz 3, parametry dotyczące pomiarów oporności, stałego napięcia i natężenia stałego prądu (w temperaturze  $23^{\circ}\text{C} \pm 5^{\circ}\text{C}$ , wilgotności względnej poniżej 75% i miejscu użycia poniżej 2000 m nad poziomem morza).

Tabela 1. Parametry miernika Brymen 805 jako omomierza

Zakres oporności		Parametry dopuszczalnego błędu wskazania	
od	do	$w$	$nc$
000,0 $\Omega$	399,9 $\Omega$	0,008	$6c = 0,6 \Omega = 0,0006 \text{ k}\Omega$
0,400 $\text{k}\Omega$	3,999 $\text{k}\Omega$	0,006	$4c = 0,004 \text{ k}\Omega$
04,00 $\text{k}\Omega$	39,99 $\text{k}\Omega$	0,006	$4c = 0,04 \text{ k}\Omega$
040,0 $\text{k}\Omega$	399,9 $\text{k}\Omega$	0,006	$4c = 0,4 \text{ k}\Omega$
0,400 $\text{M}\Omega$	3,999 $\text{M}\Omega$	0,01	$4c = 0,004 \text{ M}\Omega = 4 \text{ k}\Omega$
04,00 $\text{M}\Omega$	39,99 $\text{M}\Omega$	0,02	$4c = 0,04 \text{ M}\Omega = 40 \text{ k}\Omega$

Tabela 2. Parametry miernika Brymen 805 jako woltomierza napięcia stałego

Zakres napięcia stałego (DC)		Parametry dopuszczalnego błędu wskazania		Oporność wejściowa
od	do	$w$	$nc$	
000,0 mV	399,9 mV	0,003	$4c = 0,4 \text{ mV} = 0,0004 \text{ V}$	1 $\text{G}\Omega$
0,400 V	3,999 V	0,005	$3c = 0,003 \text{ V}$	10 $\text{M}\Omega$
04,00 V	39,99 V	0,005	$3c = 0,03 \text{ V}$	10 $\text{M}\Omega$
040,0 V	399,9 V	0,005	$3c = 0,3 \text{ V}$	10 $\text{M}\Omega$

Przy pomiarach natężenia prądu, pokrętło miernika musi zostać ustawione na jednym z dwóch zakresów: pomiar prądów o natężeniu w zakresie mikroamperowym – pokrętło w pozycji  $\mu\text{A}$  dla pomiar prądów o natężeniu w zakresie miliamperowym – pokrętło w pozycji mA. Każdy z tych zakresów charakteryzuje się własnymi parametrami podsumowanymi w Tabeli 3. Istnieje jeszcze jedna pozycja pokrętła – pozycja A – służąca do pomiarów prądów o natężeniu w zakresie amperów i specjalne gniazdo dla kabla, ale w tym doświadczeniu największe natężenia prądów, jakie napotkamy to miliampery, więc nie podajemy parametrów dla tego zakresu.

Tabela 3. Parametry miernika Brymen 805 jako amperomierza prądu stałego

Zakres natężenia prądu stałego		Parametry dopuszczalnego błędu wskazania		Oporność wejściowa
od	do	$w$	$nc$	
pomiar natężenia w mikroamperach (pokrętło w pozycji $\mu\text{A}$ )				
000,0 $\mu\text{A}$	399,9 $\mu\text{A}$	0,02	$5c = 0,5 \mu\text{A} = 0,0005 \text{ mA}$	150 $\Omega$
0400 $\mu\text{A}$	3999 $\mu\text{A}$	0,012	$3c = 3 \mu\text{A} = 0,003 \text{ mA}$	150 $\Omega$
pomiar natężenia w miliamperach (pokrętło w pozycji mA)				
00,00 mA	39,99 mA	0,02	$5c = 0,05 \text{ mA}$	3,3 $\Omega$
040,0 mA	399,9 mA	0,012	$3c = 0,3 \text{ mA}$	3,3 $\Omega$

Wielkość  $\Delta$  – zwaną **dopuszczalnym granicznym błędem wskazania** na danym zakresie pomiarowym miernika – wyznacza się na podstawie wzoru:

$$\Delta = wx + nc,$$

gdzie poszczególne symbole oznaczają:

- $x$  – wynik pomiaru;
- $w$  – dokładność wskazanej wartości  $x$  wyrażająca ułamek (zazwyczaj podawany w procentach) wartości zmierzonej na wybranym zakresie pomiarowym.

**Przykład** – Jeśli na wybranym zakresie pomiarowym dokładność wynosi **0,005**, to dla wskazania  $x = 30,00 \text{ V}$  część związana z wielkością  $w$  ma wartość  $30,00 \text{ V} \cdot 0,005 = 0,15 \text{ V}$ .

- $nc$  – dokładność cyfrowa określana jako liczba  $n$  najmniej znaczących jednostek  $c$  odczytu – zależy ona od wybranego zakresu pomiarowego i jakości przetwornika A/C, a **nie zależy** od wartości uzyskanej w pomiarze.

**Przykład** – Jeśli producent podaje, że na zakresie pomiarowym od **04,00 V DC** do **39,99 V DC** dokładność wynosi **3c**, to znaczy, że wartość dokładna może się różnić maksymalnie dodatkowo o  $\pm 0,03 \text{ V}$  od odczytanej wartości. Sumując obie wartości, otrzymamy dopuszczalny błąd graniczny  $\Delta$  pomiaru przy wskazaniu **30 V** równy:  $\Delta = 0,15 \text{ V} + 0,03 \text{ V} = 0,18 \text{ V}$ , co stanowi 0,6% zmierzonej wartości.

Wykonując analogiczne obliczenia dla tej samej wartości mierzonej, ale na niewłaściwie dobranym zakresie od **040,0 V DC** do **399,9 V DC**, przy tych samych parametrach dokładności otrzymamy dopuszczalny błąd graniczny:  $\Delta = 0,15 \text{ V} + 0,3 \text{ V} = 0,45 \text{ V}$ , co stanowi 1,5% wartości.

**Dopuszczalny graniczny błąd wskazania to wielkość podawana przez producenta przyrządu. Jeśli w wyniku pomiaru otrzymamy wartość  $x$ , to producent gwarantuje, że prawdziwa (dokładna) wartość wielkości mierzonej mieści się w przedziale  $[x - \Delta, x + \Delta]$ .**

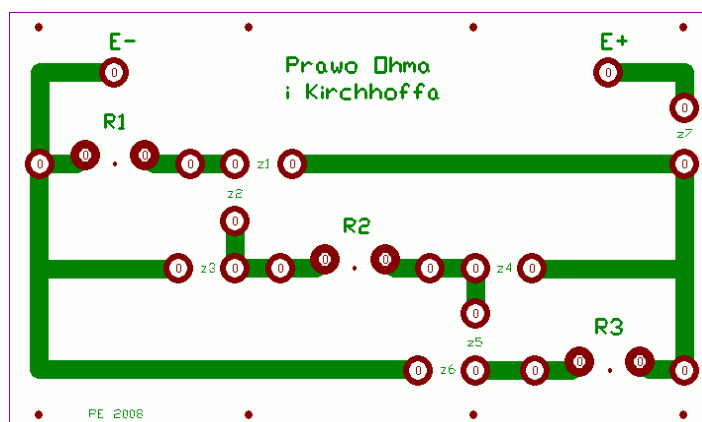
Zwracamy uwagę na fakt, że nie podajemy analogicznych tabel dla innych mierników, jakie mogą być używane w ćwiczeniu, jako że obliczanie niepewności odnosi się tylko do tych pomiarów, które wykonywane są za pomocą miernika Brymen.

### Wykonanie pomiarów

Podczas wykonywania pomiarów pamiętaj o szczegółowej dokumentacji, tj. o notowaniu wszystkich informacji mogących mieć znaczenie podczas analizowania uzyskanych wyników. W szczególności notuj dokładnie **format** liczb, w jakim miernik wyświetla wartości (wraz z nieznaczącymi zerami), gdyż format ten definiuje zakres, na którym wykonano pomiar, a ten wyznacza dopuszczalny graniczny błąd wskazania.

### Pomiary z wykorzystaniem zestawu 1 (sprawdzanie praw Ohma i Kirchhoffa)

Obwód drukowany służący do pomiarów, przedstawiony jest na Rysunku 5. Przerwy w obwodzie, zaznaczone jako R1, R2 oraz R3, to miejsca, gdzie można wpiąć oporności, zaś przerwy z1 do z7 służą do wpinania specjalnych zworek pozwalających uzyskać połączenia szeregowe lub równoległe tych oporów lub przyłączania mierników. Punkty E- oraz E+ to miejsce przyłączenia zasilania. **Na zasilaczu nie przekraczaj napięcia 20 V.**



Rys. 5. Układ do sprawdzania praw Ohma i Kirchhoffa

- Używając miernika uniwersalnego Brymen jako omomierza (tę część pomiarów potraktuj jako wprawkę w używaniu miernika):
  - zmierz opór kilku przewodów o różnej długości i porównaj wynik z dokładnością

stosowanego przyrządu;

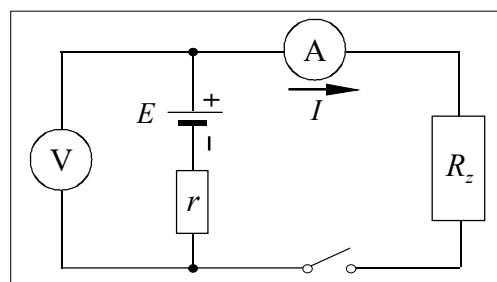
- spróbuj zmierzyć opór swojego ciała, mierzony od jednej dłoni do drugiej; zwróć uwagę na fakt, że wskazania miernika zależą od siły, z jaką ściskasz końcówki przewodników; sprawdź, czy wilgotność palców wpływa na wynik pomiaru.
- b) Wybierz dowolny z oporników z zestawu 1 (o kiloomowych wartościach oporności) i zmierz miernikiem Brymen jego oporność  $R_1$ . Zbuduj układ, w którym będzie można jednocześnie mierzyć napięcie  $U$  na tym oporniku i natężenie  $I$  płynącego przezeń prądu. Podłącz opornik do zasilacza jako źródła napięcia i wykonaj pomiary napięcia na oporniku oraz natężenia płynącego przez niego prądu dla różnych napięć zasilania.
- c) Odłącz źródło zasilania i uzupełnij układ o dwa dodatkowe oporniki z zestawu 1 tak, aby powstał obwód jak na Rysunku 3 (połączenie szeregowe oporów). Zmierz miernikiem Brymen oporności  $R_2$  oraz  $R_3$  dodatkowych oporników.
- Uwaga praktyczna:** aby pomiar oporności opornika wmontowanego w układ był wiarygodny, musi on być wykonywany na oporniku odłączonym od reszty układu. W przeciwnym razie mierzysz oporność wypadkową podłączonej do niego równolegle całej reszty układu.
- d) Podłącz zasilacz i zmierz miernikiem Brymen napięcia  $V_{AB}$ ,  $V_{BC}$ ,  $V_{CD}$  (patrz Rys. 3) na każdym z oporników oraz  $V_{AD}$  na wszystkich opornikach łącznie (pomiar między punktami  $A$  i  $D$ ).
- Uwaga praktyczna:** do dobrej praktyki (wymaganej przez normy) należy przestrzeganie zasady: **czerwony kabel podłączamy zawsze do „gorącego” zacisku na zasilaczu.**
- e) Zbuduj obwód z połączonych równolegle oporników  $R_1$ ,  $R_2$  oraz  $R_3$ , jak na Rysunku 4.
- f) Przed podłączeniem zasilacza zmierz miernikiem Brymen jako omomierzem, oporność  $R_c$  całkowitą wszystkich oporników.
- g) Po podłączeniu zasilacza, zmierz miernikiem Brymen natężenie  $I_c$  prądu czerpanego ze źródła i natężenia  $I_1$ ,  $I_2$  oraz  $I_3$  prądów płynących w każdej gałęzi obwodu, aby sprawdzić zgodność wyników z pierwszym prawem Kirchhoffa. Zauważ, że w tym pomiarze musisz ręcznie wybrać zakres miernika ( $\mu A$  lub  $mA$ ). Pamiętaj o odnotowaniu tego zakresu.

### Pomiary z wykorzystaniem zestawu 2 (wyznaczanie oporu wewnętrznego baterii)

- h) Korzystając z zestawu pomiarowego 2 ukazanego na Rysunku 6, sprawdź czy bateria nie jest rozładowana (napięcie na rozwartej baterii powinno wynosić około 1,5 V).
- i) Korzystając z zestawu pomiarowego 2, zbuduj układ jak na Rys. 7 z baterią o nieznanym oporze wewnętrznym  $r$ , jako źródłem zasilania i oporem zewnętrznym  $R_z$  (o wartościach poniżej 1 k $\Omega$ ) jako jednym z oporników z zestawu. Za pomocą miernika Brymen zmierz napięcie na zaciskach baterii, a miernika CHY natężenie prądu płynącego w obwodzie. Wykonaj pomiar dla rozwartej baterii, jak również dla wszystkich, a powinno być ich pięć, oporników zestawu. Czy obserwujesz zmiany mierzonego napięcia? Czy w tym doświadczeniu zmienia się siła elektromotoryczna baterii?
- UWAGA:** czerwony, okrągły przycisk służy do zamykania obwodu; wykorzystuj go tylko na czas odczytywania wskazań mierników, przytrzymując go w pozycji wciśniętej do momentu ustabilizowania się wskazań.
- j) Przed rozmontowaniem układu wykonaj odręczny rysunek zależności napięcia na baterii od natężenia czerpanego z niej prądu. Jakiej postaci tej zależności oczekujesz?



Rys. 6. Układ do wyznaczenia oporu wewnętrznego baterii



Rys. 7. Układ do pomiaru oporu baterii

**Zadanie 1 (do domu – do wykonania przed ćwiczeniami rachunkowymi)**

Wpisz do arkusza kalkulacyjnego zmierzone wartości i wykonaj wszystkie wskazane obliczenia.

Sporządź na papierze milimetrowym wykres zależności:

- napięcia od natężenia prądu dla danych uzyskanych w punkcie b);
- napięcia na baterii od natężenia prądu dla danych uzyskanych w punkcie i).

W obu przypadkach wyznacz, za pomocą linijki, prostą najlepiej Twym zdaniem pasującą do danych na wykresie. Odczytaj z wykresów oceny wartości parametrów równań tych prostych.

Papier milimetrowy otrzymasz w Sekretariacie Pracowni lub skorzystaj z dołączonego do instrukcji.

**ANALIZA DANYCH****MODEL ROZKŁADU BŁĘDÓW POMIAROWYCH****Zadanie 2 (na ćwiczeniach)**

Dla zrozumienia zagadnienia dokładności przyrządu pomiarowego, np. linijki lub woltomierza, rozważmy następujący model procesu produkcji. W fabryce, w taśmowej produkcji wytwarzane są „identyczne” przyrządy. Jak każdy proces fizyczny, proces technologiczny nie jest kontrolowany absolutnie dokładnie. Na skutek przypadkowych zakłóceń w jego przebiegu, każdy z przyrządów ma nieco inną charakterystykę, a wskazania tych przyrządów różnią się nieznacznie podczas mierzenia tego samego obiektu. Przyjmijmy, że producent gwarantuje, iż wartość oczekiwana wskazań różnych produkowanych przyrządów jest poprawna, a maksymalny błąd wskazań, czyli maksymalna różnica między wskazaniem  $x$  a wartością dokładną  $\mu$ , nie przekracza, co do wartości bezwzględnej, wartości  $\Delta > 0$ . Zastanówmy się, co to oznacza w odniesieniu do używanego przez nas miernika. Najprostszym modelem matematycznym jest przyjęcie, że:

- gwarantowane jest, że uzyskana z pomiaru wartość  $x$  zawiera się przedziale  $[\mu - \Delta, \mu + \Delta]$ ,
- każdy wynik z tego przedziału jest jednakowo prawdopodobny.

Przyjmując powyższe założenia:

- Zaproponuj funkcję  $f(x)$  gęstości prawdopodobieństwa otrzymania w pomiarze wartości  $x$ .
- Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję  $\sigma^2$  zmiennej  $x$ .
- Jaka część przyrządów wskaże wartość w przedziale  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ ?
- Porównaj z analogiczną wartością, która pojawi się, gdy zaproponowany rozkład zastąpimy rozkładem Gaussa.

**Zadanie 3 (na ćwiczeniach)**

Wyznacz dopuszczalny błąd wskazania w Twym pomiarze oporności w punkcie b).

**Zadanie 4 (do domu – dla treningu)**

Alternatywą dla rozkładu jednostajnego, jako modelu rozkładu błędów pomiarowych wynikających ze sposobu odczytu wartości z przyrządu pomiarowego, jest rozkład trójkątny, czyli rozkład różny od zera jedynie w obszarze  $[\mu - \Delta, \mu + \Delta]$ , narastający liniowo od zera w punkcie  $x = \mu - \Delta$  do wartości maksymalnej w punkcie  $x = \mu$  i następnie malejący liniowo do zera w punkcie  $x = \mu + \Delta$ . Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję dla zmiennej z takiego rozkładu. Jaka część przyrządów wskaże wartość w przedziale  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ ?

**Zadanie 5 (na ćwiczeniach)**

Przyjrzyj się dokładnie wykresowi danych uzyskanych w punkcie b) pomiarów. Czy punkty pomiarowe układają się na prostej? Jeśli widzisz odstępstwa, to która część wykresu odpowiada bezpośredniemu pomiarowi oporu? Porównaj jakościowo wartość współczynnika kierunkowego prostej dopasowanej do danych „metodą linijki” z bezpośrednio zmierzoną wartością oporności.

**TEST  $3\sigma$** 

Na stronie, z której pobrałaś/pobrałeś niniejszą Instrukcję, znajduje się arkusz kalkulacyjny do programu Calc pakietu Libre/Open Office przygotowany do wykonania obliczeń będących przedmiotem poniższych zadań. Arkusz ten lub równoważny będzie niezbędny podczas ćwiczeń rachunkowych i może być pomocny podczas przygotowywania raportu końcowego. Jeśli

*masz własny komputer, możesz z nim przyjść na ćwiczenia rachunkowe, w przeciwnym przypadku będzie można skorzystać z jednego z komputerów na Pracowni. Pamiętaj jednak, że na Pracowni nie ma dostępu do internetu, więc arkusz kalkulacyjny musisz przynieść na zajęcia na urządzeniu pamięci zewnętrznej (typu pen-drive, do wypożyczenia w Sekretariacie Pracowni).*

Ważnym elementem niniejszego ćwiczenie jest sprawdzanie zgodności wyników doświadczeń z przewidywaniami teoretycznymi (np. z praw Ohma i Kirchhoffa) lub też sprawdzanie wzajemnej zgodności wyników różnych pomiarów, a więc, mówiąc ogólnie, testowanie hipotez. Najprostszym testem zgodności wyników jest test, jeden z tzw. **testów istotności**, zwany popularnie **testem  $3\sigma$** , spotykany w dwóch typach zagadnień:

- Hipoteza teoretyczna głosi, że wielkość mierzona ma wartość  $\mu$ , a wynik  $x$  jej pomiaru to wartość zmiennej losowej o znanym odchyleniu standardowym  $\sigma$  i nieznannej wartości oczekiwanej. Test prowadzimy w ten sposób, że wyznaczamy różnicę  $|x - \mu|$  i sprawdzamy, jak odległa jest ona od wartości zero. Gdy różnica odchyła się od zera o więcej niż trzy standardowe odchylenia  $\sigma$ , to odrzucamy hipotezę o wartości  $\mu$  wielkości mierzonej. W przeciwnym przypadku konkludujemy, że hipoteza nie jest sprzeczna z danymi.
- Hipoteza teoretyczna głosi, że dwa pomiary (np. uzyskane różnymi metodami lub w różnych warunkach) są pomiarami tej samej wielkości, co często określamy mianem *zgodnych* pomiarów. Niech pierwszy wynik  $x$  będzie wartością zmiennej losowej o odchyleniu standardowym  $\sigma_x$ , zaś drugi wynik,  $y$ , będzie wartością zmiennej losowej o odchyleniu standardowym  $\sigma_y$ . Test prowadzimy w ten sposób, że wyznaczamy różnicę  $|x - y|$  oraz jej odchylenie standardowe  $\sigma$ , gdzie  $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ , i sprawdzamy, jak ta różnica odległa jest od wartości zero. Gdy różnica odchyła się od zera o więcej niż trzy standardowe odchylenia  $\sigma$ , to odrzucamy hipotezę o tym, że  $x$  i  $y$  są pomiarami tej samej wielkości (że są to pomiary zgodne). W przeciwnym przypadku konkludujemy, że hipoteza nie jest sprzeczna z danymi.

Należy z całą mocą podkreślić, że w przypadku, gdy test  $3\sigma$  nie odrzuca hipotezy, nie oznacza to, że udowodniliśmy jej słusność, a jedynie godzimy się z nią, gdyż nie jest sprzeczna z danymi. Dzieje się tak dlatego, że być może model teoretyczny nie jest prawdziwy – wartość  $\mu$  nie wynosi tyle, ile sądzimy lub pomiary, które dały w wyniku wartości  $x$  oraz  $y$  nie były pomiarami tej samej wielkości – jednak dokładność naszych pomiarów jest zbyt mała, by to wykryć. Być może w przyszłości my lub ktoś inny wykona eksperyment o większej dokładności i odstępstwa od hipotezy zostaną wykryte.

Jeśli pomiary opisywane są znanym rozkładem, to testowi  $3\sigma$  można nadać interpretację probabilistyczną. W szczególności, jeśli jest to rozkład Gaussa, to test  $3\sigma$  dopuszcza odrzucenie prawdziwej hipotezy nie częściej niż (około) 3 razy na 1000 decyzji. Zastąpienie testu  $3\sigma$  analogicznym testem  $2\sigma$  oznacza odrzucanie prawdziwej hipotezy nie częściej niż 1 raz na 20 decyzji.

**UWAGA:** W praktyce na ogół nie znamy wartości dyspersji  $\sigma$ , a jedynie jej oszacowanie  $u$ , czyli niepewność standardową wyniku pomiaru, co osłabia kategorię konkluzji.

### **Zadanie 6 (na ćwiczeniach)**

*Dla danych uzyskanych w punkcie d), określ niepewności napięć  $V_{AB}$ ,  $V_{BC}$ ,  $V_{CD}$  i  $V_{AD}$  oraz wartość i niepewność sumy  $V = V_{AB} + V_{BC} + V_{CD}$ . Czy wartości  $V$  i  $V_{AD}$  są zgodne? Skorzystaj z testu  $3\sigma$ . Ustosunkuj się do możliwości przeprowadzenia takiego testu zgodności bezpośrednio zmierzonej wartości oporności  $R_1$ , a teźże oporności wyznaczonej z pomiaru zależności między napięciem na tymże opornikiem i natężeniem prądu przezeń przepływającego.*

### **Zadanie 7 (na ćwiczeniach)**

*Ocenę  $R_c$  oporności uzyskaną w pomiarze w punkcie f) porównaj z oceną oporności  $R$  oporów połączonych równolegle, którą możesz obliczyć wykorzystując wcześniej zmierzone oporności pojedynczych oporników. Skorzystaj z testu  $3\sigma$ .*

### **Zadanie 8 (na ćwiczeniach)**

Dla uzyskanych w pomiarach natężeń prądu w różnych gałęziach obwodu z równolegle połączonymi opornikami wyznacz niepewności tych natężeń i sprawdź zgodność wyników z I prawem Kirchhoffa. Skorzystaj z testu  $3\sigma$ .

### Zadanie 9 (na ćwiczeniach)

Pokaż, że z praw Kirchhoffa wynika, iż jeśli do zacisków baterii o sile elektromotorycznej  $E$  i oporze wewnętrznym  $r$  podłączymy opór zewnętrzny  $R_z$  (Rysunek 7), to natężenie  $I$  prądu płynącego przez baterię i napięcie  $U$  na jej zaciskach spełniają zależność:

$$U = E - rI.$$

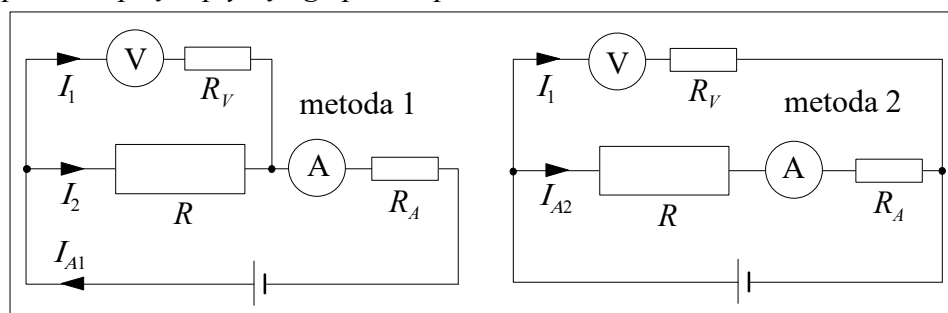
Zakładając, że siła elektromotoryczna i opór wewnętrzny badanej baterii są stałe, wykorzystaj dane uzyskane w trakcie pracy z baterią w celu wyznaczenia obu wielkości. Wykonaj wykres  $U(I)$  i odczytaj z niego oceny wartości  $E$  oraz  $r$ . Nie usiłuj wyznaczać ich niepewności, bo dopasowanie „na oko” nie pozwala na wykonanie takiego zadania w satysfakcjonujący sposób. Metodę wyznaczania niepewności ocen współczynników linii prostej poznamy w następnym ćwiczeniu.

### Zadanie 10 (do domu – dla treningu)

Zaciski baterii o sile elektromotorycznej  $E$  i oporności wewnętrznej  $r$  zwarto opornikiem o oporności  $R$ . Wyprowadź wyrażenie na moc  $P$  wydzielaną na oporności  $R$  i naszkicuj wykres zależność  $P(R)$ . Dla jakiej wartości  $R$  moc wydzielana na tym oporze jest największa?

### Zadanie 11 (do domu – dla treningu)

Dysponując woltmierzem o oporności wewnętrznej  $R_V$  oraz amperomierzem o oporności wewnętrznej  $R_A$ , pomiar wartości  $R$  oporu elektrycznego opornika można wykonać dwiema metodami ukazanymi na Rysunku 8: dokładnego pomiaru napięcia na oporniku  $R$  – metoda 1 – i dokładnego pomiaru prądu płynącego przez opornik  $R$  – metoda 2.



Rys. 8. Dwie metody pomiaru oporności  $R$

- Wykaż, że przy zastosowaniu metody 1 poszukiwana oporność  $R$  wynosi

$$R = \frac{U_{V1} R_V}{R_V I_{A1} - U_{V1}},$$

podczas gdy metoda 2 prowadzi do wyrażenia

$$R = \frac{U_{V2}}{I_{A2}} - R_A,$$

gdzie  $U_{Vi}$  oznaczają wskazania woltmierza, zaś  $I_{Ai}$  wskazania amperomierza przy zastosowaniu odpowiednio metod 1 i 2. Porównaj otrzymane wyniki z wynikami, jakie otrzymano by, gdyby każdorazowo stosowano uproszczony wzór  $R = U_V/I_A$ .

- Dla każdej z metod podaj warunek, jaki musi spełniać badany opór  $R$ , aby uproszczony wzór dawał rozsądne przybliżenie poszukiwanej wartości.
- Wyznacz graniczną wartość oporności  $R$ , przy której stosowanie uproszczonego wzoru daje dokładniejsze przybliżenie w pomiarach metodą 1 niż metodą 2. Ile ta wartość wynosi dla miernika Brymen 805?

### Zadanie 12 (do domu – dla treningu)

Oporność właściwa wkładu do ołówka jest rzędu  $10^{-5} \Omega \cdot m$ . Zaproponuj sposób pomiaru tej wielkości, jeśli dysponujesz przyrządami i miernikami jak w pomiarowej części niniejszego ćwiczenia laboratoryjnego. Przyjmij, że wkład ma średnicę  $0,5 - 0,7 \text{ mm}$  i długość około  $6 \text{ cm}$ .



### GRAFICZNE PORÓWNANIE ROZKŁADU MODELOWEGO I DOŚWIADCZALNEGO

Podczas wykonywania pomiarów z punktów a) ÷ g), wielokrotny pomiar prowadził, z reguły, do tej samej wartości mierzonej wielkości. Oznacza to, że wpływ błędów przypadkowych był w tych pomiarach zanedbywalny w porównaniu z błędem systematycznym związanym z dokładnością używanego przyrządu. Z tego powodu niepewności pomiarów wyrażaliśmy jedynie przez dopuszczalny błąd graniczny pomiaru. W wielu innych doświadczeniach mamy jednak do czynienia z sytuacją, gdy decydujący wpływ na dokładność pomiaru mają czynniki przypadkowe. Traktujemy wtedy nasz przyrząd pomiarowy jako dokładny, co oznacza, że jego błędy systematyczne są zanedbywalne w porównaniu z błędami przypadkowymi. Z tego rodzaju sytuacją spotkaliśmy się podczas pomiarów okresu drgań wahadła, kiedy to odczytywane wartości okresu wypełniały przedział kilkakrotnie większy niż zdolność rozdzielcza  $\Delta = 0,01$  s wynikająca ze sposobu wyświetlania. Do opisu rozkładu wyników, gdy dominują błędy przypadkowe, często stosowana jest gęstość prawdopodobieństwa w postaci rozkładu normalnego.

#### Zadanie 13 (na ćwiczeniach)

Załóżmy, że rozkład wyników pomiaru okresu  $T$  drgań wahadła można opisać modelowym rozkładem normalnym (Gaussea) o wartości oczekiwanej  $\mu$  i odchyleniu standardowym  $\sigma$ :

$$G(T; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(T - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < T < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0.$$

Autorzy niniejszej instrukcji wykonali 216 razy pomiar pojedynczego okresu. Rysunki 9 i 10 przedstawiają odpowiednio histogramy liczebności i gęstości otrzymanych wyników. Na rysunkach tych zaznacz wartości oczekiwane liczebności i gęstości w każdym z przedziałów, wynikające z rozkładu normalnego o parametrach  $\mu = 3,4408$  s oraz  $\sigma = 0,0456$  s (czyli wartości średniej i niepewności standardowej pojedynczego pomiaru). Skorzystaj z arkusza kalkulacyjnego i odwzorowanej tam Tabeli 4 oraz Tabeli 5 z DODATKU. Porównaj przybliżone wartości  $N'_k$  z modelowymi wartościami  $N_k$  oraz z doświadczalnie otrzymanymi liczbami  $n_k$  w poszczególnych przedziałach histogramu. Nanieś wartości  $N_k$  na histogram na Rysunku 9, a gęstości na Rysunku 10. Odręcznie połącz linią ciągłą punkty na Rysunku 10.

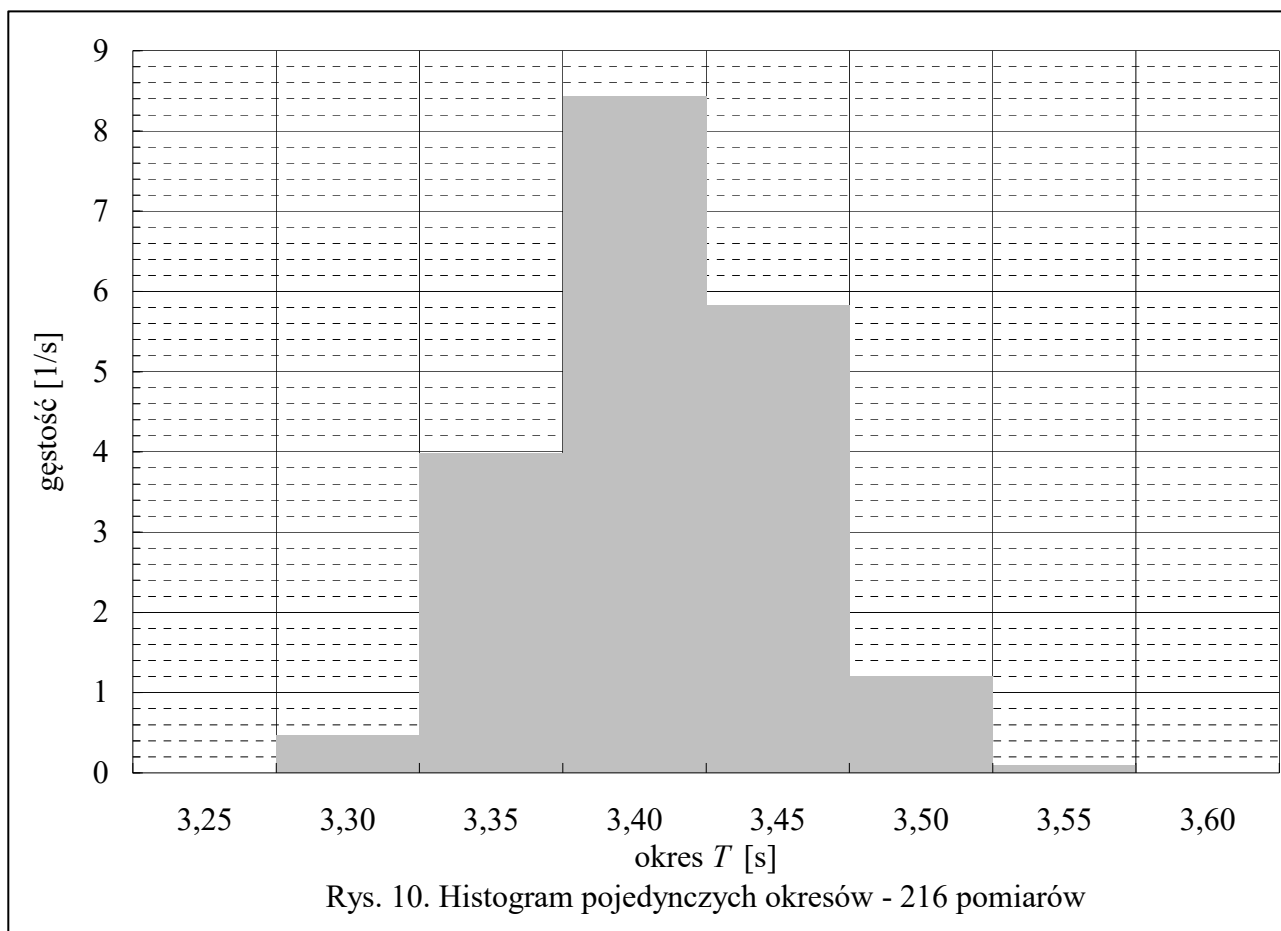
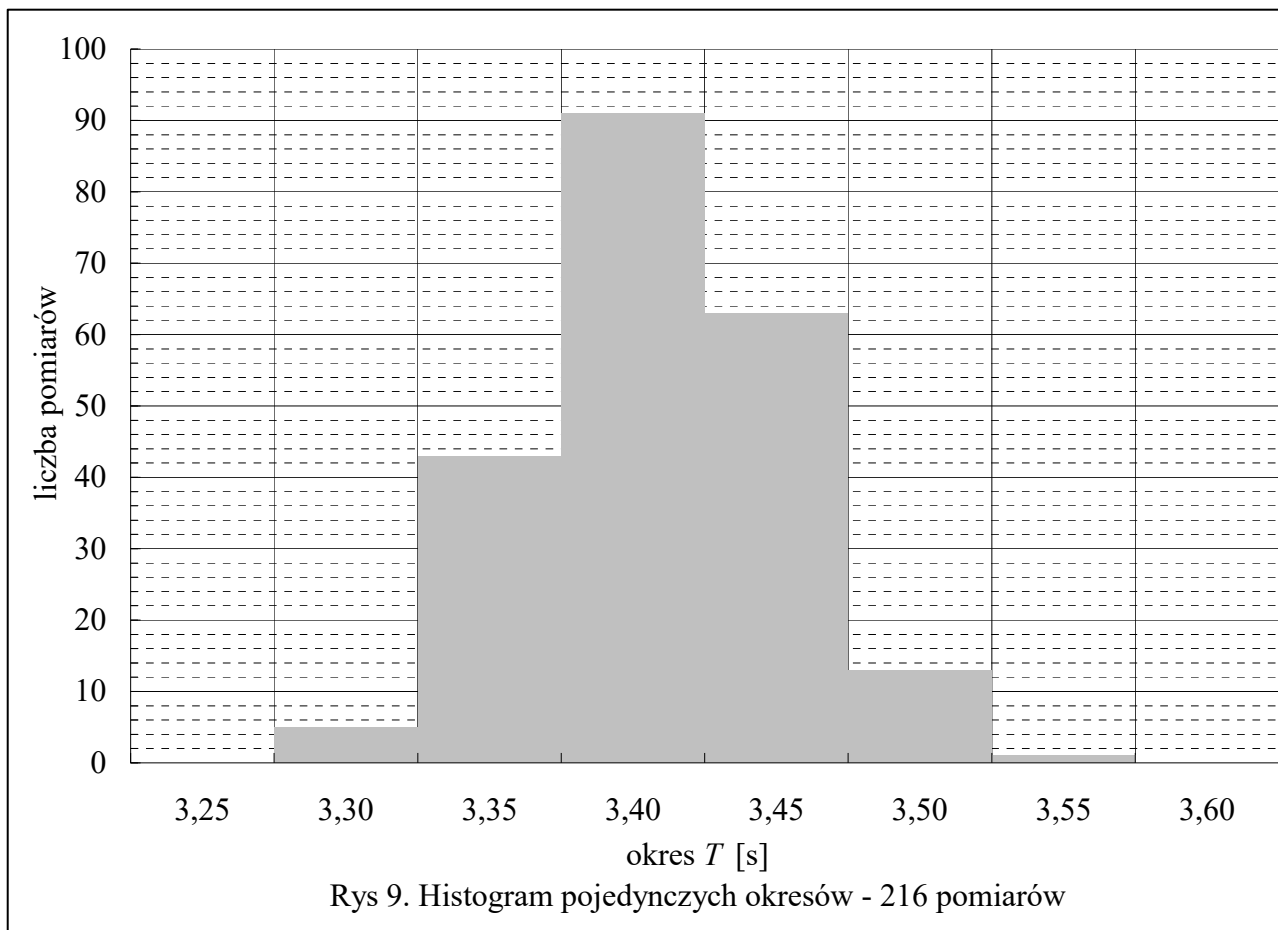
Tabela 4. Graficzne porównanie rozkładu modelowego z doświadczalnym

krawędź dolna $T_k$ [s]	3,25	3,30	3,35	3,40	3,45	3,50	3,55	3,60	–
krawędź górna $T_k + \Delta$ [s]	3,30	3,35	3,40	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	–
środek przedziału $T_{[k]}$ [s]	3,275	3,325	3,375	3,425	3,475	3,525	3,575	3,625	suma =
liczba $n_k$ danych	0	5	43	91	63	13	1	0	$N = 216$
gęstość eksperym. [ $s^{-1}$ ]	0,00	0,46	3,98	8,43	5,83	1,20	0,09	0,00	–
gęstość $G(T_{[k]}; \bar{T}, s_T)$ [ $s^{-1}$ ]	0,01	0,35	3,09		6,60	1,59	0,12	0,00	–
$N'_k = NG(T_{[k]}; \bar{T}, s_T)\Delta$	0,127	3,758	33,360		71,322	17,179	1,243	0,027	
$z_k = (T_{[k]} - \mu)/\sigma$	–4,18	–3,09	–1,99		0,20	1,30	2,39	3,49	–
$F(z_k)$	0,000	0,001	0,023		0,579	0,903	0,992	1,000	–
$z_{k+1} = (T_{[k+1]} - \mu)/\sigma$	–3,09	–1,99	–0,89		1,30	2,39	3,49	4,59	–
$F(z_{k+1})$	0,001	0,023	0,185		0,903	0,992	1,000	1,000	–
$p_k = F(z_{k+1}) - F(z_k)$	0,001	0,022	0,162		0,323	0,089	0,008	0,000	
$N_k = Np_k$	0,215	4,799	35,043		69,758	19,178	1,744	0,051	

Przypominamy wzór służący do obliczenia oczekiwanej liczby  $N_k$  pomiarów w przedziale:

$$N_k = NP(T_k \leq T < T_k + \Delta) = N \int_{T_k}^{T_k + \Delta} G(T; \mu, \sigma) dT,$$

gdzie  $\Delta$  jest szerokością przedziału, a  $N$  liczbą pomiarów. Najprostsza, przybliżona, metoda obliczenia całki polega na zastąpieniu jej wyrażeniem  $G(T_{[k]}; \mu, \sigma)\Delta$ , określającym pole powierzchni prostokąta o wysokości  $G(T_{[k]}; \mu, \sigma)$  i podstawie  $\Delta$ , gdzie  $T_{[k]}$  wyznacza środek przedziału:



$$N_k \approx N'_k = NG(T_{[k]}; \mu, \sigma) \Delta.$$

Jeśli chcemy wyznaczyć całkę dokładniej, wprowadzamy nową zmienną

$$z = \frac{T - \mu}{\sigma},$$

zwaną **standaryzowaną** i wartość  $N_k$  wyznaczamy za pomocą

$$N_k = NP(z_k \leq z < z_{k+1}) = N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mathcal{N}(z) dz = N(F(z_{k+1}) - F(z_k)),$$

gdzie

$$z_k = \frac{T_k - \mu}{\sigma}, \quad z_{k+1} = \frac{T_k + \Delta - \mu}{\sigma}, \quad F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Wartości całek  $F(z)$  rozkładu normalnego znajdują się w Tabeli 5. Funkcję

$$\mathcal{N}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right),$$

którą tu całkujemy, nazywamy **standaryzowanym rozkładem normalnym**.

#### **Zadanie 14 (do domu – dla treningu)**

Pewna firma tytoniowa twierdzi, na podstawie wieloletnich badań swych papierosów, że zawartości nikotyny w jej produkcie można opisać rozkładem Gaussa o wartości oczekiwanej  $\mu = 2,2$  mg i odchyleniu standardowym  $\sigma = 0,05$  mg. Gdy wybrano losowo pojedynczy papieros i wyznaczono w nim zawartość nikotyny, okazało się, że wynosiła ona 2,3 mg. Jeśli rację ma firma, ile wynosi szansa zaobserwowania wyniku takiego lub bardziej odległego od wartości oczekiwanej?

#### **Zadanie 15 (do domu – dla treningu)**

Indianie Shoshoni przyozdabiali przedmioty codziennego użytku prostokątami. Oto próbka 16 wartości stosunku długości boku krótszego do dłuższego (C. DuBois, *Lowie's Selected Papers in Anthropology*, University of California Press, 1960, dane za: F. Daly i inni, *Elements of Statistics*, The Open University oraz Addison-Wesley Publishing Company): 1995, s. 318 0,553, 0,570, 0,576, 0,601, 0,606, 0,606, 0,609, 0,611, 0,615, 0,628, 0,654, 0,662, 0,668, 0,670, 0,672, 0,690, 0,693, 0,749, 0,844 i 0,933. Kryterium estetyczne starożytnych Greków odwoływało się do tzw. złotego podziału odcinka na dwie części, czyli takiego, w którym stosunek długości dłuższej części odcinka do długości całego odcinka jest taki sam jak stosunek jego krótszej do dłuższej części. Czy kryterium estetyczne Indian i starożytnych Greków jest takie samo?

#### **Zadanie 16 (do domu – dla treningu)**

Zważono 2000 monet o nominale 1€ (Z. Shkedy, M. Aerts, and H. Callaert, *Journal of Statistics Education Volume 14, Number 2* (2006)). Średnia masa  $m$  tych monet wynosiła 7,521233 g, a niepewność tej średniej to  $s = 0,000769$  g. Europejski Bank Centralny podaje, że nominalna masa monety o takim nominale wynosi 7,5 g. Oceń zgodność uzyskanej z pomiaru masy monety z jej wartością nominalną.

#### **Zadanie 17 (do domu – dla treningu)**

Dwa konkurujące modele opisujące pewne zjawisko podają wartość parametru  $\zeta$  charakteryzującego to zjawisko jako  $\zeta_A = 1$  (model A) oraz  $\zeta_B = 2,2$  (model B). W wyniku eksperymentu powtarzającego pomiar tej wielkości 16 razy otrzymano ocenę  $\zeta_0 = 1,5 \pm 0,3$ . Czy uzyskany wynik rozstrzyga o słuszności jednego z modeli i wyklucza drugi? Jaką dodatkową liczbę pomiarów należałoby wykonać, aby bez względu na ostateczny ich wynik, można było wykluczyć przynajmniej jeden z modeli w ramach przynajmniej trzech niepewności standardowych, a drugi co najwyżej na tym samym poziomie zaakceptować? Przyjmij, że dodatkowe pomiary nie modyfikują niepewności standardowej pojedynczego pomiaru, jaką uzyskano w serii 16 pomiarów.

**Zadanie 18 (do domu – dla treningu)**

Dwaj studenci wykonali niezależnie pomiar tej samej wielkości fizycznej  $w$ . Student A otrzymał wynik  $w_A = 1,0 \pm 0,4$ , a student B:  $w_B = 2,3 \pm 0,3$ . Następnie, obaj studenci spotkali się, wymienili rezultaty pomiarów i przeprowadzili następujące rozumowanie: jeśli mierzona była ta sama wielkość fizyczna, to stosunek  $f$  wyników pomiarów winien być, w ramach trzech niepewności standardowych, równy jedności. Student A znalazł, że  $f_A = w_A / w_B = 0,43 \pm 0,18$  i stwierdził, że stosunek jest różny od jedności o więcej niż trzy niepewności, w wyniku czego uznał też, iż obaj mierzyli różne wielkości fizyczne. Natomiast student B znalazł, że  $f_B = w_B / w_A = 2,3 \pm 0,97$  i stwierdził, że otrzymany stosunek niewątpliwie zgodny jest, i to z dobrym zapasem, z jednością w ramach trzech niepewności, a tym samym uznał, że obaj mierzyli tę samą wielkość fizyczną. Odtwórz rachunek niepewności wykonany przez studentów i rozstrzygnij, który z nich miał rację. Odpowiedź uzasadnij i wyjaśnij przyczynę sprzecznych konkluzji studentów.

**PRACA Z WYKRESEM****Zadanie 19 (na ćwiczeniach)**

Rysunek 11 przedstawia zależność oporności właściwej  $\rho$  wolframu, jako funkcję jego temperatury  $T$  (dane za: *Resistance and Radiation of Tungsten as a Function of Temperature*, W.E. Forsythe and E.M. Watson, *Journal of the Optical Society of America*, tom 24, nr 4 (1934) 114-118). Dopasuj, za pomocą linijki, najlepszą prostą do punktów danych doświadczalnych i wyznacz wartości jej parametrów. Podaj postać zależności  $\rho(T)$  oporności właściwej wolframu od jego temperatury.

**Wyjaśnienie:** jeśli wykonamy, z dowolnego materiału, odcinek o długości  $L$  drutu, o ustalonym kształcie przekroju poprzecznego o powierzchni  $S$ , to opór  $R$  tego odcinka wynosi:

$$R = \rho \frac{L}{S},$$

gdzie  $\rho$  jest charakteryzującym materiał współczynnikiem, zwanym opornością właściwą.

**RAPORT KOŃCOWY**

Wyniki pomiarów, w postaci pliku tekstowego, pliku do programu Excel pakietu MS Office lub pliku do programu Calc pakietu Libre/Open Office proszę przesłać e-mailem prowadzącemu zajęcia **niezwłocznie** po złożeniu raportu. Raport będzie czekał na sprawdzenie, aż to uczynisz.

Przygotuj raport końcowy zgodnie z ogólnymi zasadami podanymi w Instrukcji do Ćwiczenia 1 – WAHADŁO MATEMATYCZNE. W szczególności, raport powinien zawierać:

- 1) w kilkudzaniowym streszczeniu: konkluzję odnośnie do słuszności praw Ohma i Kirchhoffa oraz informację o zastosowanie tych praw do wyznaczenia siły elektromotorycznej i oporu wewnętrznego baterii wraz z przedstawieniem ocen tych wielkości;
- 2) we wstępie: sformułowanie zadania, tj. sprawdzenie słuszności praw Ohma i Kirchhoffa, sposoby tego sprawdzenia i przykładowe wykorzystanie tych praw do wyznaczenia siły elektromotorycznej i oporu wewnętrznego baterii; tu też powinna się znaleźć informacja o wizualnym sprawdzeniu zgodności modelowego rozkładu Gaussa z doświadczalnym rozkładem wyników pomiaru okresu drgań wahadła;
- 3) w części odnoszącej się do pracy eksperymentalnej: informacje o używanych przyrządach i ich dokładnościach, opis metod pomiaru i ich przebiegu oraz surowe wyniki pomiarów – zapisane bez zaokrągleń, wraz z nieistotnymi zerami ukazującymi dokładność (pamiętaj – raport, to nie dziennik laboranta, w którym prezentowana jest czasowa sekwencja podejmowanych działań – w raporcie prezentowane kroki pomiarowe powinny mieć uzasadnienie merytoryczne wynikające z postawionego problemu):
  - a) oporności  $R_1$  wybranego opornika oraz napięcia i natężenia na nim przy różnych napięciach zasilacza – punkt b) w części POMIARY;
  - b) oporności  $R_2$  i  $R_3$  dodatkowych oporników – punkt c) w części POMIARY
  - c) napięć na opornikach  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$  – punkt d) w części POMIARY;

- d) łącznej oporności  $R_c$  – punkt f) w części POMIARY;
  - e) natężenia prądów  $I_c$  wypływającego ze źródła i natężenia prądów  $I_1, I_2$  oraz  $I_3$  w kolejnych gałęziach – punkt g) w części POMIARY;
  - f) napięcia na baterii i natężenia czerpanego z niej prądu – punkt i) w części POMIARY;
- 4) w części odnoszącej się do analizy danych:
- a) analizę zależności między napięciem i natężeniem na wybranym oporniku – punkt b) w części POMIARY – wraz z:
    - wykresem, na papierze milimetrowym, zależności między napięciem a natężeniem;
    - naniesioną na wykresie prostą najlepszego wizualnego dopasowania;
    - ocenami parametrów prostej uzyskanymi w wykresu;
    - współrzędnymi punktów, z których te oceny uzyskano;
    - konkluzją wynikającą z tej analizy;
  - b) analizę wyników pomiarów napięć na opornikach połączonych szeregowo – punkt d) w części POMIARY – pod kątem ich zgodności z prawem Kirchhoffa;
  - c) analizę wyników pomiarów oporności w połączeniu równoległym – punkt b), c) oraz f) w części POMIARY – pod kątem ich zgodności z prawem Kirchhoffa;
  - d) analizę wyników pomiarów natężeń prądu w różnych gałęziach – punkt g) w części POMIARY – pod kątem ich zgodności z prawem Kirchhoffa;
  - e) analizę wyników pomiarów napięcia i natężenia – punkt i) w części POMIARY – pod kątem ich zgodności z prawami Kirchhoffa, wraz z:
    - wykresem, na papierze milimetrowym, zależności między napięciem a natężeniem;
    - naniesioną na wykresie prostą najlepszego wizualnego dopasowania;
    - ocenami parametrów prostej uzyskanymi w wykresu;
    - współrzędnymi punktów, z których te oceny uzyskano;
    - konkluzją wynikającą z tej analizy;
- 5) w części odnoszącej się do wizualnego porównania modelowego rozkładu Gaussa z danymi:
- a) histogram, na papierze milimetrowym, liczebności, częstości lub gęstości 216 ocen okresu drgań wraz z odpowiadającą mu krzywą wynikającą z rozkładu normalnego; papier milimetrowy otrzymasz w Sekretariacie Pracowni lub skorzystaj z dołączonego do instrukcji; wykorzystaj **własne** dane uzyskane w Ćwiczeniu 1;
  - b) wykorzystane w obliczeniach oceny parametrów tego rozkładu;
- 6) w dyskusji i wnioskach końcowych: omówienie rezultatów analizy danych wraz z konkluzją odnośnie do słuszności praw Ohma i Kirchhoffa i wyjaśnieniem możliwych przyczyn w przypadku, gdyby któreś z praw nie było spełnione;
- 7) w spisie literatury: poprawnie zredagowane, wykorzystane w raporcie źródła, o ile w raporcie była potrzeba odwoływania się do źródeł zewnętrznych.

Do raportu nie musisz przygotowywać nowych rysunków – wystarczy, że dołączysz wykonane w ramach zadań domowych do ćwiczeń rachunkowych, o ile uzyskały akceptację prowadzącego zajęcia. W przeciwnym przypadku przygotuj nowe, zgodnie ze jego wskazówkami.

Raport końcowy powinien zawierać wszystkie surowe wyniki pomiarów, aby można było, bez odwoływania się do zapisków sporządzonych w trakcie wykonywania doświadczenia, powtórzyć wszystkie obliczenia i sprawdzić ich poprawność.

Raport należy oddać, wraz z otemplowanym arkuszem otrzymanym przy przystępowaniu do części pomiarowej, w Sekretariacie Pracowni na następnych zajęciach, po zakończeniu ćwiczeń rachunkowych do niniejszego doświadczenia. W raporcie można wykorzystać jedynie własne dane.

**Raport nie może uzyskać zaliczenia, jeśli choć jedna z wartości liczbowych jest błędna z powodu błędów rachunkowych bądź wyboru błędnej metody analizy!**

**DODATEK – CAŁKI ROZKŁADU NORMALNEGO (GAUSSA).**

Tabela poniżej podaje wartość całki standaryzowanego rozkładu normalnego

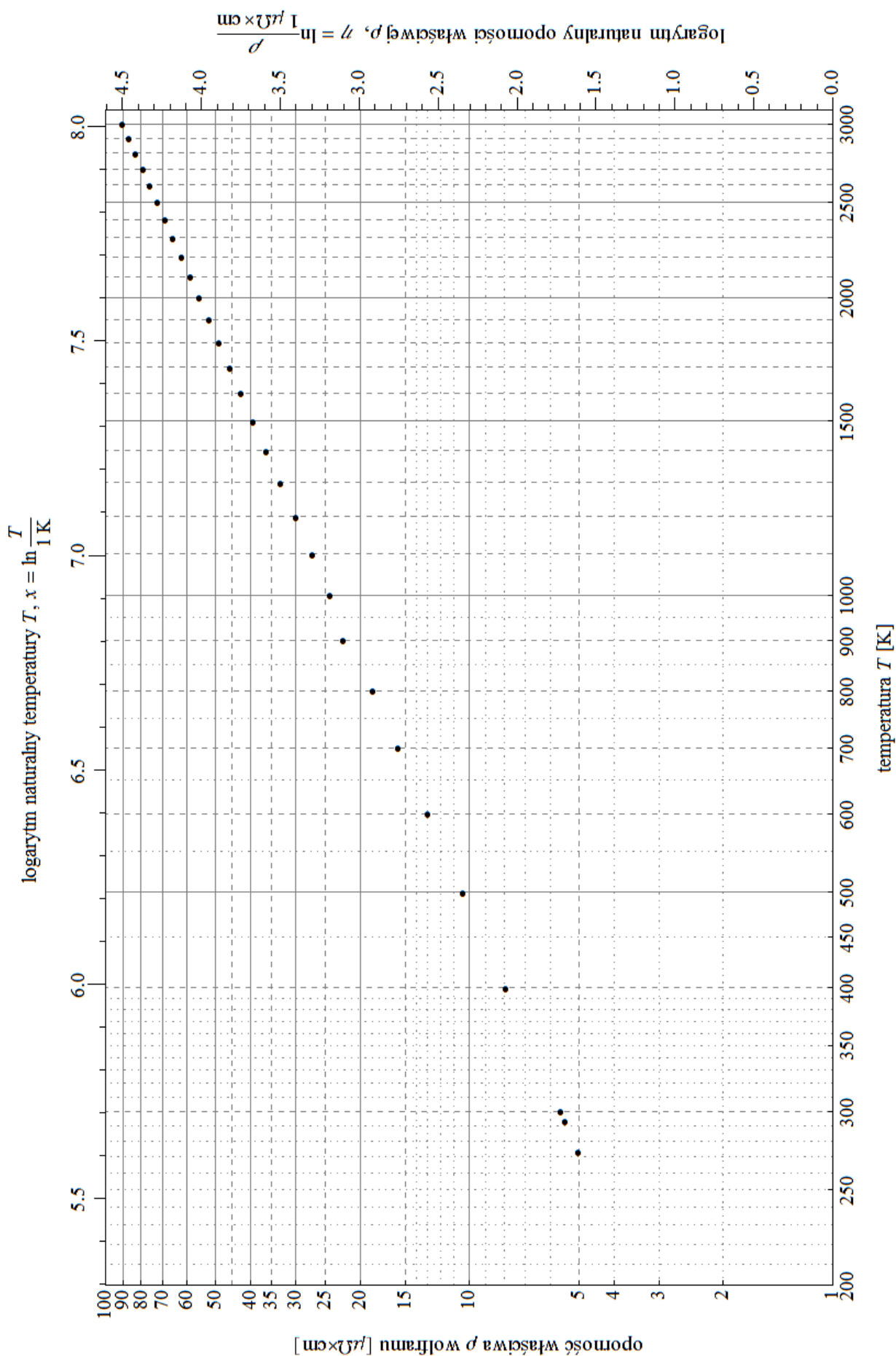
$$F(z) := P(-\infty < x \leq z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \quad z > 0.$$

Z uwagi na symetrię rozkładu, wartość funkcji  $F(z)$  dla ujemnych wartości argumentu można wyznaczyć ze związku  $F(-z) = 1 - F(z)$ .

Tabela 5. Wartości całek rozkładu Gaussa

$z$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,10	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,20	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,30	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,40	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,50	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,60	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,70	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,80	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,90	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,00	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,10	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,20	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,30	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,40	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,50	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,60	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,70	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,80	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,90	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,00	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,10	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,20	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,30	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,40	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,50	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,60	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,70	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,80	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,90	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,00	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,10	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,20	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,30	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,40	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,50	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,60	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,70	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,80	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,90	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Aby odczytać wartość całki dla np.  $z = 1,23$  wybierz wiersz odpowiadający liczbie 1,20 i kolumnę odpowiadającą wartości 0,03, a na ich przecięciu znajdziesz wartość  $F(z) = 0,8907$ .



Rys. 11. Zależność oporności właściwej wolframu od temperatury

