

Analiza niepewności pomiarowych i pracownia wstępna

Andrzej Majhofer

1 Plan wykładu

- Wprowadzenie: pomiar i analiza dokładności wyniku pomiaru. Rodzaje i źródła niepewności: błąd grubo, błąd przypadkowy, składowa systematyczna błędu. Dokładność przyrządów pomiarowych. Regulacje prawne.
- Charakterystyki zbiorów danych liczbowych: średnia, średnie odchylenie kwadratowe (dyspersja rozkładu). Graficzna prezentacja i analiza danych (histogram).
- Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Składowa przypadkowa niepewności pomiaru (błąd przypadkowy).
- Wpływ efektów systematycznych: wprowadzanie poprawek oraz sposoby uwzględniania ograniczonej dokładności przyrządów.
- Dobra praktyka laboratoryjna.
- Publikacja wyników: publikacja w czasopiśmie naukowym, raport laboratoryjny...

2 Warunki zaliczenia

1. Uzyskanie pozytywnych ocen z opisów własnych doświadczeń w ramach Pracowni Wstępnej (5 ćwiczeń – należy zaliczyć wszystkie, w tym dwa ostatnie na ocenę).
2. Uzyskanie pozytywnej oceny z kolokwium końcowego (zadania rachunkowe z zakresu analizy danych). Kolokwium w I terminie odbędzie się przed końcem semestru, a w II terminie podczas sesji egzaminacyjnej (najprawdopodobniej pod koniec sesji).
3. Ocena końcowa jest średnią ważoną średniej ocen z opisów doświadczeń (waga $2/3$) i oceny z kolokwium końcowego (waga $1/3$).

3 Literatura

1. J. R. Taylor, **Wstęp do analizy błędu pomiarowego**, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1995.
2. G. L. Squires, **Praktyczna fizyka**, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1992.
3. H. Abramowicz, **Jak analizować wyniki pomiarów**, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1992.

4 Literatura uzupełniająca

1. S. Brandt, **Analiza danych**, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1998.
2. W. T. Eadie, D. Drijard, F. E. James, M. Roos i B. Sadoulet, **Metody statystyczne w fizyce doświadczalnej**, PWN, Warszawa, 1989.
3. J. J. Jakubowski i R. Sztencel, **Wstęp do teorii prawdopodobieństwa**, SCRIPT, Warszawa, 2001.
4. W. Feller, **Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa**, PWN, Warszawa, 1977.
5. R. Nowak, **Statystyka dla fizyków**, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2002.

5 Charakterystyki zbiorów danych liczbowych

Dla zbioru danych (pełna populacja):

$$i \rightarrow x_i, i = 1, 2, \dots, N$$

definiujemy

średnią:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} x_i,$$

inaczej:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N);$$

średnie odchylenie kwadratowe:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \bar{x})^2;$$

wielkość σ nazywana jest też **dyspersją rozkładu**;

medianę:

Mediana jest to liczba dzieląca *uporządkowany* zbiór wartości x_i na dwa równoliczne podzbiory (na ogół nie jest określona jednoznacznie). *Gdy liczba N danych wartości x_i jest parzysta, często przyjmuje się dodatkowo, że mediana równa jest średniej arytmetycznej $x_{N/2}$ i $x_{1+N/2}$.*

6 Bezpośredni pomiar pojedynczej wielkości fizycznej

Pomiar → porównanie z wzorcem

Źródła odchylenia wyniku od wartości dokładnej:

- metoda pomiaru;
- wystąpienie błędów grubych i systematycznych;
- sposób postępowania → ustalenie i kontrolowanie warunków pomiaru;
- jakość przyrządów → „odtworzenia wzorca”.

Główne typy odchyłeń od wartości dokładnej (błędy):

- **błąd gruby:**

pomyłka zapisu, źle odczytany zakres miernika, zmierzenie nie tej wielkości co trzeba, awaria aparatury (np. przerwy w zasilaniu...);

unikanie i eliminowanie błędów grubych: staranność postępowania i szczegółowe dokumentowanie przebiegu pomiaru;

- **błąd systematyczny:**

odchylenie wyniku od wartości dokładnej mające tę samą wartość przy powtarzaniu pomiaru w tych samych warunkach (np. temperatura otoczenia różna od temperatury kalibracji przyrządów, błąd wskazań miernika....);

ocena wielkości błędu systematycznego: możliwa tylko poprzez wykonywanie pomiarów różnymi metodami lub poprzez badanie zależności wyniku od zmian warunków wykonywania pomiarów (→ wprowadzenie poprawek);

- **błąd przypadkowy:**

odchylenie wyniku pomiaru od wartości dokładnej przyjmujące różne wartości podczas powtarzania pomiarów w tych samych warunkach;

błędu przypadkowego nie można całkowicie wyeliminować, ale można ocenić parametry rozkładu pojawiających się wartości odchyłeń z nim związanych → model matematyczny.

Założenia matematycznego modelu błędu pomiaru:

Przyjmijmy oznaczenia:

- $\mu =$ *wartość dokładna mierzonej wielkości*
(zakładamy, że istnieje i jest jednoznacznie określoną, mianowaną liczbą rzeczywistą);
- $x =$ *wynik pomiaru*
 $x = \mu + \varepsilon$
 $\varepsilon =$ *błąd pomiaru*

Nasze rozważania rozpoczniemy od opisu błędów przypadkowych (zakładamy, że wyeliminowane są błędy grube i systematyczne):

- $\varepsilon =$ *błąd przypadkowy* powstaje w wyniku złożenia działania *bardzo wielu* czynników *niezależnych*, a każdy z tych czynników daje *bardzo mały* wkład do odchylenia wyniku pomiaru od wartości dokładnej (będziemy poszukiwali granicy, gdy liczba czynników dąży do nieskończoności, a wkład każdego z nich dąży do zera);
- do opisu błędów przypadkowych posłużymy się rachunkiem prawdopodobieństwa.

Pojęcie prawdopodobieństwa w języku potocznym rozumiane bywa jako:

- miara naszej niewiedzy
- stopień przekonania
- średnia częstość występowania zjawiska w długiej serii powtórzeń.

Posługiwanie się „intuicyjnym” rozumieniem pojęcia prawdopodobieństwa prowadzi do paradoksów, gdy próbujemy wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzeń złożonych.

Dla uniknięcia takich trudności posłużymy się aksjomatycznym sformułowaniem teorii (rachunku) prawdopodobieństwa.

Analogia:

Rachunek prawdopodobieństwa jest aksjomatyczną teorią *zdarzeń przypadkowych (losowych)* tak, jak

geometria euklidesowa jest aksjomatyczną teorią *figur geometrycznych*.

Obie są niezależne od możliwych zastosowań, chociaż mogą być bardzo użyteczne.

7 Przypomnienie podstaw rachunku prawdopodobieństwa

Niech:

Ω będzie przestrzenią zdarzeń

Prawdopodobieństwo

Prawdopodobieństwem nazywamy odwzorowanie:

$$\Omega \supset A \rightarrow p(A) \in [0, 1] ,$$

spełniające warunki:

1. A – zdarzenie pewne $\rightarrow p(A) = 1$;
2. A – zdarzenie niemożliwe $\rightarrow p(A) = 0$;
3. $\Omega \supset A, B$ oraz $A \cap B = \emptyset$, to:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

Definiuje się też:

$A' = \Omega \setminus A$, zdarzenie przeciwne do A :
 $p(A') = 1 - p(A)$.

W szczególności: $p(\Omega) = 1$, $p(\Omega') = 0$.

Prawdopodobieństwo warunkowe $p(A|B)$

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B , $p(B) \neq 0$:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Zdarzenia A i B są **niezależne**, gdy:

$$p(A|B) = p(A) \rightarrow p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

Uwaga: Gdy zdefiniowana jest przestrzeń zdarzeń i określone zostało na niej prawdopodobieństwo $p(\cdot)$, to stwierdzenie, że dane dwa zdarzenia są niezależne następuje na podstawie wyniku obliczeń.

Przykład 1.

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Każdy z możliwych wyników (ciąg reszek, R , i orłów, O) jest jednakowo prawdopodobny. Czy wyrzucenie orła w drugim rzucie (zdarzenie A) jest zdarzeniem niezależnym od wyrzucenia orła w rzucie pierwszym (zdarzenie B)?

- Zaczynamy od zbudowania przestrzeni zdarzeń:

$$\Omega = \{(O, O, O), (O, O, R), (O, R, O), (R, O, O), \\ (O, R, R), (R, O, R), (R, R, O), (R, R, R)\}.$$

- Każde ze zdarzeń wymienionych w definicji Ω jest jednakowo prawdopodobne. Zdarzeń jest 8, a więc prawdopodobieństwo każdego z nich wynosi $1/8$.
- Określamy prawdopodobieństwo zdarzenia *w pierwszym rzucie orzeł*. Zdarzenie to jest sumą (teoriomnogościową) czterech rozłącznych zdarzeń wymienionych w definicji Ω .

Mamy więc:

$$P((O, \cdot, \cdot)) = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} =: P(B).$$

Analogicznie dla zdarzenia *orzeł w drugim rzucie*:

$$P((\cdot, O, \cdot)) = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} =: P(A).$$

Iloczyn zdarzeń A i B to zdarzenie wyrzucenia orła w pierwszym i drugim rzucie – odpowiadają mu dwa zdarzenia w definicji Ω .
Otrzymujemy więc:

$$P(A \cap B) = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Ostatecznie ($P(B) \neq 0$):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} = P(A).$$

Wniosek: zdarzenia A i B są niezależne.

Uwaga: Można też było postąpić odwrotnie – przyjąć, że kolejne rzuty są zdarzeniami niezależnymi, a w każdym rzucie prawdopodobieństwa wyrzucenia orła i reszki są sobie równe i wynoszą $1/2$. Takie założenie pozwala wyznaczyć prawdopodobieństwo uzyskania każdego wyniku serii o dowolnej, skończonej długości.

Przykład 2. Próby Bernoulliego i rozkład dwumianowy.

Uogólnijmy zagadnienie z Przykładu 1. Wykonujemy serię **niezależnych prób**. W każdej z nich uzyskujemy sukces z prawdopodobieństwem p lub ponosimy porażkę z prawdopodobieństwem q – oczywiście mamy $p + q = 1$.

Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania **dokładnie** k sukcesów w ciągu n takich prób?

- Prawdopodobieństwo uzyskania zadanego ciągu sukcesów i porażek równe jest (na podstawie założenia o niezależności prób) iloczynowi, w którym p występuje tyle razy ile jest w tym ciągu sukcesów, a q tyle razy ile porażek.
- Każde ze zdarzeń sprzyjających wynikowi, o który pytamy w zadaniu (dokładnie k sukcesów w n próbach) pojawia się więc z prawdopodobieństwem:

$$p^k q^{n-k}$$

- Liczba takich zdarzeń wynosi ($n \geq k$):

$$\frac{n!}{k!(n-k)!},$$

przy czym: $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$, a dodatkowo przyjmuje się $0! = 1$.

- Ostatecznie otrzymujemy (tzw. dwumianowy rozkład prawdopodobieństwa):

$$P(k; n, p) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

8 Zmienna losowa, wartość oczekiwana

Zmienna losowa

Funkcja liczbowa określona na przestrzeni zdarzeń nazywana jest zmienną losową. Inaczej: zmienna losowa przyporządkowuje liczby zdarzeniom losowym.

Przykład 3.

Każdemu wynikowi rzutu sześcienną kostką (zdarzenie losowe) przyporządkowujemy liczbę oczek na górnej ścianie kostki.

Wartość oczekiwana zmiennej losowej:

Wartością oczekiwaną, $\mathcal{E}(x)$, zmiennej losowej x nazywamy:

$$\mathcal{E}(x) = \sum_i x_i p_i,$$

dla dyskretnej zmiennej losowej, lub

$$\mathcal{E}(x) = \int x f(x) dx,$$

dla zmiennej losowej ciągłej, przy czym sumowanie (całkowanie) przebiega cały zakres zmienności x , a $f(x)$ oznacza gęstość rozkładu prawdopodobieństwa otrzymania wartości x .

Przykład 4.

Wynik pomiaru jest zmienną losową. Interesuje nas wartość oczekiwana tej zmiennej oraz wartość oczekiwana kwadratu odchylenia tej zmiennej od jej wartości oczekiwanej.

W przypadku, gdy wyeliminowane są błędy grube i systematyczne, wartość oczekiwaną utożsamiamy z **wartością mierzoną** (poszukiwaną). Zadanie do rozwiązania: jak wyznaczyć wartość oczekiwaną na podstawie skończonej (na ogół niewielkiej) liczby prób?

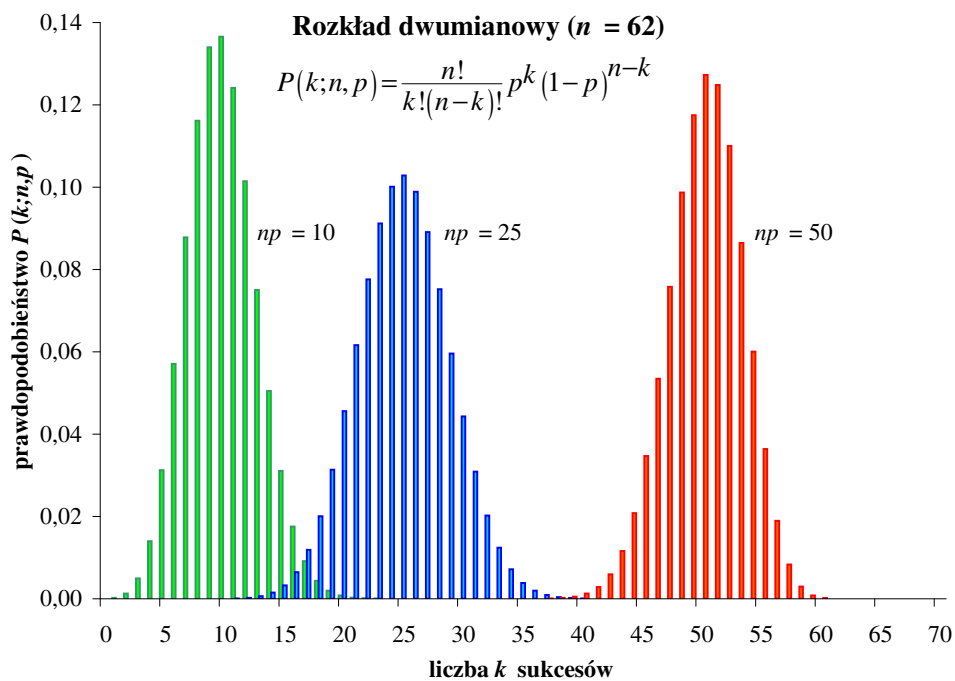
Przykład 5.

Wartość oczekiwana zmiennej losowej k dla rozkładu dwumianowego:

$$\mathcal{E}(k) = np$$

Wartość oczekiwana kwadratu odchylenia zmiennej losowej k od jej wartości oczekiwanej:

$$\mathcal{E}((k - \mathcal{E}(k))^2) = npq = np(1 - p)$$



Rysunek 1: Histogramy prawdopodobieństw liczby sukcesów k opisanych rozkładem dwumianowym w przypadku $n = 62$ prób i różnych wartości p , prawdopodobieństwa sukcesu w pojedynczej próbie

9 Wzór Stirlinga

Obliczanie $n!$ jest bardzo kłopotliwe. W rachunkach bardzo przydatny okazuje się wzór przybliżony, tzw. wzór Stirlinga:

$$\begin{aligned}n! &= n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\Theta}{12n}} \\ &= S(n) e^{\frac{\Theta}{12n}},\end{aligned}$$

gdzie $0 < \Theta < 1$.

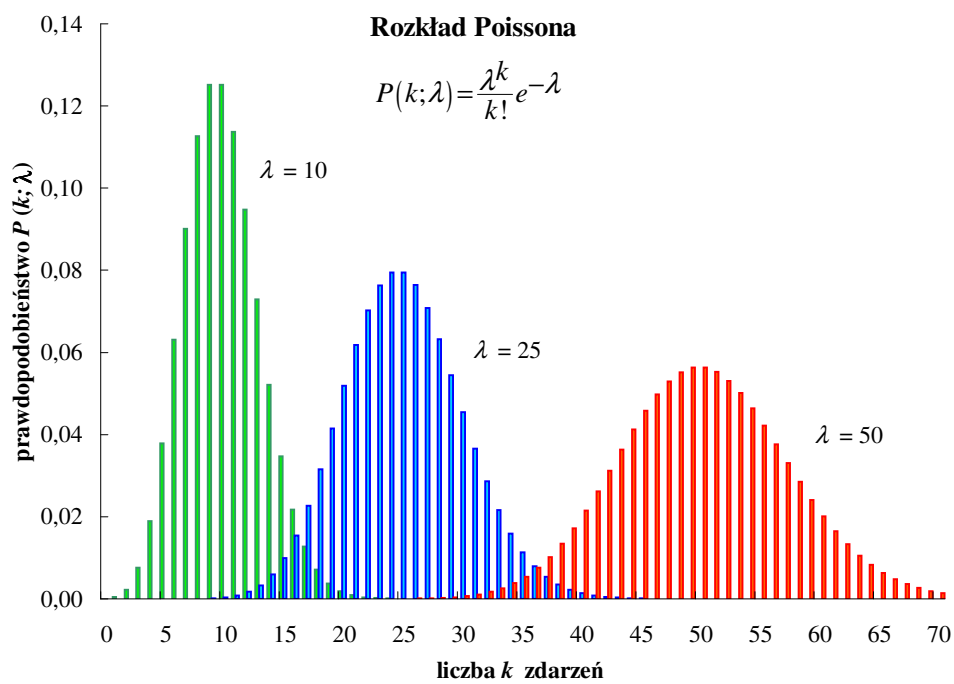
Poniższa tabela ilustruje charakter przybliżenia $n! \simeq S(n)$ (ilustracja wzorowana na: Jerzy Neyman, *Zasady Rachunku Prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa, 1969):

Tabela 1. Porównanie dokładnych wartości $n!$ z obliczonymi za pomocą wzoru Stirlinga.

n	$n!$	$S(n)$	$n!/S(n)$	$n! - S(n)$
2	2	1,9	1,042	0,1
4	24	23,5	1,021	0,5
6	720	710,1	1,014	9,9
8	40 320	39 902,4	1,010	417,6
10	3 628 800	3 598 699,6	1,008	30 100,4
11	39 916 800	39 615 625,2	1,008	301 174,8
12	479 001 600	475 687 487,7	1,007	3 314 112,3

Przykład 6.

Wyznaczyć rozkład, do którego dąży rozkład dwumianowy, gdy $n \rightarrow \infty$, a oczekiwana liczba sukcesów jest skończona i stała, $\lambda = np$. Wynikiem jest tzw. **rozkład Poissona**.



Rysunek 2: Histogramy rozkładu Poissona dla różnych λ – oczekiwanej liczby przypadków.

10 Rozkład Gaussa – Graniczna postać rozkładu dwumianowego ($n \rightarrow \infty$)

Dla rozkładu dwumianowego:

$$P(k; n, p) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

dla dużych n otrzymujemy:

$$P(k; n, p) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}\right).$$

Wprowadźmy oznaczenia $\mu := np$ oraz $\sigma := \sqrt{np(1-p)}$ i rozważmy ciągły rozkład gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

nazywany **rozkładem normalnym** lub **rozkładem Gaussa**.

Dla $x_1 < x_2$ prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa opisana rozkładem normalnym przyjmuje wartość pomiędzy x_1 i x_2 równe jest polu pod krzywą $f(x; \mu, \sigma)$ zawartemu pomiędzy x_1 i x_2 .

Przykład 7.

Dla rozkładu normalnego (Gaussa):

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

otrzymujemy

- $P(\mu - 1\sigma \leq x \leq \mu + 1\sigma) \simeq 0,682689$
- $P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \simeq 0,954500$
- $P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) \simeq 0,997300$
- $P(\mu - 4\sigma \leq x \leq \mu + 4\sigma) \simeq 0,999937$

Twierdzenie graniczne

Jeżeli dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych pochodzących z dowolnego rozkładu, który ma skończoną wartość oczekiwaną μ i skończoną dyspersję σ , to rozkład zmiennej losowej:

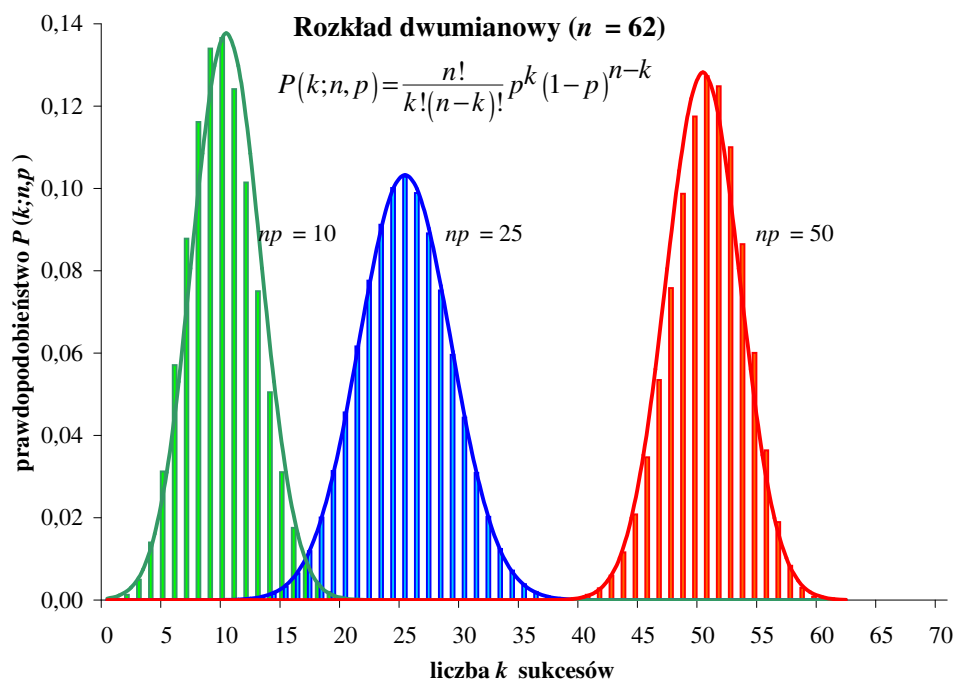
$$z_n := \frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}},$$

gdzie

$$\bar{x}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

dla $n \rightarrow \infty$ dąży do standardowego rozkładu Gaussa:

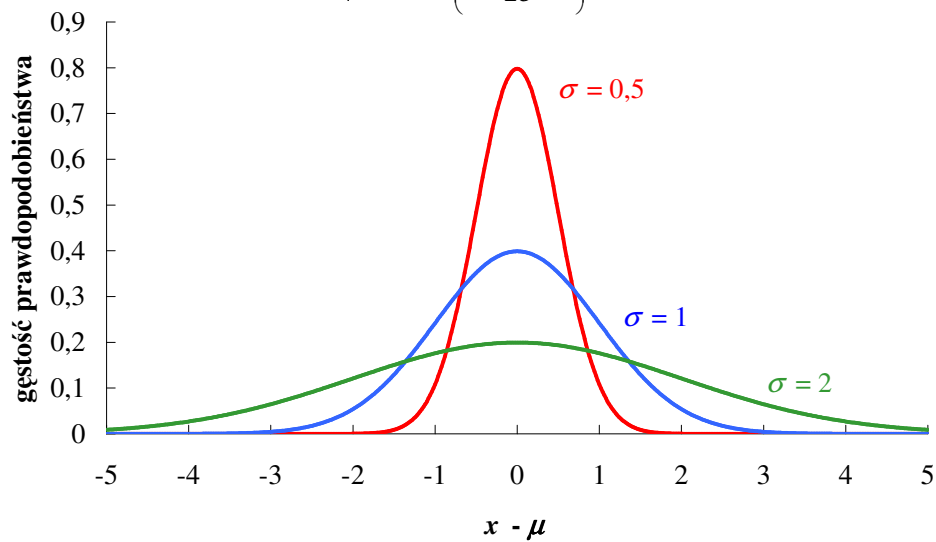
$$N(z; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)$$



Rysunek 3: Porównanie dokładnych histogramów rozkładu dwumianowego z wprowadzonym wzorem przybliżonym – linia ciągła.

Przykłady rozkładów Gaussa

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



Rysunek 4: Rozkład Gaussa: gęstości rozkładu dla różnych wartości dyspersji σ .

11 Prawo wielkich liczb Bernoulliego

Niech, k będzie zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa:

$$P(k; n, p) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Tworzymy nową zmienną losową:

$$x_n := \frac{k}{n} - p$$

wówczas:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P(|x_n| > \varepsilon) = 0,$$

(w granicy $n \rightarrow \infty$ prawdopodobieństwo, że uzyskamy x_n większe co do wartości bezwzględnej od wybranej, dowolnie małej liczby dodatniej, dąży do zera).

Uwaga: Zbieżność opisanana w powyższym twierdzeniu nazywana jest **zbieżnością stochastyczną**. Moglibyśmy więc powyżej powiedzieć: *Ciąg x_n jest stochastycznie zbieżny do zera, gdy n dąży do nieskończoności.*

Istnieje wiele różnych postaci twierdzenia wielkich liczb.

Twierdzenia te opisują związek ścisłego pojęcia prawdopodobieństwa z jego (intuicyjną) interpretacją „częstościową”.

12 Model błędu przypadkowego: złożenie wielu małych odchyłeń

Błąd przypadkowy opiszemy jako odchylenie wyniku pomiaru x od wartości dokładnej μ powstające na skutek złożenia bardzo wielu niezależnych czynników przypadkowych, z których każdy powoduje odchylenie wyniku o $+\varepsilon$ lub $-\varepsilon$ z prawdopodobieństwem:

$$p = q = \frac{1}{2}.$$

Dla n czynników zaburzających mamy:

$$\begin{aligned}x &= \mu + k\varepsilon - (n - k)\varepsilon \\ &= \mu + (2k - n)\varepsilon.\end{aligned}$$

Wartości $x - \mu$ odpowiada więc:

$$\begin{aligned}k &= \frac{x - \mu}{2\varepsilon} + \frac{n}{2} = \frac{x - \mu + n\varepsilon}{2\varepsilon} \\ \mathcal{E}(k) &= np = \frac{n}{2}\end{aligned}$$

Stosując przybliżone wyrażenie na prawdopodobieństwo w rozkładzie dwumianowym dla dużych n otrzymujemy, że prawdopodobieństwo uzyskania w wyniku pomiaru danej wartości $x - \mu$ wynosi:

$$\begin{aligned}P(x - \mu; n, \frac{1}{2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n \frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2n \frac{1}{4} (2\varepsilon)^2}\right) \\ &= \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\pi n \varepsilon^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2n \varepsilon^2}\right).\end{aligned}$$

Dokonajmy przejścia granicznego $n \rightarrow \infty$ (liczba losowych czynników zaburzających pomiar dąży do nieskończoności) oraz $\varepsilon \rightarrow 0$ z dodatkowym warunkiem: $n\varepsilon^2 = \sigma^2 = \text{const}$.

Dla prawdopodobieństwa dzielonego przez elementarną zmianę wyniku pomiaru (zmiana k o 1 zmienia wynik o 2ε) otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0; n\varepsilon^2 = \sigma^2} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} P(x - \mu; n, \frac{1}{2}) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Wyrażenie po prawej stronie należy przy tym rozumieć jako gęstość prawdopodobieństwa dla ciągłej zmiennej losowej x .

Interpretacja parametrów rozkładu:

Jeśli otrzymany rozkład służy jako model rozkładu wyników pomiarów (po wyeliminowaniu błędów grubych i systematycznych), to parametry μ i σ interpretujemy jako:

- μ – nieznaną dokładną wartość wielkości mierzonej,
- σ – szerokość rozkładu określająca dokładność, z jaką potrafimy kontrolować stałość warunków dokonywania pomiaru, inaczej mówiąc, σ charakteryzuje proces pomiaru.

Uwaga: Rozkład Gaussa jest powszechnie stosowanym modelem rozkładu prawdopodobieństwa wartości błędu przypadkowego.

Przeprowadzając pomiary zwykle zakładamy jedynie, że rozkład jakiemu podlegają wyniki ma dobrze określone (i skończone): wartość oczekiwaną i średnie odchylenie kwadratowe. Nasze zadanie polega wówczas na skonstruowaniu z wyników pomiarów wielkości:

- $\hat{\mu}$ – najlepszej oceny wartości oczekiwanej oraz
- $u(\hat{\mu})$ – niepewności tej oceny,

w taki sposób, aby:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\hat{\mu}) &= \mu \\ \mathcal{E}(u^2(\hat{\mu})) &= \mathcal{E}((\hat{\mu} - \mu)^2). \end{aligned}$$

13 Pomiar pojedynczej wielkości i jego niepewność

Wykonujemy serię niezależnych pomiarów tej samej wielkości (tą samą metodą i w tych samych warunkach). Otrzymujemy serię wyników:

$$x_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Zakładamy, że:

- wyeliminowane zostały błędy grube i systematyczne;
- wartość oczekiwana każdego z wyników pomiaru x_i równa jest dokładnej wartości wielkości mierzonej μ :

$$\mathcal{E}(x_i) = \mu;$$

- średnie odchylenie kwadratowe od wartości dokładnej (wariancja rozkładu), dla każdego x_i wynosi σ^2 :

$$\mathcal{E}((x_i - \mu)^2) = \sigma^2;$$

- wartości oczekiwane μ i σ^2 istnieją i są skończone.

Pytanie:

Jak wyznaczyć μ i σ na podstawie wyników serii niezależnych pomiarów?

Tworzymy wielkości:

$$\begin{aligned}\bar{x} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \\ s^2 &:= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.\end{aligned}$$

Można udowodnić, że:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\bar{x}) &= \mu, \\ \mathcal{E}((\bar{x} - \mu)^2) &= \frac{\sigma^2}{n} =: \sigma_{\bar{x}}^2, \\ \mathcal{E}(s^2) &= \sigma^2, \\ \mathcal{E}((x_i - \bar{x})^2) &= \frac{n-1}{n} \sigma^2, \\ \mathcal{E}((s^2 - \sigma^2)^2) &= \frac{1}{n} \mathcal{E}((x_i - \mu)^4) - \frac{n-3}{n(n-1)} \sigma^4.\end{aligned}$$

Jeśli przyjmiemy, że każda z wielkości x_i podlega rozkładowi Gaussa o wartości oczekiwanej μ i dyspersji σ , to:

$$\mathcal{E}((x_i - \mu)^4) = 3\sigma^4 \Rightarrow \mathcal{E}((s^2 - \sigma^2)^2) = \frac{2}{n-1} \sigma^4.$$

Wniosek: Na podstawie wyników serii pomiarów, najlepszą oceną wartości μ i σ^2 są wielkości $\hat{\mu} := \bar{x}$ i $\widehat{\sigma^2} := s^2$ zdefiniowane jak wyżej. Wielkość $s := \sqrt{s^2}$ określa naszą ocenę dokładności pomiaru, inaczej, **niepewność** pojedynczego wyniku (x_i dla $i = 1, 2, \dots, n$).

14 Wynik pomiaru i jego zapis

Zakładamy, że błędy grube i systematyczne zostały wyeliminowane lub są zanedbywalnie małe w porównaniu z błędami przypadkowymi. Wówczas, na podstawie znajomości wyników serii **niezależnych** pomiarów,

$$x_i, i = 1, 2, \dots, n,$$

wyznaczamy:

- **wynik pomiaru** określony jako wielkość:

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i;$$

- **niepewność pomiaru** $s_{\bar{x}}$ określoną wzorem:

$$s_{\bar{x}}^2 := \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2;$$

- wynik pomiaru podajemy w postaci:

$$x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}} = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}},$$

- $s_{\bar{x}}$ – podajemy w zaokrągleniu do 2 cyfr znaczących,
- \bar{x} – zaokrąglamy tak, aby ostatnia cyfra znacząca \bar{x} była na tym samym miejscu dziesiętnym, co ostatnia cyfra znacząca $s_{\bar{x}}$.

Niepewność wyznaczenia wartości s i $s_{\bar{x}}$ oceniamy korzystając z przybliżenia (zakładamy, że nasze wyniki podlegają rozkładowi Gaussa):

$$\mathcal{E}((s^2 - \sigma^2)^2) = \frac{2}{n-1}\sigma^4 \Rightarrow \frac{\sigma_s}{\sigma} = \frac{\sigma_{s_{\bar{x}}}}{\sigma_{\bar{x}}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2n-2}}$$

Tabela 2. Zależność względnej dokładności oceny s od długości serii n .

n	$\sigma_s/s \leq$
4	1/2
6	1/3
10	1/4
14	1/5
20	1/6
52	1/10
202	1/20
1252	1/50
5002	1/100

Stąd często spotykane zalecenie, żeby wykonywać $n > 5$ pomiarów.

15 Test „ 3σ ”

Przykład 8.

Rzucono 8 razy monetą. Otrzymano 7 orłów. Czy moneta jest „uczciwa”?

Odpowiedź:

Rachunek prawdopodobieństwa pozwala nam tylko na obliczenie prawdopodobieństwa otrzymania uzyskanego wyniku dla danej wartości p – prawdopodobieństwa wyrzucenia *orła* w pojedynczym rzucie. Dla „uczciwej” monety $p = \frac{1}{2}$.

Przyjmując $p = \frac{1}{2}$ otrzymujemy:

$$P(k \geq 7; 8, \frac{1}{2}) = \frac{9}{256} < 0,0352,$$
$$P(k \geq 6; 8, \frac{1}{2}) = \frac{37}{256} < 0,145.$$

Jeśli zdecydujemy np., że odrzucamy hipotezę *moneta jest uczciwa* ($p = \frac{1}{2}$), gdy $P(\text{otrzymanego wyniku}) < 0,04$, to uznajemy, że otrzymane wyniki pozwalają nam uznać, że *moneta nie jest uczciwa*.

Powyższy przykład pomoże nam sformułować metodę porównywania wyników pomiarów z przewidywaniami teoretycznymi lub z innymi wynikami pomiarów.

Założmy, że wykonana została seria pomiarów wielkości x i jako jej wynik otrzymano:

$$x = \hat{x}_1 \pm s_1$$

Często zadawane pytania:

1. Czy otrzymany wynik jest zgodny z wartością

$$x = \mu_0$$

przewidywaną przez teorię?

2. Czy wynik ten jest zgodny z wynikiem

$$x = \hat{x}_2 \pm s_2$$

otrzymanym w innej serii pomiarów, inną metodą lub innymi przyrządami? Inaczej mówiąc: czy oba wyniki doświadczalne są ze sobą zgodne?

Założmy dalej, że wspomniane wyniki doświadczalne uzyskaliśmy dla bardzo długich serii pomiarów, a błędy systematyczne są pomijalnie małe – możemy więc przyjąć, że:

$$s_i \simeq \sigma_i.$$

Dla zmiennej losowej x podlegającej rozkładowi Gaussa o średniej μ i dyspersji σ mamy:

$$P(|x - \mu| \geq 3\sigma) < 0,0028.$$

Oznacza to, że rzadziej niż raz na 350 losowań zmiennej opisanej rozkładem Gaussa otrzymamy wynik różniący się od wartości oczekiwanej o więcej niż 3σ . Pozwala to zdefiniować sposób testowania wyników pomiarów zapewniający, że odrzucimy hipotezę prawdziwą (tzn. popełnimy tzw. **błąd pierwszego rodzaju**) rzadziej niż raz na 350 testowanych przypadków.

Test 3σ :

1. Jeżeli porównujemy wynik pomiaru \hat{x}_1 z wartością μ_0 przewidywaną przez teorię:

$$|\hat{x}_1 - \mu_0| > 3s_1 \Rightarrow \text{odrzucamy hipotezę } x = \mu_0.$$

2. Dla dwóch niezależnych pomiarów o wynikach \hat{x}_1 i \hat{x}_2 :

$$|\hat{x}_1 - \hat{x}_2| > 3\sqrt{s_1^2 + s_2^2} \Rightarrow \text{odrzucamy hipotezę, że w obu pomiarach mierzona była ta sama wielkość.}$$

Uwaga: Jeżeli (jak to w praktyce najczęściej bywa i co sugeruje użyta powyżej notacja) zamiast dokładnych wartości dyspersji, σ , odpowiednich rozkładów Gaussa posługujemy się ich ocenami, s , to nasza decyzja staje się mniej kategorierna – prawdopodobieństwo popełnienia błędu pierwszego rodzaju może być większe niż to wynika z rozkładu Gaussa (niż przyjęta wartość krytyczna tego prawdopodobieństwa).

16 Pomiary pośrednie i „propagacja małych błędów”.

Nie zawsze możliwy jest bezpośredni pomiar interesującej nas wielkości y , albo też pomiar taki nie byłby wystarczająco dokładny. W takiej sytuacji często posługujemy się znanymi związkami funkcyjnymi pomiędzy wielkością y i innymi wielkościami dostępnymi bezpośrednim pomiarom:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

gdzie $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ jest znaną funkcją, a wielkości x_1, x_2, \dots, x_k potrafimy mierzyć bezpośrednio.

Zakładamy, że:

- dokładna wartość wielkości y wynosi $\eta = f(\mu_1, \dots, \mu_k)$, gdzie μ_1, \dots, μ_k są dokładnymi wartościami wielkości x_1, \dots, x_k ;
- wielkości $x_i, i = 1, \dots, k$ są mierzone **niezależnie** i w wyniku pomiarów otrzymano wartości $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$, przy czym:

$$\mathcal{E}(\hat{x}_i) = \mu_i;$$

- dla kolejnych $\hat{x}_i, i = 1, \dots, k$ zachodzi także

$$\mathcal{E}((\hat{x}_i - \mu_i)^2) = \sigma_{\hat{x}_i}^2;$$

- w wyniku pomiarów wyznaczono też $s_{\hat{x}_1}, \dots, s_{\hat{x}_k}$ – oceny niepewności $\sigma_{\hat{x}_1}, \dots, \sigma_{\hat{x}_k}$ w taki sposób, że:

$$\mathcal{E}(s_{\hat{x}_i}^2) = \sigma_{\hat{x}_i}^2.$$

Twierdzenie:

Jeśli spełnione są powyższe założenia oraz

$$\eta = \sum_{i=1}^k a_i \mu_i,$$

gdzie $a_i, i = 1, \dots, k$ są znanymi stałymi, to

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\hat{y}) &= \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^k a_i \hat{x}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i \mu_i = \eta, \\ \mathcal{E}\left(\left(\sum_{i=1}^k a_i \hat{x}_i - \eta\right)^2\right) &= \sum_{i=1}^k a_i^2 \sigma_{\hat{x}_i}^2. \end{aligned}$$

Wniosek: Wynik pomiaru pośredniego wynosi $y = \hat{y} \pm s_{\hat{y}}$, gdzie

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \sum_{i=1}^k a_i \hat{x}_i \\ s_{\hat{y}}^2 &= \sum_{i=1}^k a_i^2 s_{\hat{x}_i}^2 \end{aligned}$$

Propagacja małych błędów

W przypadku, gdy $\eta = f(\mu_1, \dots, \mu_k)$, dla *odpowiednio* małych niepewności $\sigma_{\hat{x}_i}$ i funkcji $f(x_1, \dots, x_k)$ różniczkowalnej w sposób ciągły (gładkiej) otrzymujemy przybliżenie:

$$\eta := \mathcal{E}(y) \simeq \hat{y} := f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k)$$

oraz

$$\mathcal{E}((\hat{y} - \eta)^2) \simeq \sum_{i=1}^k \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mu_1, \dots, \mu_k} \right)^2 \sigma_{\hat{x}_i}^2,$$

gdzie

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mu_1, \dots, \mu_k} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mu_1, \dots, \mu_i + h, \dots, \mu_k) - f(\mu_1, \dots, \mu_i, \dots, \mu_k)}{h}.$$

Na podstawie pomiaru znamy jednak tylko wartości $s_{\hat{x}_i}$, to jest oceny wartości $\sigma_{\hat{x}_i}$. Definiujemy więc wielkość:

$$s_{\hat{y}}^2 := \sum_{i=1}^k \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k} \right)^2 s_{\hat{x}_i}^2,$$

a **wynik końcowy** podajemy w postaci:

$$y = \hat{y} \pm s_{\hat{y}}.$$

Uwaga: Niepewności $\sigma_{\hat{x}_i} \simeq s_{\hat{x}_i}$ są *odpowiednio* małe, gdy pochodne

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k}$$

są z dobrym przybliżeniem stałe dla $x_i \in [\hat{x}_i - s_{\hat{x}_i}, \hat{x}_i + s_{\hat{x}_i}]$.

17 Metoda najmniejszych kwadratów

- Wiemy (zakładamy), że wielkości fizyczne x i y wiąże zależność: $y = f(x; a_1, a_2, \dots, a_k)$, gdzie a_i są nieznanymi nam parametrami (np. charakteryzującymi właściwość badanego materiału).
- Dla $N > k$ różnych wartości wielkości x mierzymy odpowiadające im wartości y : $x_i \rightarrow \hat{y}_i, i = 1, \dots, N$.
- Zakładamy, że x_i znane są *dokładnie*, a każdy wynik \hat{y}_i jest zmienną losową opisaną rozkładem Gaussa o średniej $f(x_i; a_1, \dots, a_k)$ i dyspersji σ_i .

Pytanie:

Jak na podstawie opisanych wyżej wyników pomiarów wyznaczyć wartości parametrów a_j i ich niepewności?

Idea postępowania: Przyjmujemy, że to, co obserwujemy reprezentuje sytuację typową, to jest bliską sytuacji najbardziej prawdopodobnej.

Wniosek: Będziemy szukali takiego zbioru wartości $a_j, j = 1, \dots, k$, dla którego otrzymany wynik odpowiada **maksimum gęstości prawdopodobieństwa**. Poszukiwanie maksimum iloczynu funkcji Gaussa (jako modelu gęstości prawdopodobieństwa otrzymanych wyników) prowadzi do warunku:

$$\mathcal{R} := \sum_{i=1}^N \frac{(\hat{y}_i - f(x_i; a_1, \dots, a_k))^2}{\sigma_i^2} \rightarrow \text{minimum}.$$

Poszukujemy takich wartości $a_j, j = 1, \dots, k$, dla których \mathcal{R} przyjmuje wartość minimalną.

Minimum wielkości \mathcal{R} zdefiniowanej powyżej pozwala znajdować dobre oceny wartości parametrów $a_j, j = 1, \dots, k$ także w przypadkach, gdy wyniki pomiarów, \hat{y}_i , podlegają rozkładowi innemu niż rozkład Gaussa, jeśli tylko dla każdego i spełnione są warunki:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\hat{y}_i) &= f(x_i; a_1, \dots, a_k), \\ \mathcal{E}((\hat{y}_i - f(x_i; a_1, \dots, a_k))^2) &= \sigma_i^2,\end{aligned}$$

a wielkości występujące po prawych stronach obu równości istnieją i są skończone.

Metoda znajdowania wartości parametrów $a_j, j = 1, \dots, k$ poprzez minimalizację wielkości:

$$\mathcal{R} := \sum_{i=1}^N \frac{(\hat{y}_i - f(x_i; a_1, \dots, a_k))^2}{\sigma_i^2} \rightarrow \textit{minimum}$$

nazywana jest **metodą najmniejszych kwadratów**.

18 Pomiary o różnych dokładnościach – średnia ważona

Interesuje nas wartość wielkości x . Znamy wyniki N **niezależnych** pomiarów: $x = \hat{x}_i \pm s_i, i = 1, \dots, N$.

Pytanie: Jak na podstawie tych wyników najlepiej wyznaczyć wartość x ?

Zakładamy, że każda z wartości \hat{x}_i jest zmienną losową opisaną rozkładem o średniej μ i dyspersji σ_i (znamy tylko przybliżone wartości $s_i \simeq \sigma_i$ oraz $\hat{x}_i \simeq \mu$).

Poszukujemy \hat{x} – wielkości lepiej przybliżającej μ niż każda z wielkości \hat{x}_i . W tym celu konstruujemy wielkość:

$$\mathcal{R} := \sum_{i=1}^N \frac{(\hat{x}_i - \hat{x})^2}{\sigma_i^2}$$

i poszukujemy minimum tak zdefiniowanego \mathcal{R} względem \hat{x} .

Wynik:

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{x}_i / \sigma_i^2)}{\sum_{i=1}^N (1 / \sigma_i^2)}.$$

Jak łatwo sprawdzić dla \hat{x} spełnione są związki:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\hat{x}) &= \mu, \\ \mathcal{E}((\hat{x} - \mu)^2) &= \frac{1}{\sum_{i=1}^N (1 / \sigma_i^2)}. \end{aligned}$$

Jeżeli w powyższych wzorach zastąpimy wszystkie σ_i znanymi nam ich przybliżeniami, s_i , to otrzymujemy praktyczny przepis:

Odpowiedź 1: $x = \hat{x}_w \pm s_{int}$, gdzie oceny wartości *średniej ważonej*, \hat{x}_w , i *wewnętrznej* oceny dyspersji, s_{int} , zdefiniowane są wzorami:

$$\hat{x}_w := \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{x}_i / s_i^2)}{\sum_{i=1}^N (1 / s_i^2)},$$

$$s_{int}^2 := \frac{1}{\sum_{i=1}^N (1 / s_i^2)}.$$

Model alternatywny

Nasze dane możemy też rozumieć następująco: wynik $\hat{x}_i \pm s_{xi}$ otrzymano na podstawie serii n_i bezpośrednich pomiarów wielkości x . W pomiarach bezpośrednich uzyskano wyniki x_{ij} przy czym: $i = 1, \dots, N$, a dla każdego i , $j = 1, \dots, n_i$.

Przy takiej interpretacji, podane wartości \hat{x}_i , s_{xi} otrzymane byłyby więc w następujący sposób:

$$\hat{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij},$$

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i(n_i - 1)} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \hat{x}_i)^2.$$

Jeśli wszystkie pomiary wykonano w tych samych warunkach, z użyciem tych samych przyrządów, to:

$$\mathcal{E}(s_i^2) = \frac{\sigma^2}{n_i} \Rightarrow n_i \simeq \frac{\sigma^2}{s_i^2},$$

gdzie σ jest nieznaną, dokładną wartością dyspersji (niepewności) pojedynczego pomiaru.

Najlepszą oceną wielkości x będzie więc średnia arytmetyczna **wszystkich** pojedynczych pomiarów:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^N n_i} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^N n_i} \sum_{i=1}^N n_i \hat{x}_i \\ &\simeq \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\sigma^2/s_i^2)} \sum_{i=1}^N \frac{\sigma^2 \hat{x}_i}{s_i^2}. \end{aligned}$$

Po skróceniu licznika i mianownika przez σ^2 otrzymujemy $\hat{x} = \hat{x}_w$, gdzie \hat{x}_w oznacza średnią ważoną zdefiniowaną poprzednio (minimalizacja \mathcal{R}).

W celu wyznaczenia oceny niepewności \hat{x}_w zbadajmy wielkość:

$$A := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \hat{x})^2 \Rightarrow \mathcal{E}(A) = \left(\sum_{i=1}^N n_i - 1 \right) \sigma^2.$$

Mamy także

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \hat{x})^2 = \sum_{ij} (x_{ij} - \hat{x}_i + \hat{x}_i - \hat{x})^2 \\ & = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \hat{x}_i)^2 + n_i (\hat{x}_i - \hat{x})^2 - 2(\hat{x} - \hat{x}_i) \left(\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} - n_i \hat{x}_i \right) \right]. \end{aligned}$$

Obliczając wartość oczekiwaną obu stron równości dostajemy:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^N n_i - 1 \right) \sigma^2 &= \sum_{i=1}^N (n_i - 1) \sigma^2 + \mathcal{E} \left(\sum_{i=1}^N n_i (\hat{x}_i - \hat{x})^2 \right) \\ (N - 1) \sigma^2 &= \mathcal{E} \left(\sum_{i=1}^N n_i (\hat{x}_i - \hat{x})^2 \right). \end{aligned}$$

Wniosek:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{N - 1} \mathcal{E} \left(\sum_{i=1}^N n_i (\hat{x}_i - \hat{x})^2 \right) \\ \sigma_{\hat{x}}^2 &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^N n_i}, \end{aligned}$$

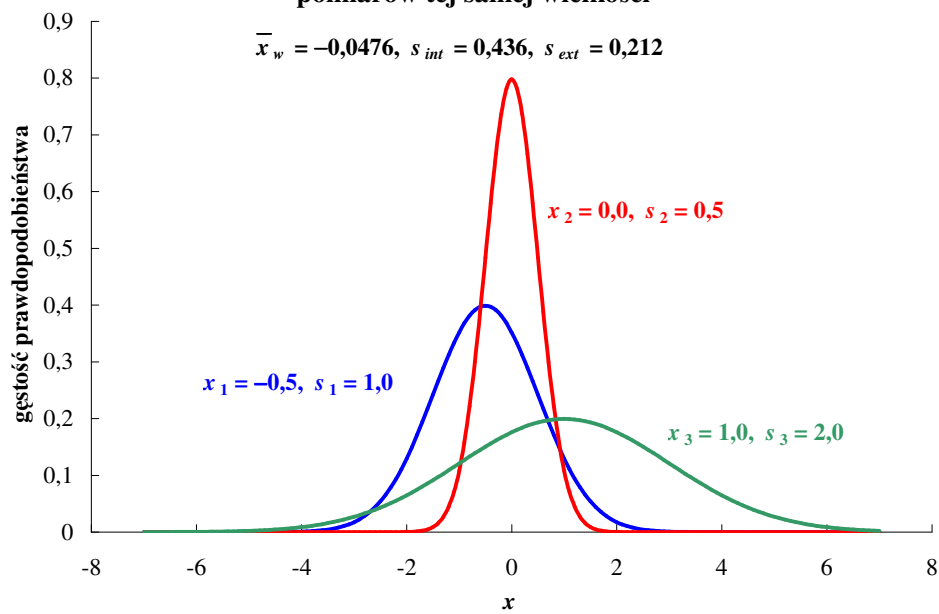
co po podstawieniu $n_i \simeq \sigma^2 / s_i^2$ pozwala na uzyskanie zewnętrznej oceny $\sigma_{\hat{x}}^2$:

$$s_{ext}^2 := \frac{\sum_{i=1}^N [(\hat{x}_i - \hat{x}_w)^2 / s_i^2]}{(N - 1) \sum_{i=1}^N (1 / s_i^2)}.$$

Odpowiedź 2: $x = \hat{x}_w \pm s_{ext}$.

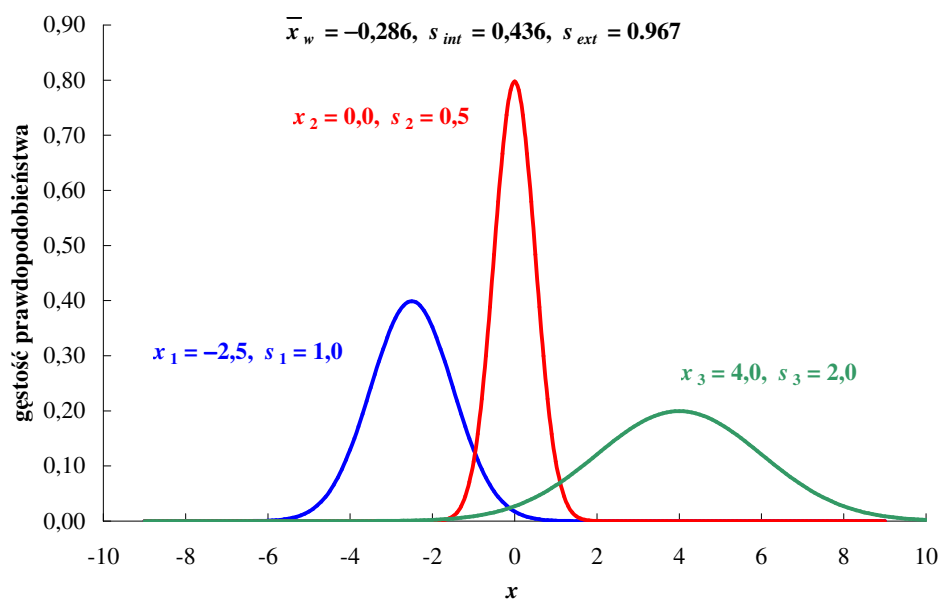
Odpowiedź ostateczna: $x = \hat{x}_w \pm \text{Max}\{s_{int}, s_{ext}\}$.

Modelowe rozkłady prawdopodobieństwa dla trzech różnych pomiarów tej samej wielkości



Rysunek 5: Średnia ważona pomiarów o różnych dokładnościach: $s_{int} > s_{ext}$ (ilustracja wzrowana na: W. H. Heini Gränicher, *Messung beendet – was nun?*, B. G. Teubner Stuttgart, 1994).

Modelowe rozkłady prawdopodobieństwa dla trzech różnych pomiarów tej samej wielkości



Rysunek 6: Średnia ważona pomiarów o różnych dokładnościach: $s_{int} < s_{ext}$ (ilustracja wzorowana na: W. H. Heini Gränicher, *Messung beendet – was nun?*, B. G. Teubner Stuttgart, 1994).

19 Wyznaczanie współczynnika proporcjonalności: $y = ax$

Dla serii **dokładnie** znanych wartości $x_i, i = 1, \dots, N$ znamy wyniki pomiarów odpowiadających im wartości $y_i = \hat{y}_i \pm s_i$.

Wiemy (zakładamy), że wielkości x i y spełniają zależność: $y = ax$, gdzie a jest pewnym nieznanym nam parametrem.

Jak wyznaczyć najlepszą ocenę wartości a na podstawie znanych nam wyników pomiarów: $x_i \rightarrow \hat{y}_i \pm s_i$?

Posłużymy się *metodą najmniejszych kwadratów*. Zakładamy, że każdy z wyników pomiarów \hat{y}_i jest zmienną losową opisaną rozkładem o wartości oczekiwanej ax_i i dyspersji σ_i . Znane nam niepewności pomiarów \hat{y}_i dają nam ocenę wartości $\sigma_i \rightarrow s_i \simeq \sigma_i$. Konstruujemy wielkość:

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^N \frac{(\hat{y}_i - ax_i)^2}{\sigma_i^2}$$

i poszukujemy minimum \mathcal{R} ze względu na a . Otrzymujemy:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{y}_i x_i / \sigma_i^2)}{\sum_{i=1}^N (x_i^2 / \sigma_i^2)}$$

Jak łatwo sprawdzić:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\hat{a}) &= a, \\ \mathcal{E}((\hat{a} - a)^2) &= \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i^2 / \sigma_i^2)}. \end{aligned}$$

W obliczeniach podstawiamy w miejsce nie znanych nam *dokładnych* wartości dyspersji σ_i znane nam oceny przybliżone s_i .

W przypadku, gdy nie są znane niepewności σ_i ani ich oceny s_i korzystamy z założenia, że wszystkie one są sobie równe, $\sigma_i = \sigma$, a wartość σ wyznaczymy w przybliżeniu korzystając z twierdzenia:

Jeśli $f(x, a_1, \dots, a_k)$ jest liniową funkcją parametrów a_1, \dots, a_k , to:

$$\mathcal{E}(\mathcal{R}) = \mathcal{E} \left(\sum_{i=1}^N \frac{(\hat{y}_i - f(x_i; \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k))^2}{\sigma_i^2} \right) = N - k,$$

gdzie N – liczba punktów pomiarowych (danych), a k – liczba wyznaczanych parametrów zależności $y = f(x; a_1, \dots, a_k)$.

Mamy więc ostatecznie dla $y = ax$:

- Dane: $x_i \rightarrow \hat{y}_i \pm s_i$, to $a = \hat{a} \pm s_{\hat{a}}$,

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{y}_i x_i / s_i^2)}{\sum_{i=1}^N (x_i^2 / s_i^2)},$$

$$s_{\hat{a}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i^2 / s_i^2)}$$

- Dane: $x_i \rightarrow \hat{y}_i$, to $a = \hat{a} \pm s_{\hat{a}}$,

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{y}_i x_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2},$$

$$s_{\hat{a}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \hat{a} x_i)^2}{(N - 1) \sum_{i=1}^N x_i^2}$$

20 Wyznaczanie parametrów prostej: $y = ax + b$

Dla dokładnie znanych wartości x_i znamy wyniki pomiarów wartości \hat{y}_i . Znamy (zakładamy) zależność $y = ax + b$. Analogicznie jak poprzednio metoda najmniejszych kwadratów pozwala nam wyznaczyć najlepsze oceny wartości parametrów a i b .

Uwaga: wyznaczone wartości \hat{a} i \hat{b} nie są już niezależne, to znaczy, że kowariancja $C_{\hat{a}\hat{b}} := \mathcal{E}((\hat{a} - a)(\hat{b} - b)) \neq 0$

Oznaczenie: $w_i := 1/s_i^2$

- Dane: $x_i \rightarrow \hat{y}_i \pm s_i$ (znane niepewności \hat{y}_i), to
 $a = \hat{a} \pm s_{\hat{a}}$, $b = \hat{b} \pm s_{\hat{b}}$,

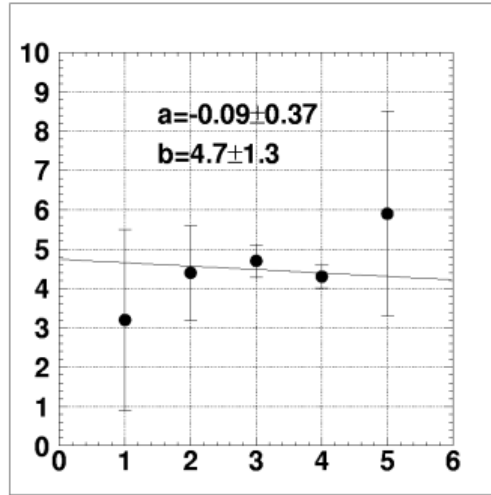
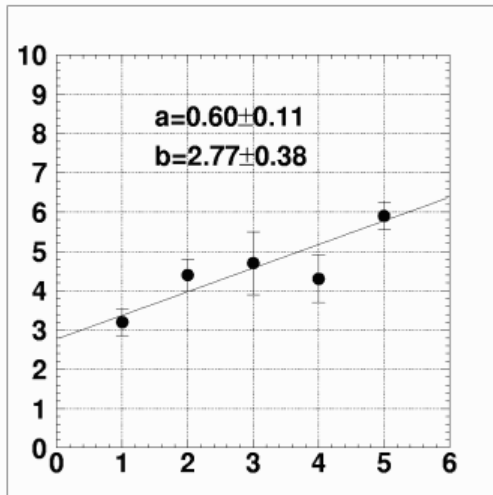
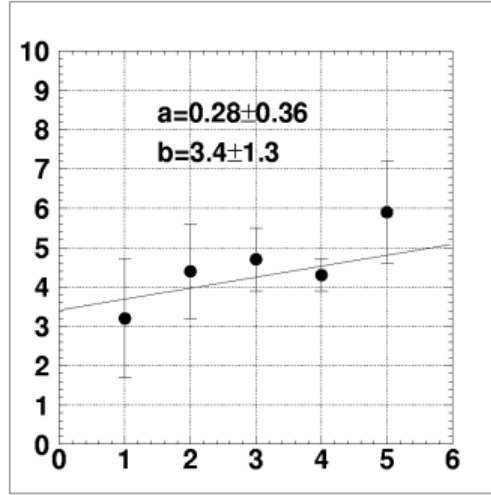
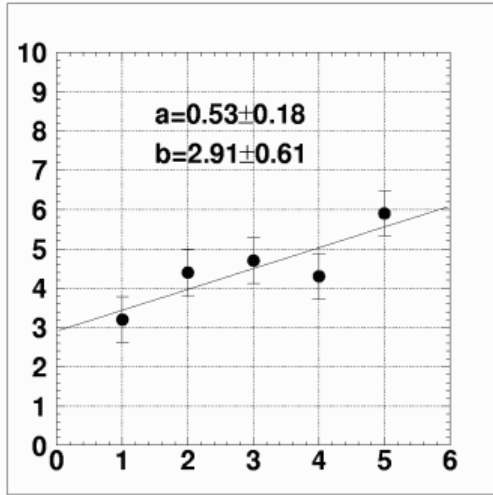
$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^N w_i \sum_{j=1}^N w_j x_j^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i w_i \right)^2 \\ \hat{a} &= \frac{1}{D} \left(\sum_{i=1}^N w_i \sum_{j=1}^N w_j x_j \hat{y}_j - \sum_{i=1}^N w_i x_i \sum_{j=1}^N w_j \hat{y}_j \right) \\ \hat{b} &= \frac{1}{D} \left(\sum_{i=1}^N w_i x_i^2 \sum_{j=1}^N w_j \hat{y}_j - \sum_{i=1}^N w_i x_i \sum_{j=1}^N w_j x_j \hat{y}_j \right) \\ s_{\hat{a}}^2 &= \frac{1}{D} \sum_{i=1}^N w_i \\ s_{\hat{b}}^2 &= \frac{1}{D} \sum_{i=1}^N w_i x_i^2 \\ C_{\hat{a}\hat{b}} &= -\frac{1}{D} \sum_{i=1}^N w_i x_i, \end{aligned}$$

gdzie $C_{\hat{a}\hat{b}}$ oznacza kowariancję ocen wartości parametrów a i b .

- Dane: $x_i \rightarrow \hat{y}_i$ (nie są znane niepewności \hat{y}_i), to
 $a = \hat{a} \pm s_{\hat{a}}, b = \hat{b} \pm s_{\hat{b}},$

$$\begin{aligned}
 D &= N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \\
 \hat{a} &= \frac{1}{D} \left(N \sum_{i=1}^N x_i \hat{y}_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{j=1}^N \hat{y}_j \right) \\
 \hat{b} &= \frac{1}{D} \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{j=1}^N \hat{y}_j - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{j=1}^N x_j \hat{y}_j \right) \\
 s^2 &= \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \hat{a}x_i - \hat{b})^2 \\
 s_{\hat{a}}^2 &= \frac{Ns^2}{D} \\
 s_{\hat{b}}^2 &= \frac{s^2 \sum_{i=1}^N x_i^2}{D} \\
 C_{\hat{a}\hat{b}} &= -\frac{s^2 \sum_{i=1}^N x_i}{D}
 \end{aligned}$$

- W zasadzie **zawsze obie** zmienne obarczone są niepewnościami pomiarowymi. Za zmienną niezależną x przyjmujemy wówczas wielkość mierzoną **dokładniej**, tzn. z **mniejszą** niepewnością. Niech σ_y i σ_x oznaczają, odpowiednio niepewności pomiaru zmiennych x i y . Wówczas zmienna x **jest mierzona dokładniej**, jeśli $\sigma_y > \hat{a}\sigma_x$, gdzie \hat{a} oznacza ocenę wartości współczynnika kierunkowego prostej.



Rysunek 7: Ilustracja wpływu rozkładu niepewności pomiarowych na wartości parametrów prostej wyznaczonych metodą najmniejszych kwadratów.

21 Błąd systematyczny i dokładność przyrządów

Błąd systematyczny przy wielokrotnym powtarzaniu pomiarów tej samej wielkości w warunkach praktycznie niezmiennych pozostaje stały lub zmienia się według określonego prawa wraz ze zmianą warunków.

Praktycznie niezmiennie warunki:

- pomiary przeprowadzane są tą samą metodą,
- pomiary przeprowadza się tym samym przyrządem pomiarowym,
- pomiary przeprowadza ten sam obserwator,
- pomiary przeprowadzane są w tym samym miejscu,
- pomiary powtarzane są w krótkich odstępach czasu,
- podczas wykonywania pomiarów panują te same warunki zewnętrzne (temperatura, ciśnienie, wilgotność, oświetlenie,....).

(Przytoczona tu analiza zaczerpnięta została z: W. Jakubiec i J. Malinowski *Metrologia wielkości geometrycznych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1999).

Eliminacja błędu systematycznego:

- usunięcie źródeł błędu;
- wprowadzenie poprawek do wyniku pomiaru:
 - obliczonych,
 - wyznaczonych doświadczalnie (pomiary różnymi metodami).

Rodzaje błędów systematycznych (przykłady):

- błąd temperaturowy;
- błąd odkształceń sprężystych (np. przy pomiarze długości);
- błąd metody (np. pomiar oporu metodą jednoczesnego pomiaru prądu i spadku potencjału → *układ dokładnego pomiaru prądu* albo *układ dokładnego pomiaru spadku potencjału*);
- błąd odczytu przyrządu (paralaksa, interpolacja, błąd kwantowania);
- błąd histerezy (spowodowany np. tarciem, albo luzami części ruchomych przyrządów);
- **dokładność przyrządu.**

Przykład 9. Eliminacja błędu temperaturowego.

(Przykład zaczerpnięty z podręcznika W. Jakubca i J. Malinowskiego *Metrologia wielkości geometrycznych*, WNT, Warszawa, 1999.)

Przyjmuje się, że podawane wymiary przedmiotów odpowiadają temperaturze $t_0 = 20^\circ\text{C}$.

Pomiar wykonano w temperaturze $t \neq 20^\circ\text{C} \rightarrow$ otrzymano wynik L .

Wartość poprawiona $\rightarrow L' = L - \delta_t$,

$$\delta_t = L [\alpha_p(t_p - t_0) - \alpha_n(t_n - t_0)],$$

gdzie α_p to współczynnik rozszerzalności temperaturowej mierzonego przedmiotu, α_n – współczynnik rozszerzalności temperaturowej przyrządu pomiarowego (linijki, taśmy mierniczej..), t_p – temperatura przedmiotu, t_n temperatura przyrządu.

Niepewność poprawionego wyniku obliczamy korzystając z prawa *propagacji małych błędów*:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{L'}^2 &= \varepsilon_L^2 + \varepsilon_{\delta t}^2, \\ \varepsilon_{\delta t}^2 &= L^2 [\alpha_p^2 \varepsilon_{t_p}^2 + \alpha_n^2 \varepsilon_{t_n}^2 + (t_p - t_0)^2 \varepsilon_{\alpha_p}^2 + (t_n - t_0)^2 \varepsilon_{\alpha_n}^2],\end{aligned}$$

gdzie $\varepsilon_{(\cdot)}$ oznacza niepewność odpowiedniej wielkości.

Uwzględnienie skończonej dokładności przyrządów

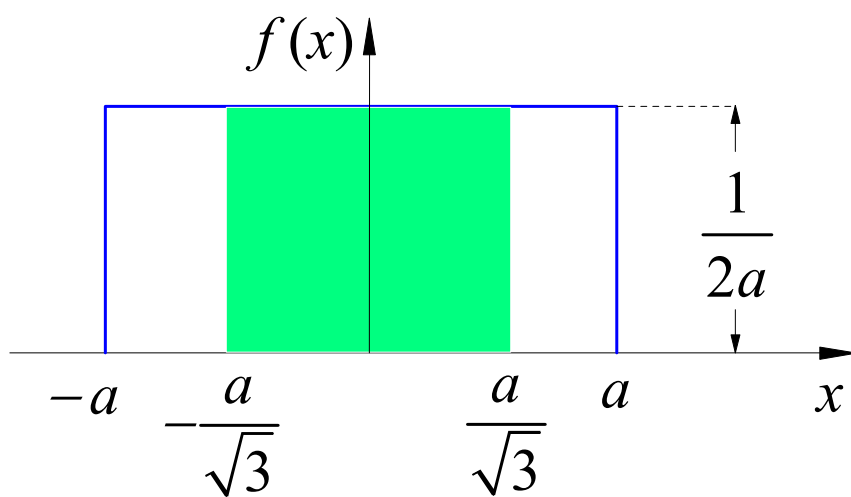
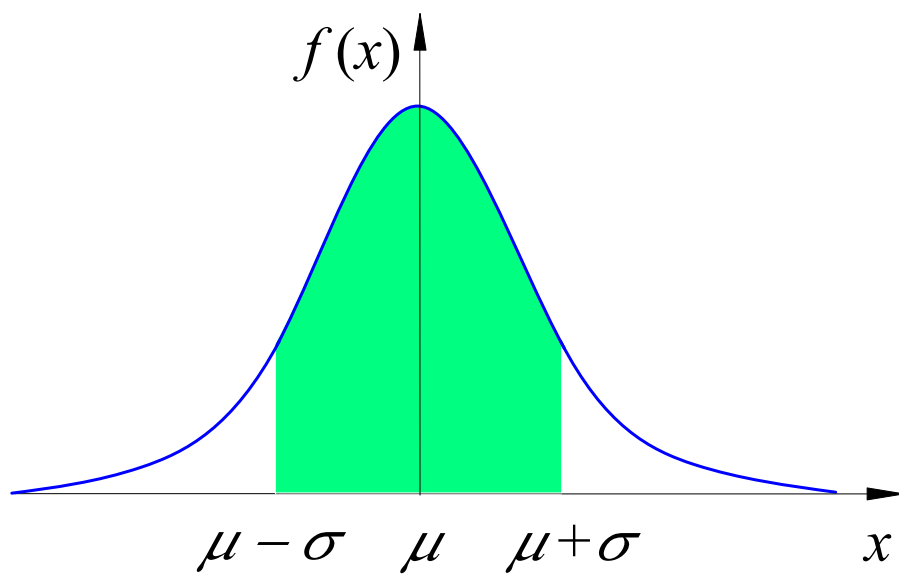
Po wprowadzeniu poprawek uwzględniających wszystkie rozpoznane źródła błędów systematycznych pozostaje jeszcze błąd związany z kalibracją przyrządów. Kalibracja przyrządów pomiarowych nigdy nie jest idealna. Błędy kalibracji (np. naniesienia skali) przejawiają się jako błędy systematyczne. Moglibyśmy je wyeliminować, gdybyśmy powtarzali serie pomiarowe, w każdej z nich stosując inny egzemplarz przyrządu danego typu i uśredniając wyniki wszystkich tak otrzymanych serii. Zamiast tego posłużymy się modelem statystycznym (tzw. *metoda randomizacji i centryzacji błędu systematycznego*).

Zakładamy, że:

- używany przyrząd jest losowo wybranym przedstawicielem klasy przyrządów;
- niedokładność każdego z przyrządów tej klasy przejawia się jako błąd systematyczny ξ ;
- wewnątrz danej klasy wartość ξ jest zmienną losową opisaną pewnym rozkładem prawdopodobieństwa, spełniającym warunki:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\xi) &= 0, \\ \mathcal{E}(\xi^2) &= \sigma^2(\xi),\end{aligned}$$

przy czym ξ jest zmienną losową **niezależną** od innych czynników losowych (błędów losowych) prowadzących do rozrzutu wyników wewnątrz jednej serii pomiarowej.



Rysunek 8: Przykłady modelowych rozkładów prawdopodobieństwa błędu wskazań przyrządu: rozkład Gaussa – górny wykres, rozkład jednostajny – dolny wykres.

Wartość $\sigma^2(\xi)$ wyznaczamy na podstawie:

- szczegółowych informacji podanych przez producenta,
- modelowego rozkładu tej części błędu systematycznego.

Najczęściej stosowane modele rozkładu prawdopodobieństwa dla *losowej składowej błędu systematycznego* (tzw. *randomizacja i centryzacja błędu systematycznego*):

- rozkład Gaussa (normalny) o dyspersji $\sigma = \Delta/3$;
- rozkład jednostajny o $a = \Delta$ (oznaczenia jak na wykresie); wówczas $\sigma^2(\xi) = \Delta^2/3$.

Wartość Δ określamy na podstawie:

- klasy przyrzędu, albo
- jako *najmniejszą działkę skali*.

Uwagi:

- wielokrotne (n krotne) „przykładanie” przyrzędu w celu zmierzenia jednej wielkości (np. nasza linijka jest krótsza od mierzonego odcinka) prowadzi do oceny:

$$\sigma^2(\xi) = n\sigma_{\text{przyrz}}^2;$$

- pomiar wielokrotności (n) interesującej nas wielkości (np. pomiar czasu trwania n okresów wahadła, pomiar grubości n kartek papieru...) prowadzi do oceny:

$$\sigma^2(\xi) = \frac{1}{n^2}\sigma_{\text{przyrz}}^2.$$

Wynik podajemy w postaci:

$$\begin{aligned}x &= \bar{x} \pm u(\bar{x}), \\u^2(\bar{x}) &= s_{\bar{x}}^2 + \sigma^2(\xi),\end{aligned}$$

gdzie \bar{x} oznacza średnią serii pomiarów poprawioną ze względu na wszystkie rozpoznane źródła błędów systematycznych, a $s_{\bar{x}}$ oznacza niepewność średniej (uwzględniającą niepewności wprowadzanych poprawek poprzez prawo propagacji małych błędów).

22 Rozkład χ^2

Niech x_1, \dots, x_N będą **niezależnymi** zmiennymi losowymi, każda opisana rozkładem Gaussa o wartości średniej $\mu = 0$ i dyspersji $\sigma = 1$. Wówczas wielkość:

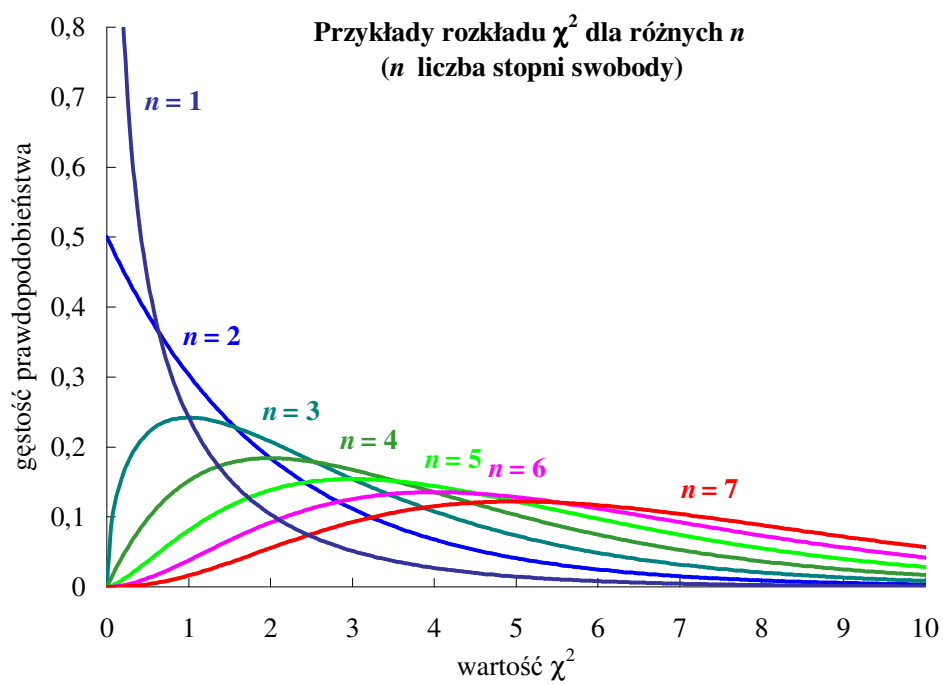
$$x := \chi^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2$$

podlega **rozkładowi** χ^2 o gęstości prawdopodobieństwa zadanej wzorem:

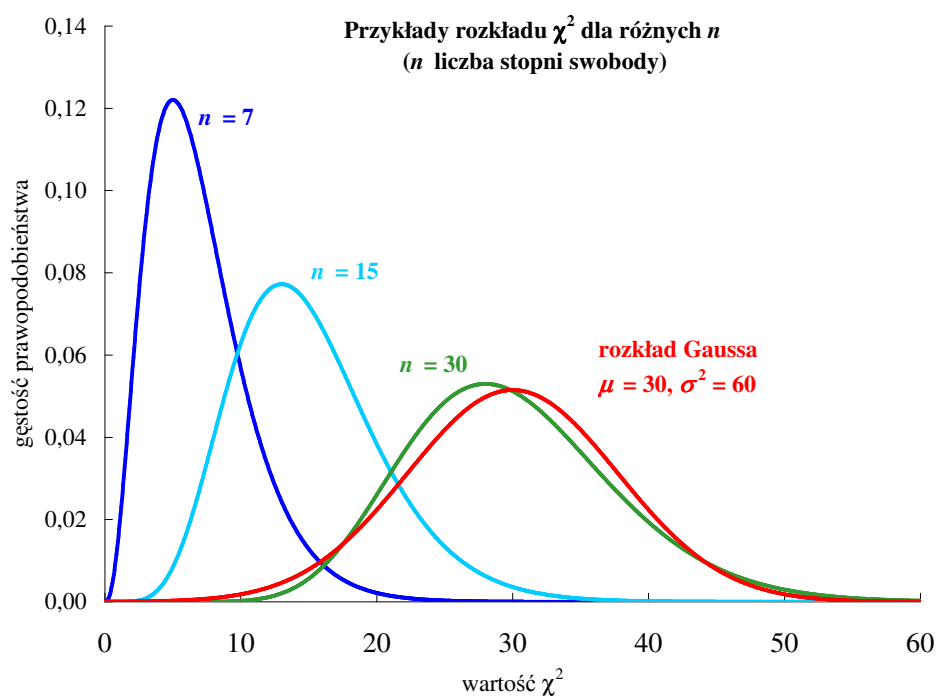
$$f(x; N) = \frac{1}{2\Gamma(\frac{N}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{N}{2}-1} \exp(-x/2),$$

gdzie N nazywane jest liczbą stopni swobody,
 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,
a dla z równego liczbie naturalnej n , $\Gamma(n+1) = n!$.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x) &= N \\ \mathcal{E}((x - N)^2) &= 2N\end{aligned}$$



Rysunek 9: Wykresy gęstości rozkładu χ^2 dla małych liczb stopni swobody n .



Rysunek 10: Wykresy gęstości rozkładu χ^2 dla dużych liczb stopni swobody n .

23 Test zgodności dopasowania – test χ^2

Sprawdzenie dopasowania zależności funkcyjnej do wyników pomiarów.

Hipoteza:

$$y = f(x; a_1, a_2, \dots, a_k).$$

Pomiary:

$$x_i \rightarrow y_i \pm \sigma_i, i = 1, \dots, N > k,$$

gdzie x_i i σ_i znane są dokładnie (założenie).

Tworzymy wielkość:

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - f(x_i; a_1, \dots, a_k))^2}{\sigma_i^2}.$$

Wówczas:

1. Jeśli parametry $f(x; a_1, \dots, a_k)$ znane są dokładnie (tzn. ich wartości liczbowe są częścią testowanej hipotezy) to:

$$\mathcal{E}(\mathcal{R}) = N.$$

Jeśli dodatkowo, dla każdego i , y_i podlega rozkładowi Gaussa o wartości oczekiwanej $f(x_i; a_1, \dots, a_k)$ i dyspersji σ_i to \mathcal{R} podlega rozkładowi χ^2 o N stopniach swobody.

2. Jeśli $f(x; a_1, \dots, a_k)$ jest liniową funkcją parametrów a_1, \dots, a_k , a wartości tych parametrów wyznaczone zostały na podstawie danych doświadczalnych (metoda najmniejszych kwadratów \rightarrow minimalizacja wartości $\mathcal{R} \rightarrow \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k$), to

$$\mathcal{E}(\mathcal{R}) = N - k,$$

gdy wartość \mathcal{R} obliczona jest po podstawnieniu $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k$.

Jeśli dodatkowo, dla każdego i , y_i podlega rozkładowi Gaussa o wartości oczekiwanej $f(x_i; a_1, \dots, a_k)$ i dyspersji σ_i , to wartość \mathcal{R} obliczona dla wyznaczonych za pomocą minimalizacji wartości \hat{a}_i podlega rozkładowi χ^2 o $N - k$ stopniach swobody.

Test:

Hipotezę odrzucamy, jeżeli wynikające z rozkładu χ^2 o odpowiadającej naszemu zagadnieniu liczbie stopni swobody prawdopodobieństwo uzyskania otrzymanej wartości \mathcal{R} lub większej jest mniejsze od przyjętej przez nas wartości krytycznej (np. 0,05) – test jednostronny. Przyjęta wartość krytyczna równa jest akceptowanemu przez nas prawdopodobieństwu popełnienia **błędu I rodzaju**.

W przypadku 1. odrzucenie hipotezy oznacza, że podane wartości parametrów lub podany kształt zależności, to znaczy postać funkcji $f(x, a_1, \dots, a_k)$, nie opisują otrzymanych wyników pomiarów.

W przypadku 2. odrzucenie hipotezy oznacza, że podany kształt zależności, to znaczy postać funkcji $f(x, a_1, \dots, a_k)$, nie opisuje otrzymanych wyników pomiarów.

Uwagi:

- Jeśli otrzymana wartość \mathcal{R} jest zbyt mała (wyraźnie mniejsza od liczby stopni swobody), to najprawdopodobniej:
 - pomiary nie były niezależne lub
 - przeceniliśmy wartości niepewności pomiarowych.
- W praktyce używamy zamiast dokładnych wartości niepewności jedynie dostępnych nam ocen tych wartości. Nie sprawdzamy też przeważnie zasadności założenia o gaussowskim rozkładzie wyników pomiarów. Opisany powyżej test jest też często stosowany w przypadkach, gdy $f(x; a_1, \dots, a_k)$ **nie jest** liniową funkcją parametrów a_1, \dots, a_k . Wszystkie te czynniki zmniejszają konkluzywność przeprowadzonego testu (tzn. w niekontrolowany sposób zmieniają prawdopodobieństwo błędu I rodzaju w stosunku do przyjętej wartości krytycznej).

Sprawdzenie zgodności obserwowanego rozkładu wyników z zadaniem (przewidywanym) rozkładem prawdopodobieństwa.

Hipoteza:

Prawdopodobieństwo otrzymania wartości $x_i, i = 1, \dots, M$ (otrzymania wartości x z przedziału o numerze i) $\rightarrow p_i$

$$\sum_{i=1}^M p_i = 1.$$

Pomiary:

W przedziale i otrzymaliśmy n_i przypadków: $i \rightarrow n_i$,

$$\sum_{i=1}^M n_i = N > M.$$

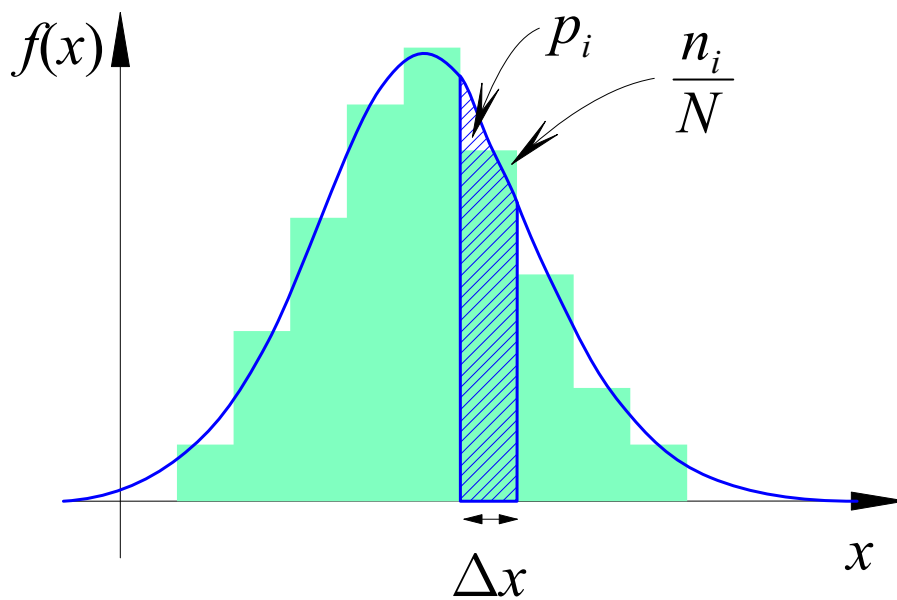
Na podstawie testowanej hipotezy przewidywana liczba przypadków $i \rightarrow p_i N$.

Założenie:

Wartości $p_i N$ są duże (ten warunek musimy uwzględnić planując wykonanie testu). Warunek ten oznacza, że obserwowanym liczbom przypadków n_i można przypisać niepewności $\sigma_i \simeq \sqrt{p_i N}$ lub, inaczej, że n_i podlegają w przybliżeniu rozkładowi Poissona.

Tworzymy wielkość:

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^M \frac{(n_i - p_i N)^2}{p_i N}.$$



Rysunek 11: Test zgodności rozkładu obserwowanego – histogram wartości n_i/N – z modelową gęstością prawdopodobieństwa – p_i obliczane jako pole pod krzywą.

Wówczas:

\mathcal{R} podlega rozkładowi χ^2 o $M - 1$ stopniach swobody.

Każdy dodatkowy warunek nałożony na wartości n_i poza warunkiem

$$\sum_{i=1}^M n_i = N$$

zmniejsza liczbę stopni swobody o 1, to znaczy:

k dodatkowych warunków \rightarrow liczba stopni swobody = $M - k - 1$.

Test: Porównanie obliczonej wartości \mathcal{R} z wartością krytyczną rozkładu χ^2 .

Praktyka: Często zalecane jest, by test stosować, gdy $p_i N \geq 5$, $M \geq 6 \Rightarrow N \geq 30$.

Uwaga: Można dopasować szerokości przedziałów do wartości $p_i N$.

24 Jak piszemy pracę naukową?

Przed rozpoczęciem pisania tekstu należy jasno odpowiedzieć sobie na dwa pytania:

- Co jest **najważniejszą informacją**, jaką chcemy przekazać?
- Do **kogo** adresujemy naszą pracę?

Układ tekstu pracy:

- tytuł → informuje o zawartości;
- autor (autorzy) i ich adresy (uczelnia, instytut badawczy...);
- streszczenie → rozszerza tytuł;
- wstęp → dlaczego zajęliśmy się opisywanym zagadnieniem (dotychczasowy stan badań...);
- opis używanych metod: podstawy teoretyczne, używane wzory, stosowane przybliżenia, definicje i oznaczenia podstawowych wielkości...;
- techniczna realizacja pomiaru: schemat układu pomiarowego, użyta aparatura (typ i producent), metody kontroli warunków pomiaru (np. kalibrowania przyrządów);
- uzyskane wyniki: (a) syntetyczna prezentacja wyników pomiarów, (b) dyskusja źródeł niepewności i ocena jej wartości;
- wnioski i podsumowanie;
- podziękowania (współpracownicy, którzy nie są współautorami, sponsorzy,);
- dodatki (nie zawsze) → wyprowadzenie mało znanych zależności, szczegóły techniczne procedur pomocniczych,...;
- cytowana literatura.

Uwagi dodatkowe:

- Używany język powinien być prosty i jasny, a zdania krótkie.
- Wzory matematyczne to też proza: $a = b + c$ to pełne zdanie.
- Wszystkie oznaczenia muszą być zdefiniowane **przed** ich pierwszym użyciem (lub tuż po).
- Używane wzory powinny być wyprowadzone lub powinien być podany odnośnik do pracy (podręcznika), gdzie takie wyprowadzenie można znaleźć.
- Rysunki, tabele, odnośniki muszą być ponumerowane według kolejności ich omawiania w tekście, przy czym, **oddzielna numeracja** dotyczy rysunków, tabel i odnośników.
- W miarę możliwości należy cytować prace źródłowe, a jeśli nie, to powszechnie dostępne prace przeglądowe lub podręczniki.
- O ile to możliwe, stosujemy standardowe oznaczenia występujących wielkości, np.: m – masa, \vec{r} – położenie, \vec{v} – prędkość, R – opór elektryczny, t – czas, T – temperatura w skali Kelvina.
- Wykres przedstawianej przez nas zależności powinien wypełniać całe przeznaczone dla niego pole; nachylenie prostej powinno być bliskie 45° .
- Osie wykresów muszą być wyraźnie opisane z podaniem jednostek, w jakich mierzone są przedstawiane wielkości.
- Tabele powinny zawierać nazwy prezentowanych wielkości i jednostki, w których są one mierzone.
- **Główna informacja** powinna wynikać z tytułu, streszczenia, wykresów (rysunków) i tabel.